APhEx 18, 2018 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 29/01/2018
Accettato il: 26/09/2018
Redattore: Paolo Labinaz & Francesca Ervas

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 18, 2018

T E M I

La disgiunzione di Gödel

Francesco Beccuti

La disgiunzione di Gödel è la tesi filosofica secondo cui o l'abilità matematica umana non è meccanizzabile oppure esistono problemi matematici assolutamente insolubili. Dopo aver brevemente delineato il contesto storico e teoretico della disgiunzione, ne sottolineiamo la rilevanza e per la filosofia della matematica e per la filosofia della mente. Procediamo poi a presentarne una possibile dimostrazione sottolineando gli assunti filosofici e i problemi d'idealizzazione che ne stanno alla base. Discutiamo inoltre in dettaglio i due corni della disgiunzione, soffermandoci su alcuni tentativi di stabilirne la validità e sulle critiche relative.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

INDICE

1. La disgiunzione di Gödel e la sua rilevanza filosofica

Nel 1951 Kurt Gödel presenta per la prima volta esplicitamente in una conferenza alla American Mathematical Society le sorprendenti conseguenze filosofiche dei suoi celebrati teoremi d'incompletezza, di cui in particolare il secondo

> *rende impossibile il fatto che qualcuno, considerando un sistema d'assiomi e di regole logiche determinato e ben-definito, possa a proposito di esso coerentemente pronunciare la seguente asserzione: io percepisco (con certezza matematica) che tutti questi assiomi e queste regole sono corretti, e inoltre credo che contengano tutta la matematica*. Se qualcuno pronunciasse tale asserzione si contraddirebbe. Perché se egli percepisse gli assiomi considerati come corretti, allora percepirebbe anche (con la stessa certezza) la loro coerenza. Dunque egli avrebbe un'intuizione matematica non derivabile da tali assiomi. (Gödel 1951, 309)

E allora questo significa che non è possibile comprendere tutta la matematica in un solo sistema di assiomi? Molto dipende da che cosa intendiamo per "matematica". Nel corso della conferenza, infatti, Gödel introduce una suggestiva distinzione fra la matematica nel suo senso *soggettivo* (l'insieme delle proposizioni dimostrabili a partire da un qualche sistema di assiomi) e la matematica nel suo senso *oggettivo* (l'insieme delle proposizioni vere in senso assoluto). Tali insiemi coincidono, si chiede Gödel, oppure no? Se sì, allora non c'è speranza di poter comprendere tutta la matematica in un unico sistema assiomatico, perché se tale sistema esiste, allora l'enunciato che esprime la coerenza del sistema non può, per il secondo teorema d'incompletezza, esser dimostrabile in tale sistema, e ciò contraddice l'assunto iniziale. Se invece la matematica oggettiva è distinta dalla matematica soggettiva, allora da un lato la matematica soggettiva potrebbe esser passibile d'esser compresa in unico sistema assiomatico, ma, d'altra parte, rimarrebbe il problema di spiegare filosoficamente (e matematicamente) l'esistenza di proposizioni matematiche vere, ma non accessibili mediante dimostrazione in un sistema formale. Gödel giunge dunque a sostenere la seguente tesi disgiuntiva: o la matematica soggettiva non è formalizzabile, oppure la matematica oggettiva non è riducibile alla matematica soggettiva. In altre parole,

> […] la seguente conclusione disgiuntiva è inevitabile: *O la matematica è inesauribile nel senso che i suoi assiomi evidenti non potranno mai essere* compresi in una regola finita, *cioè la mente umana (anche solo nel campo della matematica pura) sorpassa infinitamente le capacità di ogni macchina finita, oppure esistono problemi diofantei assolutamente irrisolvibili* […] (dove il caso in cui ambedue i termini della disgiunzione sono veri non è escluso […]). Ed è questo fatto, stabilito matematicamente, che mi sembra essere di grande interesse filosofico. (Gödel 1951, 310)

La tesi di Gödel è quindi la seguente: o il meccanicismo è falso oppure esistono problemi matematici a cui non si può sperare di trovare soluzione. Questa è, scriverà poi Gödel, «forse la prima proposizione rigorosamente dimostrata a proposito di un concetto filosofico» (Gödel in Cassou-Noguès 2008, 2). Secondo Gödel, infatti, ambedue le alternative si pongono in netta opposizione rispetto al materialismo in filosofia (della mente nel caso del primo corno della disgiunzione, della matematica nel caso del secondo corno):

> […] se vale la prima alternativa, questo sembra implicare che il funzionamento della mente umana non può essere ridotto al funzionamento del cervello che, sotto ogni apparenza, è una macchina finita con un numero finito di parti, ossia i neuroni e le loro connessioni. (Gödel 1951, 311)

La seconda alternativa, invece,

> Sembra confutare il fatto che la matematica sia solo una nostra creazione […] Questa alternativa sembra implicare che gli oggetti e i fatti matematici (o almeno qualcosa in essi) esistono oggettivamente e indipendentemente dai nostri atti e dalle nostre decisioni mentali, ossia che deve valere qualche forma di platonismo o di "realismo" in riferimento agli oggetti matematici. (Gödel 1951, 311)

In altre parole, o il meccanicismo è falso oppure il Platonismo è vero, o entrambe le cose (Wang 1996, 186).

La rilevanza dei teoremi d'incompletezza rispetto a una teoria scientifica della mente umana, pur discussa da molti autori di formazione logica, rimane tuttavia largamente ignorata dalla gran parte del dibattito filosofico e psicologico contemporaneo, che sembra non averne ancora recepito l'importanza. Come ha osservato Benacerraf, infatti,

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

> […] se esiste una macchina di Turing che può dimostrare tutto ciò che la mia chiusura del prim'ordine può dimostrare, allora io non posso dimostrare che […] tale macchina è ad un tempo adatta a fare aritmetica e che può dimostrare tutto ciò che io posso dimostrare. […] Una persona a cui ho spiegato [questo risultato] ne ha concluso che la psicologia come la conosciamo è impossibile. Perché se noi non siamo al più macchine di Turing, allora essa è impossibile, ma se siamo macchine di Turing, allora ci sono determinati fatti a proposito di noi stessi che non possiamo conoscere […] Non prenderò posizione in proposito. Ma […] possiamo riformulare come segue la portata [filosofica] dei teoremi di Gödel: se io sono una macchina di Turing, allora la mia stessa natura mi impedisce di obbedire all'imperativo socratico: CONOSCI TE STESSO. (Benacerraf 1967, 30)

2. Dimostrazione e problemi d'idealizzazione

In merito alla formulazione della disgiunzione persistono tuttavia alcune questioni irrisolte di natura epistemologica, linguistica e d'idealizzazione che la letteratura non cessa di mettere in luce, di cui la più stringente è che il contenuto della tesi meccanicistica non è completamente chiaro (come non è chiaro il concetto di dimostrabilità assoluta). Che cosa s'intende infatti per "la mente umana nel campo della matematica pura", che cosa significa che essa è meccanizzabile, e in che senso?

In primo luogo, la questione della meccanizzabilità della mente (il suo esser "compresa in una regola finita") è forse quella che meno si presta a interpretazioni, dato che da tempo disponiamo di definizioni precise di "procedura effettiva" o "procedura meccanica" o di "algoritmo"[1], ossia di processi che possono essere eseguiti tramite una sequenza di passaggi finiti da un agente idealizzato a partire da un numero finito di istruzioni. Un modo particolarmente semplice e intuitivo per definire l'effettività di una procedura è quello di definire una macchina di Turing che sia in grado di compierla. Sebbene la nozione di macchina di Turing sia solo uno dei tentativi che storicamente sono stati utilizzati per definire rigorosamente il concetto di procedura effettiva, tutti i particolari modelli di computazione proposti fino ad oggi (come ad esempio gli automi a stati finiti, gli automi a pila, il λ-calcolo di Church o la teoria delle funzioni ricorsive di Kleene)

[1] Tuttavia le nozioni di "procedura meccanica" e di "procedura algoritmica" non sono esattamente coincidenti, essendo la prima più generale della seconda (vedi Gandy 1988).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

sono stati dimostrati essere meno o al più ugualmente espressivi rispetto al modello di Turing[2]. Questo ha portato alla formulazione della seguente tesi.

Tesi di Church-Turing: la nozione di macchina di Turing cattura completamente il concetto di procedura effettiva[3].

Come vedremo, la tesi di Church-Turing è uno degli assunti fondamentali alla base della dimostrazione della disgiunzione di Gödel, insieme al secondo teorema d'incompletezza.

Secondo teorema d'incompletezza: se T è una teoria logica coerente e in grado di dimostrare gli assiomi dell'aritmetica di Peano, allora T *non* dimostra la sua coerenza (né la sua incoerenza)[4].

Un altro fondamentale presupposto della dimostrazione della disgiunzione di Gödel è il fatto che le macchine di Turing costituiscono in un certo senso la "controparte meccanica" delle teorie studiate dai logici. Infatti, data una teoria T e un'opportuna codifica numerica delle formule nel linguaggio di tale teoria, è possibile determinare attraverso una procedura effettiva se un dato numero è il codice di una formula di T. Dato che, poi, le dimostrazioni

---

[2] Qui "più espressivo" significa capace di definire una classe di oggetti calcolabili più ampia (ossia, nella rappresentazione più usuale di tali oggetti, un insieme più ampio di stringhe binarie infinite). Gli automi a stati finiti e gli automi a pila, ad esempio, sono meno espressivi delle macchine di Turing, mentre il λ-calcolo e le funzioni ricorsive hanno espressività equivalente ad esse (vedi Aldini 2014, p. 258 e pp. 268-281).

[3] Per un'introduzione filosofica a Turing e alla tesi di Church-Turing vedi Frixione e Numerico (2013).

[4] Com'è noto, la dimostrazione dei teoremi d'incompletezza si ottiene mediante una tecnica detta di "aritmetizzazione" della sintassi, che procede attraverso l'assegnazione di codici numerici ai simboli, alle formule e alle sequenze di formule di una teoria logica T. Data T, allora, si può costruire in modo canonico una relazione $Prov_T(x, y)$, che esprime intuitivamente il fatto che x è il codice di una dimostrazione in T della formula con codice y. Ora, se si fissa un codice n che rappresenta nel linguaggio considerato un qualsiasi enunciato falso (per esempio $0 = 1$), allora, per quanto detto, la formula

$$\forall x \neg Prov_T(x, n)$$

esprime il fatto che non c'è alcun x che è codice di una dimostrazione in T di $0 = 1$: essa esprime dunque la coerenza di T. Il secondo teorema d'incompletezza stabilisce dunque che la formula ϕ_T risulta indimostrabile in T proprio quando T è coerente, ossia proprio quando ϕ_T è vera. Per un'introduzione filosofica a Gödel e ai teoremi d'incompletezza vedi (Bruni 2013).

in T non sono altro che sequenze finite di formule, è ancora possibile determinare effettivamente se un dato numero è codice di una dimostrazione in T e, quando lo è, possiamo effettivamente determinare il codice dell'ultima formula della sequenza, ossia del teorema stabilito dalla dimostrazione. Ne segue allora che, data una teoria T, si può definire una procedura meccanica che controlli, per ogni numero naturale, se esso è il codice di una dimostrazione di T e che, quando lo è, produca il codice del teorema stabilito dalla dimostrazione. Si può dunque associare ad ogni teoria T una macchina di Turing M che enumeri tutti e soli i teoremi di T. Viceversa, data una macchina di Turing M, e specificato un opportuno linguaggio formale, si può far corrispondere a M un'equivalente teoria T nel linguaggio specificato, semplicemente scegliendo una opportuna codifica tale per cui tutti i numeri che M enumera siano codici di formule del linguaggio considerato[5] e, infine, definendo i teoremi di T come la chiusura deduttiva delle formule via via enumerate da M secondo tale codifica (Feferman 2006, 137-138). Abbiamo allora il seguente (meta)teorema che enuncia un fatto stabilito matematicamente: l'identità fra macchine di Turing e teorie logiche.

Isomorfismo teorie-macchine: Data una qualsiasi teoria logica T, esiste una macchina di Turing i cui input e regole di funzionamento corrispondono agli assiomi e alle regole di T e il cui output consiste di tutti e soli i teoremi di T. Viceversa, data una qualsiasi macchina di Turing M, esiste una teoria i cui assiomi e regole logiche corrispondono agli input e alle regole della macchina e i cui teoremi sono tutti e soli gli output di M.

Ne segue che parlare di macchine di Turing e parlare di teorie logiche è la stessa cosa: tutto ciò che può esser fatto attraverso una macchina automatica può esser fatto tramite una corrispondente teoria logica e viceversa. In questo senso il problema dell'intelligenza artificiale è un problema della logica. L'isomorfismo fra sistemi formali e macchine di Turing ci permette anche, nel contesto della discussione sulla disgiunzione di Gödel e sul meccanicismo, di non tenere in nessun conto la definizione formale di macchina di Turing e di parlare liberamente di macchina, intendendo un qualsiasi dispositivo capace di manipolare simboli (quelli dell'aritmetica) e di dimostrare sintatticamente teoremi veri (dell'aritmetica). Ci si può

[5] Si può in effetti definire un'assegnazione di codici numerici alle formule del linguaggio che sia, a differenza di quella originariamente introdotta da Gödel, non solo iniettiva, ma anche suriettiva (vedi Soare 2016, xxxii).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

permettere inoltre di parlare liberamente di assiomi o di coerenza di una macchina di Turing, intendendo sempre gli assiomi e la coerenza della teoria corrispondente alla macchina considerata in base all'isomorfismo di cui sopra. Allo stesso modo si può parlare di applicare il secondo teorema d'incompletezza alle macchine di Turing. Data una macchina di Turing coerente, esiste un enunciato (quello che esprime la coerenza della macchina stessa) che tale macchina non può dimostrare. Infine, tenendo conto della tesi di Church-Turing, si può esprimere senza perdere di generalità la tesi meccanicistica nel contesto della disgiunzione di Gödel: la mente umana nel campo della matematica pura è una macchina di Turing.

Nel seguito quando parleremo genericamente di "macchine" intenderemo sempre "macchine di Turing". Quindi, in questo contesto, parlare della "meccanizzabilità della mente" significa parlare della possibilità di simulare le abilità della mente tramite una macchina (di Turing). Rimane invece ancora oscuro che cosa s'intenda per "mente umana" anche solo nel contesto "ristretto" della matematica pura. Significa la mente di un singolo matematico oppure si sta parlando più in generale della comunità degli studiosi di matematica? La maggior parte dei commentatori odierni tende in questo contesto a identificare la mente umana con la più larga categoria della comunità degli studiosi, ponendo l'enfasi sul fatto che la matematica è attività cooperativa e sociale[6]. Viceversa Gödel, nelle sue conversazioni con Wang, è propenso a porre l'accento sul carattere solitario della matematica e a definire quindi la mente umana nel contesto della sua disgiunzione come il potere di dimostrare teoremi da parte di un singolo essere umano scevro da limitazioni di spazio e di tempo[7].

Si noti infatti che, banalmente, il numero di teoremi che un singolo essere umano può dimostrare nel corso della sua vita è un numero finito. Allo stesso modo la quantità di teoremi che l'umanità nel suo complesso potrà dimostrare prima che il sole si spenga (nella suggestiva metafora di Shapiro 2016, 192) è anch'essa finita. Dato che l'insieme delle conseguenze logiche di un insieme finito è ricorsivamente enumerabile[8], allora è chiaro che in questo senso la matematica è banalmente meccanizzabile. È evidente allora che non è questo il senso in cui s'intende (almeno da parte degli anti-meccanicisti) la questione della meccanizzabilità della matematica. Non si sta infatti qui trattando della matematica nel senso dei teoremi che sono e saranno dimostrati dagli esseri umani, bensì della loro capacità *potenziale* di dimostrare teoremi. Inoltre, lo stesso discorso si potrebbe fare per la

[6] Ad esempio Leitgeb (2009, 282).
[7] Ossia immortale e con una provvista infinita di carta e inchiostro.
[8] Cioè esiste una macchina di Turing in grado di enumerare uno per uno tali teoremi.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

dimostrabilità assoluta, anch'essa intesa come capacità potenziale di dimostrare teoremi fuori dai vincoli di ogni particolare teoria formale. In ambedue i casi, allora, è necessario fissare un agente idealizzato in grado di dimostrare teoremi e di dimostrarli correttamente. Solo a questo punto il secondo teorema d'incompletezza può essere applicato: dato l'insieme dei teoremi che è possibile dimostrare, chiuso per conseguenze logiche, esiste un enunciato (quello che esprime la coerenza del sistema iniziale) che è fuori da tale insieme. Entrano in questo caso in gioco difficili nozioni temporali, modali ed epistemologiche concernenti la possibilità di meccanizzare la totalità dei teoremi che un essere umano (o la comunità matematica umana) potrebbe produrre[9]. Horsten (2005, 18), rifacendosi ad Anderson (1993), prova a discutere esplicitamente il riferimento alla modalità nel contesto della dimostrabilità assoluta e della sua possibile meccanizzazione, concludendo che, nel caso di un agente idealizzato in grado di dimostrare teoremi, la dimensione modale (controfattuale) tende a eclissare la dimensione temporale, se le teniamo entrambe in considerazione. Inoltre, data la debolezza della nostra intuizione della dimensione controfattuale in riferimento alla dimostrabilità, Horsten si contenta di considerare solo un'infinita dimensione temporale: l'agente idealizzato in grado di dimostrare teoremi è supposto avere tempo infinito e spazio infinito con dimostrazioni strutturate come alberi finiti[10] (cfr. Leitgeb 2009, 265). Horsten e Leitgeb scelgono allora di condurre lo studio della dimostrabilità da parte di un agente idealizzato (ancora non definito in maniera sufficientemente chiara) nel contesto dell'aritmetica epistemica: un'estensione dell'aritmetica di Peano arricchita di un operatore primitivo denotante la nozione di dimostrabilità che si comporta come un operatore modale ed è conseguentemente assiomatizzato, secondo la linea di ricerca inaugurata da Myhill (1960) e ripresa da Shapiro (1985).

La maggior parte degli autori, comunque, sceglie di adottare lo spirito suggerito, pur con molte riserve[11], da Feferman (2006, 144) e da Shapiro (2016, 203), e di approcciare quindi le questioni filosofiche del meccanicismo (e dell'esistenza di problemi assolutamente insolubili) per così dire alla lettera, assumendo che le idealizzazioni siano fornite di

[9] O potrà produrre o avrebbe potuto produrre.

[10] Con gli assiomi come foglie dell'albero e il teorema come radice dell'albero avente i nodi più bassi ottenuti da quelli più alti tramite le regole d'inferenza.

[11] La posizione di Shapiro (2016, 205-206), condivisa da Feferman, è che non esiste ad oggi una tesi meccanicistica sufficientemente ben definita.

senso[12]. Con questo spirito, allora, possiamo abbozzare come segue una possibile dimostrazione della disgiunzione[13]. Si assuma che la mente umana possa essere simulata algoritmicamente. Ne segue che, per la tesi di Church-Turing, esiste una macchina di Turing in grado di simulare la mente umana nella sua capacità di produrre teoremi veri dell'aritmetica. Dall'isomorfismo teorie-macchine segue allora che la mente può essere simulata tramite un sistema formale di assiomi. Quindi, se la mente è coerente, il secondo teorema d'incompletezza si applica a tale sistema di assiomi. Dunque esiste un enunciato vero (quello che esprime la coerenza della mente) che il sistema stesso (la mente) non può dimostrare. Per l'assunto iniziale, allora, tale enunciato è umanamente (ossia assolutamente) indimostrabile[14].

Possiamo quindi esplicitamente identificare le principali assunzioni (matematiche e filosofiche) sottese alla dimostrazione della disgiunzione di Gödel:

1) Il secondo teorema d'incompletezza
2) L'isomorfismo teorie-macchine
3) La tesi di Church-Turing
4) La coerenza della mente umana

---

[12] Vedi anche Fano e Graziani (2011) per una discussione delle premesse filosofiche della disgiunzione e dei relativi problemi d'idealizzazione. L'articolo, inoltre contiene un nuovo argomento per la disgiunzione che migliora un precedente argomento di Chihara (1972).

[13] Una dimostrazione alternativa della disgiunzione che fa uso dei concetti di matematica oggettiva e soggettiva introdotti in precedenza, oltreché del teorema d'indefinibilità della verità di Tarski, è la seguente. Sia S l'insieme delle verità matematiche riconoscibili come tali dalla mente umana (matematica soggettiva), e sia V l'insieme delle verità matematiche (matematica oggettiva). Per definizione (o per ipotesi) si ha che $S \subseteq V$. Inoltre, per il teorema d'indefinibilità della verità di Tarski, V non è definibile nel linguaggio dell'aritmetica e quindi *a fortiori* V non è ricorsivamente enumerabile. Ne segue che, se $S = V$ allora neanche S è ricorsivamente enumerabile, e dunque il meccanicismo è falso. Segue allora che, se il meccanicismo è vero $S \neq V$, e in tal caso dunque esiste una proposizione $\phi \in V$ tale che $\phi \notin S$, cioè ϕ è vera, ma non umanamente dimostrabile (Shapiro 2016, 190-191). Vedi anche l'argomento modale delineato in Bruni (2006, 41-43).

[14] Segue inoltre da alcuni risultati dello stesso Gödel e dal lavoro congiunto di Putnam, Robinson e Matiyasevich sul decimo problema di Hilbert che l'enunciato che esprime la coerenza di un sistema formale è sempre (dimostrabilmente) equivalente a un enunciato nella forma

$$\forall x_1 \dots x_n P(x_1, \dots, x_n) \neq 0,$$

dove P è un polinomio diofanteo, ossia un polinomio a coefficienti e variabili intere (Feferman 2006, 139). In questo senso nell'enunciato della disgiunzione si parla di «*problemi* diofantei *assolutamente irrisolvibili*».

Il carattere metamatematico del primo e del secondo assunto, fa sì che essi siano al di là di ogni dubbio[15], mentre la tesi di Church-Turing (nonostante le sue giustificazioni siano di natura filosofica o empirica) è universalmente accettata dalla comunità degli esperti. Ne segue che colui il quale, accettando le succitate idealizzazioni riguardo la mente umana e la sua coerenza, volesse comunque mettere seriamente in dubbio la verità della disgiunzione dovrebbe cercare di mostrare che tale mente è incoerente o, al più, para-coerente. Hofstadter (1975), ad esempio, sostiene con forza la tesi dell'incoerenza sostanziale della mente umana, mentre Lucas (1970) si spende lungamente a difesa di un argomento a favore di tale coerenza.

3. Il primo disgiunto

In effetti, è proprio Lucas (1961, 112) a proclamare che «il meccanicismo è falso», fornendo un famoso argomento per il primo disgiunto basato sul secondo teorema d'incompletezza[16]. L'argomento di Lucas viene poi riformulato a più riprese da Penrose (1989 e 1994) che lo include in un ragionamento più generale volto a dischiudere la natura della coscienza umana anche in considerazione dei più recenti sviluppi della meccanica quantistica e della biologia neuronale. Dirigiamo il lettore a Lindström (2001) e a Chalmers (1995) per le formulazioni più compatte (e le critiche più cogenti) agli argomenti di Penrose. Ci concentreremo invece qui sulla versione di Lucas dell'argomento contro il meccanicismo. Si assuma per assurdo che la mente umana sia (o sia passibile di essere simulata da)[17] una

[15] 1) e 2) sono metateoremi, ossia teoremi che "parlano" di teorie matematiche e, che rispetto ad esse, sono dimostrati a partire da premesse molto più deboli: se non dubitiamo della matematica allora *a fortiori* non possiamo dubitare neanche della metamatematica.

[16] Già Turing (1950) considera «l'obiezione matematica» al meccanicismo, ossia il fatto che il secondo teorema d'incompletezza possa essere usato per l'escludere la possibilità di meccanizzare l'intelligenza. La risposta di Turing all'obiezione matematica è che, sebbene sia vero che ci sono limitazioni ai poteri delle macchine, non è stato però dimostrato che l'intelletto umano non sia esso stesso soggetto alle medesime limitazioni. Tuttavia, Turing si rende conto che tale sommaria risposta non è del tutto convincente e dunque propone ai sostenitori dell'obiezione matematica di procedere nel dibattito prendendo in considerazione il «gioco dell'imitazione» (descritto nel medesimo articolo e passato alla storia con il nome di "test di Turing") come base della discussione sulla possibilità di meccanizzare l'intelligenza (Turing 1950, 445).

[17] Si noti che v'è una distinzione importante fra le due tesi meccanicistiche: a) la mente umana è (o è simulabile attraverso) una macchina e b) è possibile costruire tale macchina.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

macchina di Turing coerente. Allora esiste un sistema di assiomi che descrive il funzionamento della mente umana. La coerenza di tale sistema di assiomi è una proposizione matematica che tale sistema (tale macchina) non può dimostrare (né asserire). Al contrario, la mente umana può asserire (e dimostrare, secondo Lucas) la propria coerenza. Segue l'assurdo.

Oltre alle ipotesi di cui sopra, tale argomento, si può far vedere, poggia su due assunzioni filosofiche ulteriori:

5) la conoscibilità della coerenza della mente umana.
6) la conoscibilità della macchina che dovrebbe rappresentare la mente umana.

Per una rassegna delle più famose critiche dell'argomento di Lucas si consulti Labinaz (2016) oltreché Fano e Graziani (2013). Le obiezioni più pertinenti all'argomento di Lucas sono basate sull'invalidità di uno o più degli assunti (4), (5) e (6). In effetti è possibile che la mente umana sia una macchina, ma non sia una macchina coerente. Oppure è possibile che la mente sia una macchina coerente ma che non sappia di essere tale. Infine è possibile che la mente umana sia una macchina coerente, che sa di esserlo, ma che non è in grado di stabilire con precisione la sua natura di macchina (ossia, intuitivamente, che sappia di essere *una* macchina, ma che non sappia *quale* macchina essa stessa sia).

In merito alla questione della coerenza della mente, come detto, Lucas sostiene che siamo coerenti e che di tale coerenza possiamo dare una dimostrazione informale basata sul fatto che non siamo disposti ad accettare qualsiasi enunciato come vero[18] e sull'impossibilità di sostenere una posizione di completo agnosticismo rispetto alla questione della verità in matematica[19]:

> [la coerenza della mente è] un presupposto necessario del pensiero […] Non è possibile [di ciò] alcuna dimostrazione formale: ma assumere il contrario è auto-contradditorio […] Non potrei convincermi di non essere coerente senza allo stesso tempo abbandonare la mia convinzione dell'esistenza di una

---

Si può dire che la letteratura, da Lucas in poi, si è concentrata piuttosto sulla prima tesi che sulla seconda.

[18] Mentre è proprietà di una teoria incoerente la capacità di dimostrare qualsiasi enunciato (vero o falso). Questo argomento per la coerenza della mente è però giudicato debole in Wang (1974, 319).

[19] Bruni (2005, 222-223) evidenzia infatti la dipendenza dell'argomento di Lucas da una particolare concezione (filosoficamente opinabile, secondo Bruni) della verità in matematica.

> differenza fra il vero e il falso […] Dunque, anche se la possibilità che io sia essenzialmente incoerente non può essere confutata con argomenti puramente formali […] questa è una posizione di assoluto nichilismo concettuale. (Lucas 1970, 163)

Tale argomento, secondo Lucas, costituisce il modo per confermare le ipotesi (4) e (5): siamo coerenti e possiamo sapere di esserlo. Se tuttavia non accettiamo la possibilità di servirci di argomenti informali per dimostrare la coerenza della mente, allora non possiamo accettare neppure l'argomento di Lucas contro il meccanicismo. Infatti se (4) è falsa, allora il meccanicismo potrebbe essere vero in quanto la mente potrebbe essere una macchina incoerente. In tal caso, allora, non esisterebbe un enunciato indimostrabile per tale macchina perché il secondo teorema d'incompletezza non vi si applicherebbe affatto (e anzi tale macchina sarebbe in grado di dimostrare tutte le proposizioni, anche quelle false!). Se invece 4) fosse vera, ma 5) falsa allora non vi sarebbe modo per la mente di sapere di essere coerente: la mente in tal caso potrebbe essere una macchina coerente che non sa di esser tale, come ogni altra macchina coerente a cui, per definizione, si può applicare il secondo teorema d'incompletezza.

Come già accennato, inoltre, l'argomento di Lucas non esclude il fatto che la mente possa essere una macchina, ma che non sia umanamente possibile sapere *quale* macchina essa sia. Tale obiezione, originariamente posta da Benacerraf (1967), e basata sul rifiuto dell'ipotesi 6), costituisce forse il colpo più forte inferto agli argomenti anti-meccanicistici fondati sull'incompletezza. Un interessante filone formale di ricerca (ancora poco battuto) si è infatti sviluppato intorno all'osservazione di Benacerraf. In particolare, gli studi di Reinhardt (1986) e di Carlson (2000) nel contesto della succitata aritmetica epistemica, pongono in luce l'esistenza di macchine di Turing coerenti che, intuitivamente, sanno di essere una qualche macchina di Turing coerente ma non sanno con esattezza *quale* macchina di Turing esse stesse sono. Questi studi, si noti bene, escludono la possibilità che argomenti basati sui teoremi d'incompletezza possano essere usati per negare il meccanicismo, a meno di non postulare da parte della mente umana una totale e (forse inverosimile) auto-conoscenza: l'ipotesi 6), appunto[20].

[20] Vedi anche, su questa direzione di ricerca, Alexander (2014) il quale mostra che, in generale, una macchina corretta (cioè una macchina in grado di dimostrare solo teoremi veri, condizione necessaria per la coerenza) può conoscere esattamente il suo proprio programma, ma non può sapere allo stesso tempo di essere corretta. Aldini, Fano e Graziani (2016), mostrano invece che, almeno per particolari input iniziali, ci sono macchine corrette in grado di conoscere il proprio programma e contemporaneamente la propria correttezza.

Esiste comunque un dibattuto contro-argomento anche per quel meccanicista che decidesse di accettare tutte le ipotesi sottostanti all'argomento di Lucas. Il meccanicista in tal caso, potrebbe ancora controbattere a Lucas che, sebbene ogni data macchina M non può asserire l'enunciato ϕ che esprime la sua coerenza, esiste sempre un'altra macchina M_1 capace di asserire ϕ: è sufficiente "aggiungere" ϕ agli assiomi di M.[21] Tuttavia in questo caso, per il secondo teorema d'incompletezza, esisterebbe un nuovo enunciato ϕ_1 che esprime la coerenza di M_1 e che M_1 non sarebbe comunque in grado di asserire. Ma allora il meccanicista potrebbe di nuovo allo stesso modo concepire un'altra macchina M_2 capace di asserire ϕ_1. In tal caso, però, sempre per il secondo teorema d'incompletezza, esisterebbe comunque un nuovo enunciato ϕ_2 che esprime la coerenza di M_2 e che M_2 non può asserire, e così via all'infinito. Nel caso in cui accettiamo tutte le ipotesi di Lucas, si configura allora quella che Benacerraf ha chiamato una vera e propria «partita di tennis» fra Lucas e un ipotetico meccanicista che accetti le sue ipotesi: data una qualsiasi macchina, Lucas può "gödelizzare" (ossia asserire un enunciato indimostrabile per tale macchina) e quindi pare poter asserire più verità aritmetiche di ogni macchina data; al contrario però esiste sempre una macchina più potente capace di superare le limitazioni della precedente[22]. Neanche un "salto nel transfinito" può aiutare a risolvere il gioco in favore di un contendente o dell'altro. In effetti si può costruire, tramite opportuni artifici di notazione ordinale, una macchina definita come

$$M_\omega \coloneqq \bigcup_{n<\omega} M_n,$$

ossia una macchina che ingloba tutte le precedenti ed è dunque capace di asserire tutte le formule di Gödel $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ Ma questa macchina è ancora incompleta: esiste un'altra formula ϕ_ω che M_ω non può dimostrare, e dunque la partita di tennis fra Lucas e il meccanicista può continuare

[21] Come è stato notato da Putnam e Benacerraf, infatti, Lucas non può dimostrare formalmente la coerenza di una qualsiasi macchina, ma solo fornire per essa un argomento informale. Tale argomento, dal punto di vista formale, si riduce all'assunzione dell'enunciato che esprime la coerenza. Ma anche una macchina può assumere un qualsiasi enunciato, semplicemente aggiungendolo ai propri assiomi.

[22] Vedi Turing (1950, 445): «Possono esistere uomini più intelligenti di ogni data macchina, e tuttavia possono esistere altre machine ancora più intelligenti, e così via»

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

anche oltre il primo ordinale infinito[23]. Hofstadter (1979, 475) in merito sostiene, sulla base di un teorema dell'analisi ordinale di Church e Kleene[24], che, a un certo punto nella catena degli ordinali, Lucas sicuramente avrà la peggio sul meccanicista[25]. Lucas (1996, 111), invece, argomenta a partire dal medesimo teorema per mostrare che, al contrario, il meccanicista avrà la peggio. Più di recente, e con tutta la sua autorevolezza, Shapiro (2016, 200), criticando sia Lucas sia Hostadter, sostiene che le tecniche dell'analisi ordinale non sono di alcun aiuto per stabilire la verità o la falsità del meccanicismo.

Si noti infine che Lucas – sostanzialmente solo nel tentativo di confutare il meccanicismo con argomenti puramente matematici o filosofici[26] – gradualmente recepisce le critiche mossegli negli anni e alleggerisce la sua posizione originaria. Lucas (1996, 105) non sostiene più di poter confutare il meccanicismo *tout court*, ma reputa di poter fornire un argomento capace di confutare ogni possibile istanza particolare della tesi meccanicistica, ossia ogni possibile macchina che un ipotetico meccanicista[27] indichi come il modello della mente umana. L'argomento di Lucas, allora, nell'accettazione delle sue ipotesi, costituirebbe non una dimostrazione dell'impossibilità di meccanizzare la mente umana, ma uno schema di dimostrazione per ogni possibilità effettiva di meccanizzare il ragionamento umano: ogniqualvolta un meccanicista sosterrà l'ipotesi che una certa macchina coerente è quella che dovrebbe costituire il modello meccanico della mente umana, allora il secondo teorema d'incompletezza si potrà applicare a tale macchina, così confutando l'ipotesi iniziale del meccanicista.

---

[23] Dal livello $\omega + 1$ in poi, tuttavia, entrano in gioco difficili problemi di notazione ordinale e d'intensionalità delle teorie aritmetiche considerate. Feferman (1962) costituisce la guida indiscussa a tali problemi, a cui Franzen (2004) si può considerare un'introduzione.
[24] Vedi Rogers (1967, 206-207).
[25] Vedi anche l'esposizione informale in Berto (2008, 214-218).
[26] Vedi però Galvan (2004), che critica l'argomento di Lucas, ma fornisce una parziale difesa di alcuni tratti degli argomenti anti-meccanicistici basati sui teoremi d'incompletezza: «Allo stato attuale della ricerca non è possibile pronunciarsi con un grado sufficiente di certezza sulla attendibilità di questo o quest'altro modello globale della mente. Alla luce, poi, della riflessione metamatematica, non ci sono ragioni sufficienti per ritenere giustificato, neppure a lungo termine, un modello computazionale della mente (nel suo complesso) fondato sulla analogia tra mente e programma di funzionamento (sistema formale) del cervello. Anzi le difficoltà messe in luce da una corretta considerazione dei teoremi di limitazione sembrano puntare in direzioni diverse» (Galvan 2004, 171-172).
[27] Che accetti, si noti bene, tutte le ipotesi alla base dell'argomento di Lucas.

4. Il secondo disgiunto

In merito alla questione dell'esistenza di problemi assolutamente insolubili, la letteratura è poco generosa e non esiste neanche una definizione condivisa di dimostrabilità assoluta o di dimostrabilità intuitiva[28]. Si è dunque tentato, come detto, a partire da una proposta dello stesso Gödel ripresa da Myhill (1960) – e indipendentemente da Shapiro (1985) – di studiare le proprietà della dimostrabilità assoluta (e, più in generale, della conoscibilità assoluta) delle proposizioni matematiche attraverso una teoria dell'aritmetica arricchita di un operatore modale atomico di dimostrabilità, opportunamente assiomatizzato. Su questa linea sono notevoli gli interventi di Tharp e Fitch, che tentano due argomenti sintattici relativamente semplici per mostrare opposte conclusioni: l'uno, a partire da ipotesi moderatamente deboli, l'inesistenza di proposizioni indimostrabili e l'altro, a partire da ipotesi ancora più deboli, l'esistenza di enunciati assolutamente inconoscibili (o indimostrabili). L'argomento di Tharp, ricostruibile da Wang (1989, 147) e da Reinhardt (1986, 433-434), risente però della non completa plausibilità di una delle ipotesi alla base del suo ragionamento: che sia indimostrabile l'indimostrabilità di ogni proposizione vera[29]. D'altra parte neanche la proposta di Fitch (1963) è del tutto soddisfacente. In questo caso infatti, la proposizione indimostrabile di cui Fitch mostrerebbe l'esistenza deve necessariamente contenere il succitato operatore modale, ed è dunque una proposizione solo semi-matematica, non un enunciato aritmetico come nella disgiunzione di Gödel[30].

---

[28] Una direzione di ricerca rilevante in questo senso è quella della "filosofia matematica" di Leitgeb (2013) e Horsten (2014), che riprendono la nozione di "rigore informale" espressa in Kreisel (1972). Nella stessa direzione vedi anche Antonutti-Marfori (2011), che, in polemica con la tesi che ogni dimostrazione per essere tale deve essere completamente formalizzabile, sostiene la necessità di analizzare filosoficamente il concetto di dimostrabilità e di rigore informale quali essi si osservano nella pratica ordinaria dei matematici.

[29] Se B è l'operatore che esprime la dimostrabilità, allora l'argomento di Tharp si basa sull'assunto

$$\forall p\ (p \rightarrow \neg B\ \neg Bp),$$

per ogni p appartenente al linguaggio dell'aritmetica arricchito del succitato operatore modale.

[30] Se K è l'operatore che esprime la conoscenza, allora il testimone addotto da Fitch come proposizione inconoscibile è della forma

$$p\ \wedge \neg Kp.$$

Un altro tentativo non del tutto soddisfacente è quello di Feferman e Solovay (1990) che evidenziano l'esistenza di enunciati indecidibili dal punto di vista pratico, ossia di enunciati decidibili *a priori*, ma troppo complessi per essere decisi in un tempo ragionevole da un essere umano o da un calcolatore[31]. Boolos (1982) mostra invece che ci sono enunciati aritmetici veri "estremamente indecidibili", ossia enunciati indecidibili completamente caratterizzati (all'interno dell'aritmetica di Peano) da proprietà aritmetico-modali possedute anche da tutti gli altri enunciati dell'aritmetica di Peano e da essi dunque indistinguibili (all'interno dell'aritmetica di Peano). Nonostante il nome suggestivo, Boolos non dimostra che gli enunciati estremamente indecidibili sono indimostrabili in senso assoluto, ma solo che lo sono all'interno dell'aritmetica di Peano.

Del tutto differente è invece l'approccio di Williamson (2016), che avanza un originale argomento metafisico per la conclusione che ogni enunciato vero è assolutamente dimostrabile basato sulla plausibilità dell'esistenza controfattuale di esseri capaci di dimostrarlo. Williamson, dopo aver argomentato la non-analiticità delle verità matematiche, sostiene che la conoscenza matematica non deriva solamente dalle dimostrazioni, ma, per quel che riguarda gli assiomi, anche dalla storia evolutiva degli esseri umani, per cui alcuni enunciati ci sembrano «primitivamente convincenti» in forza delle specifiche caratteristiche ereditarie del nostro cervello (Williamson 2016, 246). Ne segue che, dato un qualsiasi enunciato vero ϕ, è plausibile ritenere che potrebbero evolversi creature capaci di trovare ϕ primitivamente convincente e che, dato che ϕ sarebbe dimostrabile da tali creature[32], allora ne sarebbe stabilita la dimostrabilità in senso assoluto. Se accettiamo che ogni enunciato aritmetico sia vero o falso e *tertium non datur*, allora, sostiene Williamson, ogni enunciato aritmetico è assolutamente dimostrabile (o refutabile)[33].

---

[31] Ad esempio l'enunciato "il valore della $10^{10^{10^{100}}}$-esima cifra decimale di π è 7" può, in linea di principio, essere verificato o falsificato da un semplice procedimento meccanico. In pratica, però, la verifica di tale enunciato è del tutto al di fuori delle reali capacità di qualsiasi calcolatore.

[32] Ovviamente qui "dimostrabile" è usato nel senso allargato per cui se ϕ è un assioma allora ϕ è dimostrabile attraverso una dimostrazione di una riga che riconosce appunto che ϕ è un assioma.

[33] Si noti tuttavia che Williamson non crede che il suo argomento possa essere usato per sostenere posizioni anti-meccanicistiche: anche assumendo che le succitate creature siano possibili (futuri) esseri umani allora si ha che, per ogni verità aritmetica è possibile che esista un matematico che può (o potrà) dimostrarla. Questo è diverso dal dire che è possibile che ci sia un matematico che può (o potrà) dimostrare tutte le verità aritmetiche.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Ulteriori tentativi si dirigono infine nella direzione di considerare enunciati indipendenti della teoria degli insiemi (ad esempio l'*assioma di scelta*[34] o l'*ipotesi del continuo*[35]) come possibili candidati per essere enunciati assolutamente indecidibili. Come ben spiegato da Koellner (2006), questa è l'opinione di Gödel fino al 1946, quando esprime la speranza che si possa giungere a un teorema di completezza generalizzato per la teoria degli insiemi bassato sulla nozione di computabilità di Turing il quale stabilisca l'impossibilità di enunciati assolutamente indecidibili. Gödel giunge poi alla visione più matura espressa della conferenza del 1951. Koellner conclude che, nel contesto della teoria degli insiemi,

> non esiste ad oggi alcun argomento solido per mostrare che un dato enunciato è assolutamente indimostrabile. Non possediamo neanche un chiaro contesto entro il quale un tale argomento potrebbe procedere. (Koellner 2006, 188)

5. Conclusione

Ho presentato la disgiunzione di Gödel cercando di esplicitare gli assunti di carattere matematico e filosofico ad essa sottesi. L'enunciato stesso della disgiunzione è di natura strettamente filosofica in quanto comprende concetti informali come "mente", "macchina", o "problema assolutamente irrisolvibile" di cui la letteratura evidenzia la problematicità. Nonostante ciò, tutti gli autori considerati sono sostanzialmente concordi sulla validità della disgiunzione, sul fatto cioè che Gödel abbia stabilito al di là di ogni dubbio ragionevole la sua disgiunzione[36], la quale rivela come il problema della meccanizzabilità della mente umana e dell'esistenza di problemi umanamente insolubili sono inestricabilmente legati e mutuamente dipendenti. Alla luce della disgiunzione di Gödel e delle sue ipotesi, chi volesse argomentare in favore dell'esistenza di problemi umanamente insolubili, potrebbe allora legittimamente avvalersi di argomenti in favore della possibilità di meccanizzare la mente umana. Al contrario, chi che volesse argomentare contro la possibilità di meccanizzare la mente umana

In altre parole l'argomento di Williamson non stabilisce alcuna asimmetria fra le capacità degli esseri umani e le capacità delle macchine di Turing.

[34] Per un'introduzione all'assioma di scelta vedi (Bell 2015).

[35] Per un'introduzione all'ipotesi del continuo vedi (Koellner 2016) e (Ternullo 2017).

[36] E comunque «non meno conclusivamente di qualsiasi altro argomento filosofico» (Horsten e Welch 2016, 2).

potrebbe invece muovere dal fatto che tutti i problemi sono umanamente risolvibili.

> Se il mio risultato è preso insieme con l'atteggiamento razionalistico di Hilbert che non è stato refutato dal mio risultato, allora […] la mente non è meccanica. (Gödel in Wang 1996, 186-187)[37]

Bibliografia

Aldini A., 2014, «Teoria degli automi per linguaggi formali», *APhEx. Portale italiano di filosofia analitica*, IX, pp. 252-288. On-line: www.aphex.it/public/file/Content20141031_APhEx9,2014TemiTeoriadegliautomiAldini.pdf.

Aldini A., Fano V., e Graziani P., 2016, «Theory of Knowing Machines: Revisiting Gödel and the Mechanistic Thesis» in Gadducci F. e Tavosanis M. (a cura di), *History and Philosophy of Computing – Third International Conference, HaPoC 2015*, pp. 57-70.

Alexander S., 2014, «A Machine that Knows its own Code», *Studia Logica*, CII, pp. 567-576.

Anderson C.A., 1993, «Towards a Logic of *a priori* Knowledge», *Philosophical Topics*, XXI, 2, pp. 1-20.

Antonutti-Marfori M., 2010, «Informal Proofs and Informal Rigour», *Studia Logica*, XCVI, 2, pp. 261-272.

Bell J. L., 2015, «The Axiom of Choice», in Zalta E.N. (a cura di), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2015 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/axiom-choice/.

Benacerraf P., 1967, «God, the Devil and Gödel», *The Monist*, LI, pp. 9-32.

Berto F., 2008, *Tutti pazzi per Gödel!*, Bari, Laterza.

Boolos G., 1982, «Extremely Undecidable Sentences», *The Journal of Symbolic Logic*, XLVII, 1, pp. 191-196.

Bruni R., 2005, «Su alcune ricadute concettuali dei teoremi d'incompletezza di Kurt Gödel», *Annali del Dipartimento di Filosofia 2003-2004*, Firenze, Firenze University Press, pp. 209-226.

Bruni R., 2006, «Gödel, Turing, the Undecidability Results and the Nature of Human Mind», in Beckmann A. *et al.*, *Logical Approaches to*

[37] L'atteggiamento razionalistico di cui Gödel parla è lo stesso espresso dal famoso proclama di Hilbert (1902, 445): «non v'è *ignorabimus* in matematica», ossia non esiste problema matematico che, in linea di principio, l'umanità non possa risolvere.

Computational Barriers: Proceedings of the Second Conference on Computability in Europe, pp. 37-46.

Bruni R., 2013, «Kurt Gödel», *APhEx. Portale italiano di filosofia analitica*, VII, pp. 536-673. On-line: www.aphex.it/public/file/Content20141117_22.APhEx7,2013ProfiliGodelBruni.pdf.

Carlson T., 2000, «Knowledge, Machines and the Consistency of Reinhardt's Strong Mechanistic Thesis», *Annals of Pure and Applied Logic*, CV, pp. 51-82.

Cassou-Noguès P., 2008, *I demoni di Gödel*, Milano, Bruno Mondadori.

Chalmers, D. J., 1996, «Minds, Machines and Mathematics», *Psyche*, II, pp. 11-20.

Chihara C. S., 1972, «On Alleged Refutations of Mechanism Using Gödel's Incompleteness Results», *The Journal of Philosophy*, LXIX, pp. 507-526.

Fano V. e Graziani P., 2011, «Gödel and the Fundamental Incompleteness of Human Self-Knowledge» *Logic and Philosophy of Science*, IX, 1, pp. 263-274.

Fano V. e Graziani P., 2013, «Mechanical Intelligence and Gödelian Arguments» in Agazzi E. (a cura di), *The Legacy of A. M. Turing*, Milano, Franco Angeli, pp. 48-71.

Feferman S., 1962, «Transfinite Recursive Progressions of Axiomatic Theories», *Journal of Symbolic Logic*, XXVII, pp. 259-316.

Feferman S., 2006, «Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel's Dichotomy», *Philosophia Mathematica*, XIV, 2, pp. 134–152.

Feferman S. e Solovay R., 1990, «Introductory Note to 1972a» in Gödel K., 1990 *Collected Works, Volume II*, New York, Oxford University Press, pp. 281-304.

Fitch, F., 1963, «A Logical Analysis of Some Value Concepts», *Journal of Symbolic Logic*, I, pp. 204-217.

Franzen, T., 2004, *Inexhaustibility. A Non-Exhaustive Treatment: Lecture Notes in Logic XXVIII*, Wellesley, AK Peters.

Frixione, M. e Numerico, T., 2013, «Alan Matison Turing», *APhEx. Portale italiano di filosofia analitica*, VII, pp. 511-562. On-line: www.aphex.it/public/file/Content20141117_19.APhEx7,2013ProfiliTuringFrixione-Numerico.pdf.

Galvan S., 2004, «Gödel e il modello computazionale della mente», *Rivista di Filosofia Neo-Scolastica*, XCVI, 1, pp. 145-174.

Gandy R., 1988, «The Confluence of Ideas in 1936», in Henke R. (a cura di), *The Universal Turing Machine,* New York, Oxford University Press, pp. 55-111.

Gödel K., 1951, «Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications», in Gödel K., 1990 *Collected Works, Volume II,* New York, Oxford University Press, pp. 304-323

Gödel K., 1990 *Collected Works, Volume II,* S. Feferman *et al.* (a cura di), New York, Oxford University Press.

Gödel K., 1995, *Collected Works: Volume III,* S. Feferman *et al.* (a cura di), New York, Oxford University Press.

Hilbert D., 1902, «Mathematical Problems: Lecture Delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900», *Bullettin of the American Mathematical Society,* VIII, pp. 437-479.

Hofstadter D., 1975, *Gödel, Escher Bach,* New York, Basic Books.

Horsten L., 2005, «Remarks on the Content and Extension of the Notion of Provability», *Logique et Analyse,* XLVIII, 189/192, pp. 15-32.

Horsten L., 2013, «Mathematical Philosophy?» in Andersen H. et alii (a cura di), *The Philosophy of Science in a European Perspective,* IV, Springer, pp. 73-86.

Horsten L. e Welch P., 2016, *Gödel's Disjunction*, Oxford, Oxford University Press.

Labinaz P., 2016, «Introduzione» in Labinaz P. (a cura di), *J. R. Lucas Against Mechanism*, Milano, Mimesis.

Leitgeb H., 2009, «On Formal and Informal Provability» in Bueno O., Linnebo Ø, (a cura di), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Basingstoke, Palgrave Macmillan, pp. 263-299.

Leitgeb H., 2013, «Scientific Philosophy, Mathematical Philosophy, and All That», *Metaphilosophy*, XLIV, pp. 267-275.

Lindström P., 2001, «Penrose's new argument», *Journal of Philosophical Logic*, XXX, pp. 241-250.

Lucas J. R., 1961, «Minds, Machines and Gödel», *Philosophy,* XXXVI, pp. 112-137.

Lucas J. R., 1968, «Satan Stultified: A Rejoinder to Paul Benacerraf», *The Monist*, LII, pp. 145-158.

Lucas J. R., 1970, *The Freedom of the Will,* Oxford, Clarendon Press.

Lucas J. R., 1996, «Minds, Machines and Gödel: A Retrospect», in Millican P, Clarks A. (a cura di), *Machines and Thoughts: The Legacy of Alan Turing,* Oxford, Oxford University Press, pp. 103-124.

Myhill J., 1960, «Some Remarks on the Notion of Proof», *The Journal of Philosophy*, LVII, 14, pp. 461-471.

Koelnerr P., 2006, «On the Question of Absolute Undecidability», *Philosophia Mathematica*, XIV, pp. 153–188.

Koellner P., 2016, «The Continuum Hypothesis», in Zalta E.N. (a cura di), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/continuum-hypothesis/.

Kreisel G., 1972, «Informal Rigour and Completeness Proofs» in Lakatos I. (a cura di), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland, pp. 138-186.

Penrose R., 1989, *The Emperor's New Mind*, Oxford, Oxford University Press.

Penrose R., 1994, *Shadows of the Mind*, Oxford, Oxford University Press.

Reinhardt W. N., 1986, «Epistemic Theories and the Interpretation of Gödel's Incompleteness Theorems», *Journal of Philosophical Logic*, XV, pp. 427-474.

Rogers, H. (1967) *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, New York, McGraw-Hill.

Shapiro S., 1985, «Epistemic and Intuitionistic Arithmetic» in Shapiro S. (a cura di), *Intensional Mathematics*, Amsterdam, North Holland, pp. 11-46.

Shapiro S., 2016, «Idealization, Mechanism and Knowability» in Horsten L., Welch P. (a cura di), *Gödel's Disjunction*, Oxford, Oxford University Press, pp. 189-206.

Smith P., 2013, *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge, Cambridge University Press.

Smullyan R. M., 1992, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford, Oxford University Press.

Soare R. I., 2016, *Turing Computability: Theory and Applications*, New York, Springer-Verlag.

Ternullo C., 2017, «Ipotesi del continuo», *APhEx. Portale italiano di filosofia analitica*, XVI. On-line: www.aphex.it/public/file/Content20171027_APhEx16,2017IpotesiContinuoTernullo.pdf.

Turing A. M., 1939, «Systems of Logic based on Ordinals», *Proceedings of the London Mathematical Society*, XLV, pp. 161-228.

Turing A. M., 1950, «Computing Machinery and Intelligence», *Mind*, LIX, pp. 433-460.

Wang H., 1974, *From Mathematics to Philosophy*, London, Routledge and Kegan Paul.

Wang H., 1989, «Tharp and Conceptual Logic», *Synthese*, LXXXI, 2, pp. 141-152.

Wang H., 1996, *A Logical Journey*, Cambridge (MA), The MIT Press.

Williamson T., 2016, «Absolute Provability and Safe Knowledge of Axioms», in Horsten L., Welch P. (a cura di), *Gödel's Disjunction*, Oxford, Oxford University Press, pp. 243-253.
