

SULLA MISURA DELLE TENSIONI RESIDUE CON IL METODO DEL FORO: METODI DI CALCOLO PER LE TECNICHE SPERIMENTALI A CAMPO INTERO

A. Baldi^a, F. Bertolino^a, F. Ginesu^a

^a *Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Cagliari, Piazza d'Armi - 09123 Cagliari (CA), e-mail: baldi@iris.unica.it*

SOMMARIO

Il metodo del foro in combinazione con una rosetta estensimetrica, è una tecnica largamente utilizzata per la misura delle tensioni residue. Tuttavia il principio su cui esso si basa non è legato all'utilizzo di estensimetri che anzi sono soggetti a vari problemi (bassa sensibilità nella misura, alta sensibilità al posizionamento del foro etc.). Alcuni metodi di misura ottico-interferometrici, quali l'interferometria Moirè, l'interferometria Speckle, l'interferometria Olografica e lo Shearography, consentono di superare questi limiti, fornendo peraltro l'intero campo di spostamenti (o deformazioni) nella direzione di sensibilità. La quantità dei dati disponibili pone quindi il problema di un loro efficace utilizzo in modo che la loro intrinseca ridondanza permetta di massimizzare l'informazione ottenibile e la robustezza della misura.

In letteratura sono stati proposti vari approcci a tale problema, che differiscono per quantità di dati utilizzati, numero di misure necessarie ed algoritmo numerico. In questo lavoro, partendo da campi di tensione noti, vengono analizzati i vari metodi di calcolo in termini di accuratezza e resistenza ai disturbi al fine di individuare il più affidabile ed accurato.

ABSTRACT

The hole drilling technique is a well known experimental method for residual stress investigation. This technique is usually used in combination with electrical strain gages but there is no reason to enforce this choice and other approaches are possible. In particular some optical measurement techniques (grating interferometry, speckle interferometry, holographic interferometry, shearography) can be advantageously used.

Since all these optical techniques give a full field information, it becomes important to properly use their data to increase the robustness and reliability of the analysis. In this work, various well known approaches to this problem will be investigated using a known displacement field

as a reference. In this way it will be possible to discover the best performing algorithm in terms of robustness and reliability.

1. INTRODUZIONE

Il metodo del foro per la stima delle tensioni residue è una tecnica ben nota [1–6]. Nella sua versione “standard” consiste nel misurare le deformazioni conseguenti al rilascio della tensione, causato dalla realizzazione di un foro nel centro di una apposita rosetta. L’utilizzo di estensimetri è estremamente pratico, ma trova una serie di limitazioni nella dimensione finita degli elementi sensibili. Infatti la deformazione letta è in realtà l’integrale delle deformazioni sulla superficie coperta dallo strain gage, mentre è pressoché impossibile eseguire delle misure nelle vicinanze del bordo del foro, proprio nella zona dove i gradienti di deformazione sono più alti. La misura estensimetrica è inoltre particolarmente sensibile ad un posizionamento eccentrico della rosetta rispetto al foro di rilascio [7].

I metodi di misura a tutto campo, quali l’interferometria moirè, l’interferometria speckle, l’interferometria olografica e lo Shearography, consentono di superare questi limiti, fornendo inoltre l’intero campo di spostamenti o deformazioni nella direzione di sensibilità. La quantità dei dati disponibili, che eccede di gran lunga il minimo necessario di 3 valori di deformazione o spostamento, pone quindi il problema di un loro efficace utilizzo in modo che la loro intrinseca ridondanza permetta di ottimizzare l’informazione ottenibile e renda la misura più robusta.

In letteratura sono stati proposti vari approcci, che vanno dalla misura delle tre componenti di spostamento in un singolo punto (eventualmente ripetuta in punti diversi), alla misura di una sola componente, all’analisi di Fourier del campo di spostamenti radiali su di una circonferenza. In questo lavoro, partendo da campi di tensione noti relativi ai classici casi di foro passante e foro cieco, vengono analizzati i risultati di vari metodi di calcolo, in termini di accuratezza e resistenza ai disturbi. Viene inoltre preso in considerazione un algoritmo originale basato sull’interpolazione ai minimi quadrati di un singolo campo di spostamento.

Per la valutazione dei diversi algoritmi rispetto alla precisione e all’affidabilità dei loro risultati sono utilizzati dati sintetici, con tensioni residue note, che vengono perturbati tramite l’aggiunta di vari livelli di rumore.

Lo scopo finale del lavoro è la individuazione della combinazione ottimale tra tecnica sperimentale e metodologia di analisi per la misura delle tensioni residue con metodo ottici.

2. ANALISI DI ALCUNI ALGORITMI PER LA STIMA DELLE TENSIONI RESIDUE CON IL METODO DEL FORO

2.1 Algoritmo di Nelson e McCrickerd (1986)

Per evitare alcune limitazioni associate all’uso delle rosette estensimetriche e dei reticoli per l’interferometria moirè, in [8] si propone l’interferometria olografica per la misura degli spostamenti relativi alla tecnica del foro. Le deformazioni radiali causate dal rilascio delle tensioni residue in seguito alla realizzazione del foro, nel caso di uno stato di sforzo biassiale, valgono:

$$\varepsilon_r = \sigma_1 [A + B \cos(2\alpha)] + \sigma_2 [A + B \cos(2\alpha + \pi/2)] \quad (1)$$

$$A = -\frac{1+\nu}{2E} \rho^2 \quad B = -\frac{1+\nu}{2E} \rho^2 \left[\left(\frac{4}{1+\nu} \right) - 3\rho^2 \right] \quad (2)$$

in cui ε_r indica la deformazione radiale, σ_1 e σ_2 sono le tensioni residue principali, α è l'angolo tra la direzione di ε_r e di σ_1 , ν è il coefficiente di Poisson, E è il modulo di Young e $\rho = r_0/r$ indica la distanza radiale normalizzata, rapporto tra il raggio del foro r_0 e la distanza radiale del punto in esame r .

L'equazione (1) mostra che la deformazione radiale è la stessa in punti diametralmente opposti rispetto al centro del foro ed alla stessa distanza radiale. In generale, poiché le incognite del problema bidimensionale sono tre (σ_x , σ_y , τ_{xy}), la conoscenza di tre spostamenti radiali in tre punti angularmente distinti,

$$u_r = \frac{r_0(1+\nu)}{2E} \left\{ \left[(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{4}{1+\nu} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\alpha) \right] \rho - (\sigma_1 - \sigma_2) \rho^3 \cos(2\alpha) \right\} \quad (3)$$

consente di determinare lo stato di sforzo residuo, analogamente al caso delle rosette estensimetriche.

Utilizzando l'interferometria olografica, la relazione che lega le variazioni di fase agli spostamenti puntuali è la seguente [9]:

$$\phi = \vec{K} \cdot \vec{u} = K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z \quad (4)$$

Il vettore di sensibilità \vec{K} dipende dal vettore di illuminazione \vec{K}_1 e da quello di osservazione \vec{K}_2 secondo la relazione $\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1$ dove $|\vec{K}_1| = |\vec{K}_2| = 2\pi/\lambda$, con λ lunghezza d'onda della luce laser.

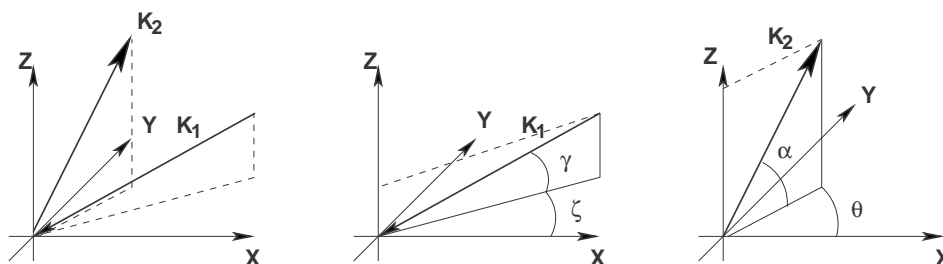


Fig. 1. Vettori di illuminazione e di osservazione.

Si indichi con γ l'angolo che il fascio di illuminazione \vec{K}_1 forma con il piano del provino e con ζ l'angolo che forma con l'asse di riferimento X, orizzontale e passante per il centro del foro (fig. 1). Il fascio di illuminazione (collimato) ed il fascio di osservazione \vec{K}_2 (variabile da punto a punto) si possono esprimere come:

$$\vec{K}_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma)\cos(\zeta) \\ \cos(\gamma)\sin(\zeta) \\ \sin(\gamma) \end{Bmatrix} \quad \vec{K}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{Bmatrix} -\sin(\alpha)\cos(\theta) \\ -\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \cos(\alpha) \end{Bmatrix}$$

in cui $\alpha = \arctan(r/z_{oss})$, dove z_{oss} rappresenta la distanza in direzione Z dell'osservatore dal centro del foro ed r la distanza del punto dall'asse ottico della CCD. Di conseguenza il vettore di sensibilità \vec{K} , variabile da punto a punto dell'oggetto, si può esprimere come segue:

$$\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{Bmatrix} \cos(\gamma)\cos(\zeta) - \sin(\alpha)\cos(\theta) \\ \cos(\gamma)\sin(\zeta) - \sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Nel loro articolo Nelson e McCrickerd [8], così come Nelson e Makino [9], considerano l'osservatore posto a grande distanza dall'oggetto, in modo da rendere il vettore di sensibilità unico per tutta l'immagine e semplificare l'algoritmo.

Il quadro di frange è sensibile solo alla proiezione del vettore degli spostamenti sul vettore di sensibilità, quindi alla formazione delle frange di interferenza concorrono sia gli spostamenti nel piano che quelli fuori dal piano. La strategia suggerita in [8] comporta la registrazione di tre interferogrammi, ottenuti variando il vettore di illuminazione in modo tale da registrare la componente degli spostamenti nel piano in tre diverse direzioni radiali. Su ognuno degli interferogrammi così acquisiti l'algoritmo proposto consiste nel sottrarre la variazione di fase registrata in punti diametralmente opposti rispetto al centro del foro, ma collocati alla stessa distanza radiale. In tali punti, infatti, gli spostamenti fuori dal piano sono identici e quindi il loro effetto si annulla, mentre quelli radiali hanno lo stesso valore assoluto, ma versi opposti, e quindi il loro effetto si somma.

Si supponga quindi di disporre dello spostamento radiale u_r in 3 direzioni diverse β , $\beta+\pi/4$, $\beta+\pi/2$, con β incognito. Sia Δu_i la differenza di spostamento radiale calcolata lungo la direzione i^{ma} in corrispondenza del raggio R_a ed R_b . Sostituendo in (3) e risolvendo per σ_1 , σ_2 e β si ottiene

$$\begin{aligned} \tan(2\beta) &= \frac{\Delta u_3 - 2\Delta u_2 + \Delta u_1}{\Delta u_3 - \Delta u_1} \\ (\sigma_1 + \sigma_2) &= \frac{E(\Delta u_3 + \Delta u_1)}{(1+\nu)R_0^2 \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)} \\ (\sigma_1 - \sigma_2) &= \frac{E(\Delta u_3 - \Delta u_1)}{(1+\nu)R_0^2 \cos(2\beta) \left[\left(\frac{4}{1+\nu} \right) \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) - R_0^2 \left(\frac{1}{R_a^3} - \frac{1}{R_b^3} \right) \right]} \end{aligned} \quad (6)$$

β risulta quindi essere l'orientamento delle tensioni principali relativamente alla direzione della prima direzione di acquisizione.

Questa tecnica ha lo svantaggio di richiedere l'acquisizione di tre interferogrammi ed inoltre non è in grado di sfruttare tutta l'informazione disponibile, ma solo quella contenuta lungo i tre raggi che partono dal centro del foro in direzione della proiezione sul provino dei tre vettori di illuminazione collimata.

2.2. Algoritmo di Makino e Nelson (1994)

In questo articolo [9,11] gli autori propongono un algoritmo che richiede un solo interferogramma e che consente di ottenere buoni risultati anche nel caso in cui la direzione del vettore di illuminazione non coincida con la direzione dello sforzo principali massimo. Inoltre tutti i punti dell'immagine sono utilizzabili per la misura delle tensioni residue.

Un punto $P(r, \theta)$ appartenente alla superficie di un provino di piccolo spessore t in cui è presente uno stato piano di sforzi residui subisce, in seguito alla realizzazione di un foro passante di raggio r_0 , uno spostamento (u_r, u_θ, u_z) che si può esprimere come segue:

$$\begin{aligned}
u_r &= A(\sigma_x + \sigma_y) + B[(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\theta) + 2\tau_{xy}\sin(2\theta)] \\
u_\theta &= C[(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\theta) - 2\tau_{xy}\cos(2\theta)] \\
u_z &= F(\sigma_x + \sigma_y) + G[(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\theta) + 2\tau_{xy}\sin(2\theta)]
\end{aligned} \tag{7}$$

in cui, nel caso di foro passante è

$$A = \frac{r_0}{2E}(1+\nu)\rho \quad B = \frac{r_0}{2E}[4\rho - (1+\nu)\rho^3] \quad C = -\frac{r_0}{2E}[2(1+\nu)\rho + (1+\nu)\rho^2] \tag{8}$$

$$F = 0 \quad G = \frac{\nu t}{E}\rho^2$$

La relazione che lega gli spostamenti espressi in coordinate cilindriche a quelli espressi in coordinate cartesiane è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Sostituendo la (9) nella (4) si può far vedere che, nel caso della interferometria olografica, la variazione di fase relativa a due punti $P_1(r, \theta)$ e $P_2(r, \theta + \pi)$ dipende sia dall'angolo α che dagli spostamenti fuori dal piano; se però la CCD si trova a distanza opportuna dal provino, il valore di α può considerarsi costante su tutta l'immagine e le espressioni si semplificano notevolmente.

Gli spostamenti (u_r, u_θ, u_z) si possono esprimere in funzione delle tensioni residue in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\cos(2\theta) & A - B\cos(2\theta) & 2B\sin(2\theta) \\ C\sin(2\theta) & -C\sin(2\theta) & -2C\cos(2\theta) \\ F + G\cos(2\theta) & F - G\cos(2\theta) & 2G\sin(2\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Per calcolare le tensioni residue si procede quindi nel modo seguente [9]:

- si realizza un solo interferogramma e si valuta la variazione di fase in seguito alla realizzazione del foro;
- si scelgono tre punti posti alla stessa distanza radiale (per esempio $r = 1.5 r_0$) ma disposti secondo tre diverse direzioni (per esempio $-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$);
- ad ogni punto viene associato un punto diametralmente opposto;
- per ogni coppia di punti si calcola la differenza di fase;
- Si risolve il seguente sistema di tre equazioni e tre incognite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\phi_1(r, \theta_1) - \phi_1(r, \theta_1 + \pi)]/2 \\ [\phi_2(r, \theta_2) - \phi_2(r, \theta_2 + \pi)]/2 \\ [\phi_3(r, \theta_3) - \phi_3(r, \theta_3 + \pi)]/2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

in cui i coefficienti della matrice valgono:

$$\begin{aligned}
D_{i1} &= \frac{2\pi}{\lambda} \{C_{11}[\cos\gamma\cos\zeta\cos(\theta_i) + \cos\gamma\sin\zeta\sin(\theta_i)] - C_{21}[\cos\gamma\cos\zeta\sin(\theta_i) - \cos\gamma\sin\zeta\cos(\theta_i)]\} \\
D_{i2} &= \frac{2\pi}{\lambda} \{C_{12}[\cos\gamma\cos\zeta\cos(\theta_i) + \cos\gamma\sin\zeta\sin(\theta_i)] - C_{22}[\cos\gamma\cos\zeta\sin(\theta_i) - \cos\gamma\sin\zeta\cos(\theta_i)]\} \\
D_{i3} &= \frac{2\pi}{\lambda} \{C_{13}[\cos\gamma\cos\zeta\cos(\theta_i) + \cos\gamma\sin\zeta\sin(\theta_i)] - C_{23}[\cos\gamma\cos\zeta\sin(\theta_i) - \cos\gamma\sin\zeta\cos(\theta_i)]\}
\end{aligned} \tag{12}$$

- f) Si ripete più volte la stessa procedura, scegliendo di volta in volta altri punti, per avere una stima più attendibile delle tensioni residue.

2.3 Algoritmo di Wu, Lu e Han (1998)

Per la misura degli spostamenti nel piano, numerosi autori [12,13] hanno fatto ricorso all'interferometria moiré che in genere fornisce immagini con un rapporto segnale/rumore migliore di quelle prodotte con l'interferometria olografica o con l'interferometria speckle. Lo svantaggio consiste evidentemente nella necessità di incollare i reticoli sulla superficie dei provini e nei rischi legati alla delaminazione degli stessi in prossimità del foro.

Nel loro metodo di calcolo Wu, Lu e Han [14] utilizzano solo la prima riga del sistema (10) (cioè la relazione che lega gli spostamenti radiali alle tensioni residue), applicandola in tre punti distinti, angularmente distanti.

$$\begin{Bmatrix} u_r(r, \theta_1) \\ u_r(r, \theta_2) \\ u_r(r, \theta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B \cos(2\theta_1) & A - B \cos(2\theta_1) & 2B \sin(2\theta_1) \\ A + B \cos(2\theta_2) & A - B \cos(2\theta_2) & 2B \sin(2\theta_2) \\ A + B \cos(2\theta_3) & A - B \cos(2\theta_3) & 2B \sin(2\theta_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

dove, per ridurre il numero di condizione della matrice e rendere il sistema poco sensibile agli errori sperimentali, gli autori utilizzano $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = +45^\circ$.

Ovviamente il calcolo degli spostamenti radiali può essere condotto in funzione degli spostamenti u_x , u_y utilizzando la trasformazione inversa della (9). Il metodo richiede quindi l'acquisizione di due campi di spostamento.

2.4 Algoritmo di Wu e Lu (2000)

Mentre in [14] si utilizzano solo due immagini, relative agli spostamenti nel piano (rispettivamente in direzione orizzontale e verticale), in [15] si propone l'utilizzo anche di una terza immagine realizzata per mezzo dell'interferometro di Twyman/Green relativa al campo di spostamenti fuori dal piano.

Mentre in [14] gli autori usavano solo la prima equazione della (10) e per risolvere il sistema (13) avevano bisogno di tre misure di spostamento in altrettanti punti, in [15] gli autori utilizzano l'intero campo di spostamento in un singolo punto di misura. Gli autori affermano che questo sistema è sempre ben condizionato.

2.5 Algoritmo di Focht e Schiffner (2002) [16]

In questo lavoro, il campo di spostamenti (7) viene riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u_x &= a_{x1} \cos \theta + b_{x1} \sin \theta + a_{x3} \cos(3\theta) + b_{x3} \sin(3\theta) \\ u_y &= a_{y1} \cos \theta + b_{y1} \sin \theta + a_{y3} \cos(3\theta) + b_{y3} \sin(3\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

dove

$$\begin{aligned} a_{x1} &= c_1 \sigma_x + c_3 \sigma_y & b_{x1} &= (c_1 - c_3) \tau_{xy} & a_{x3} &= c_2 (\sigma_x - \sigma_y) & b_{x3} &= 2c_2 \tau_{xy} \\ a_{y1} &= (c_1 - c_3) \tau_{xy} & b_{y1} &= c_3 \sigma_x + c_1 \sigma_y & a_{y3} &= -2c_2 \tau_{xy} & b_{y3} &= c_2 (\sigma_x - \sigma_y) \\ c_1 &= 4\rho r_0 & c_2 &= \rho(1 - \rho^2)(1 + \nu)r_0 & c_3 &= -2\rho(1 - \nu)r_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Osservando che la (14) è, a parte il termine costante, un'espansione in serie di Fourier, gli autori propongono di campionare il campo di spostamento u_x (od u_y) lungo i punti di una circonferenza ad intervalli regolari. Il vettore così generato può essere approssimato utilizzando solo il primo ed il terzo termine della trasformata di Fourier, i cui elementi risultano

quindi essere i termini $a_{x1} \dots b_{x3}$ ($a_{y1} \dots b_{y3}$). Noti questi ultimi, utilizzando le (15) è relativamente facile calcolare lo stato di sollecitazione:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{c_1 + c_3} \left(a_{x1}^f + \frac{c_3}{c_2} a_{x3}^f \right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{c_1 + c_3} \left(a_{x1}^f - \frac{c_1}{c_2} a_{x3}^f \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{b_{x1}^f}{c_1 - c_3} + \frac{b_{x3}^f}{2c_2} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

2.6 Algoritmo di Baldi (2003)

Si consideri l'espressione analitica degli spostamenti in coordinate cilindriche (7). Questa, tramite la (9) può essere scritta in coordinate rettangolari ottenendo un sistema simile a (13) in cui ad esempio è

$$\begin{aligned}u_x &= \cos \theta [A - C + (B + C) \cos(2\theta)] \sigma_x + \\ &\cos \theta [A + C - (B + C) \cos(2\theta)] \sigma_y + \\ &\sin \theta [B + (B + C) \cos(2\theta)] 2\tau_{xy}\end{aligned}\quad (17)$$

poiché, dato un generico versore di sensibilità \vec{K} , gli spostamenti registrati valgono $v = \vec{K} \cdot \vec{u} = K_x u_x + K_y u_y + K_z u_z$, l'errore ε tra i dati sperimentali v_i e la (17) risulta pari a

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N [w_i (K_x u_x^{(i)} + K_y u_y^{(i)} + K_z u_z^{(i)} + v_i)]^2 \quad (18)$$

dove w_i è un eventuale peso e la sommatoria si estende su tutti gli N punti sperimentali. Se si indicano con a_{ij} gli elementi della matrice di cui (17) è la prima riga, la (18) diventa

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \left\{ w_i \left[(K_x a_{11}^{(i)} + K_y a_{21}^{(i)} + K_z a_{31}^{(i)}) \sigma_x + (K_x a_{12}^{(i)} + \dots) \sigma_y + (\dots) \tau_{xy} - v_i \right] \right\}^2 \quad (19)$$

per cui, derivando la (19) rispetto ai parametri σ_x , σ_y e τ_{xy} si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_x} &= 2 \sum \sqrt{\varepsilon_i} (K_x a_{11}^{(i)} + K_y a_{21}^{(i)} + K_z a_{31}^{(i)}) = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_y} &= 2 \sum \sqrt{\varepsilon_i} (K_x a_{12}^{(i)} + K_y a_{22}^{(i)} + K_z a_{32}^{(i)}) = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau_{xy}} &= 2 \sum \sqrt{\varepsilon_i} (K_x a_{13}^{(i)} + K_y a_{23}^{(i)} + K_z a_{33}^{(i)}) = 0\end{aligned}\quad (20)$$

che risolto, fornisce direttamente i valori cercati.

2.7 Implementazione

Alcuni degli algoritmi descritti nel paragrafo precedente (Nelson e McCrickerd, Wu e Lu 2 e 3d, Makino e Nelson), non hanno un approccio realmente globale: gli autori forniscono la formula per un calcolo puntuale e solo talvolta fanno notare che potrebbe essere opportuno mediare il risultato su più punti. A livello di implementazione, in tutti questi casi si è proceduto ad un calcolo mediato lungo una o più circonferenze. In particolare,

- § Per l'algoritmo di Nelson e McCrickerd si sono applicate le (6) lungo una circonferenza di raggio $r = 1.5 r_0$, con un passo angolare di 5° ed un $dr = 0.1 r_0$. Identici parametri sono stati utilizzati per l'algoritmo di Makino e Nelson e di Wu, Lu e Han.
- § Per l'algoritmo di Wu e Lu (3d) e l'algoritmo ai minimi quadrati sono stati utilizzati tutti i punti disponibili.
- § Per l'algoritmo di Focht e Schiffner si sono campionati 1024 punti lungo una circonferenze di raggio $r = 1.75 r_0$.

Il numero di condizione di tutti gli algoritmi che prevedono un'inversione matriciale è stato monitorato in modo da eliminare i punti in cui il sistema è mal condizionato; allo stesso modo l'algoritmo ai minimi quadrati è stato implementato utilizzando la decomposizione al valor singolare per la soluzione della (19).

I campi di spostamento sono stati generati tramite le (7) a partire da coefficienti di calibrazione stimati per via analitica (8) o tramite calcoli agli elementi finiti: si è generata una mesh triangolare in modo da ricoprire l'intera area di interesse e si sono calcolati gli spostamenti in corrispondenza dei nodi. Per gli algoritmi che richiedono lo spostamento in punti all'interno degli elementi (tipico esempio è quello di Focht/Schiffner) si sono stimati i valori tramite interpolazione lineare (secondo il suggerimento degli autori).

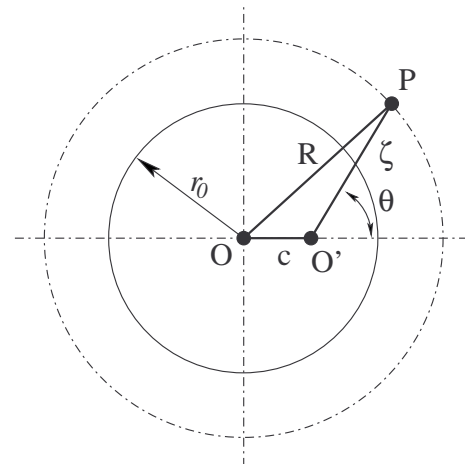


Fig. 2

3 ANALISI DI SENSIBILITÀ

Per avere un'idea dell'importanza relativa dei vari parametri sull'errore commesso è stata condotta una analisi di sensibilità dei vari algoritmi. Sono stati presi in considerazione 9 parametri: il modulo di Young E , il coefficiente di Poisson ν , il raggio del foro r_0 , il raggio nominale ζ , una eventuale eccentricità del foro c , lo spessore del provino t e gli spostamenti u ,

v e w . Raggio nominale ζ ed eccentricità c concorrono entrambi alla definizione dell'errore sul raggio effettivo; se infatti (fig. 2) il centro del foro non è in O' , come stimato, ma in O , il raggio effettivo risulterà essere $r = \sqrt{c^2 + \zeta^2 - 2c\zeta \cos(\pi - \theta)}$. Ricavato per via analitica le formule risolutive dei vari metodi, ne sono state fatte le derivate e se ne è calcolata l'influenza: detto S l'errore cumulativo

$$S = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i \right)^2}$$

Tabella 1

Modulo di Young E	206000	MPa
Coefficiente di Poisson ν	0.3	
Raggio del foro r_0	1	mm
Raggio di calcolo nominale ζ	1.5	mm
Eccentricità del foro	0.	mm
Spessore del provino t	1	mm

dove si è indicato con F la formula risolvete relativa ad uno specifico metodo e con p_i il parametro i^{mo} , l'effetto percentuale di ogni singolo termine è stato stimato come

$$s_i = \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i \right)^2.$$

Ovviamente per poter ottenere una stima numerica si è dovuta identificare una condizione di riferimento. Questa è stata riportata in tab. 1. Si noti che in tab. 1 non compaiono gli spostamenti. Per questi ultimi, infatti, non si è assunto un valore assoluto ma si è invece fatto uso delle formule analitiche, valide nel caso di foro passante, per la loro stima puntuale in funzione dell'angolo θ e dello stato di sollecitazione. Nel calcolo sono state assunte tre diverse condizioni di carico: condizione idrostatica ($\sigma_x = \sigma_y = 100$ MPa, $\tau_{xy} = 0$), taglio puro ($\sigma_1 = -\sigma_2 = 100$, $\theta = \pi/4$, ossia $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 100$ MPa) ed infine una condizione di taglio con $\theta \neq 45^\circ$ ($\sigma_1 = -\sigma_2 = 100$, $\theta = \pi/8$, ossia $\sigma_x = -\sigma_y = 100/\sqrt{2}$, $\tau_{xy} = 100/\sqrt{2}$ MPa).

La precisione nella stima delle tensioni residue dipende dalla precisione con cui si valutano i coefficienti di calibrazione (cioè A, B, C, G e nel caso di foro cieco F) e dalla precisione nella misura sperimentale degli spostamenti. Si sono quindi assunte variazioni pari al 5% del valore nominale per i parametri del materiale, 1/20 di frangia per gli spostamenti (con sensibilità media pari a 0.5 μm /frangia) ed un errore di 2 pixel nel calcolo dei parametri del foro a partire dalla sua immagine (Supponendo una risoluzione di 50 pixels/mm, ciò equivale ad un errore pari a 0.04 mm). Una lista riassuntiva di tutti i vari termini è riportata in tab. 2.

Tab.2. Entità degli errori assunti nel calcolo di sensibilità

dE (Modulo di Young)	10300	MPa	5% del valore nominale
Dv (Coefficiente Di Poisson)	0.015		5% del valore nominale
dr_0 (Raggio del foro)	0.04	mm	2 pixels, 50 pixels/mm
$D\zeta$ (Raggio nominale di calcolo)	0.015	mm	1% del valore nominale
dc (Eccentricità)	0.04	mm	2 pixels, 50 pixels/mm
dt (Spessore del provino)	0.05	mm	5% del valore nominale
du, dv, dw (Spostamenti)	$2.5 \cdot 10^{-5}$	mm	1/20 frangia, 0.5 μm /frangia

I risultati per i vari algoritmi sono di seguito riassunti in una serie di grafici che riportano i vari p_i in funzione dell'angolo θ . Per motivi di spazio ci si è limitati alla sola σ_x nella terza condizione di carico inoltre, per rendere più agevole la consultazione, si sono separati gli spostamenti—tipicamente molto più “pesanti” in termini relativi—dagli altri termini.

Non tutti gli algoritmi presentano tutti i nove termini sopra elencati; ad esempio nell'algoritmo di Nelson-McCrickerd per il calcolo della σ_x sono necessari due soli termini di spostamento; per di più, non utilizzando la componente fuori dal piano, l'algoritmo non dipende dallo spessore t .

Tra tutti gli algoritmi analizzati—mancano l'algoritmo di Focht e quello ai minimi quadrati, perché troppo complessi per permettere questo tipo di trattamento—l'algoritmo di Wu, Lu e Han appare essere quello più equilibrato e che meno risente di eventuali errori nella misura degli spostamenti.

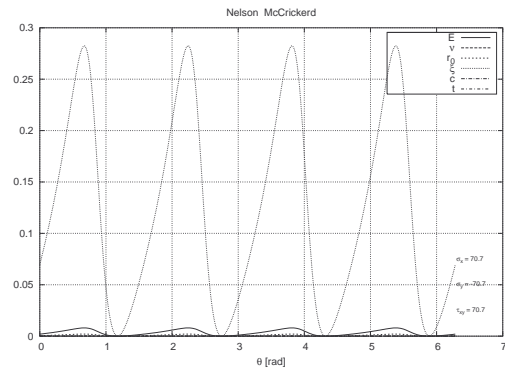
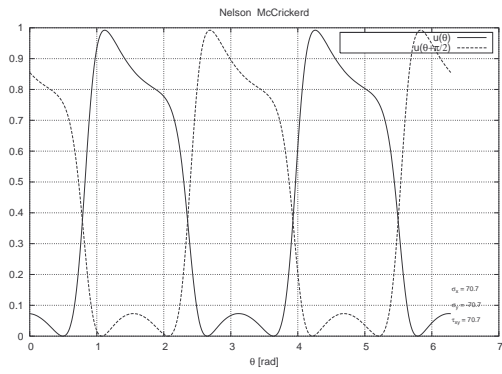


Fig. 3. Curve di sensibilità relative all' algoritmo di Nelson-McCrickerd.

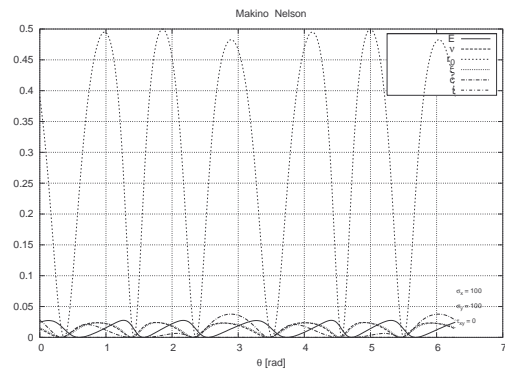
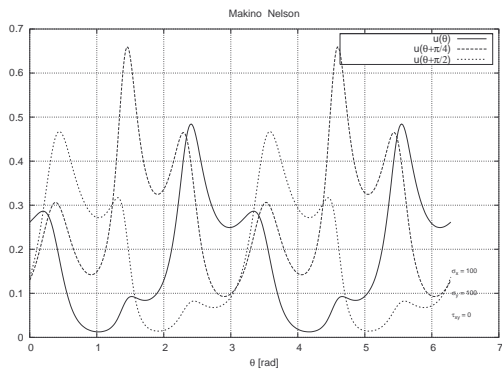


Fig. 4. Curve di sensibilità relative all' algoritmo di Makino-Nelson

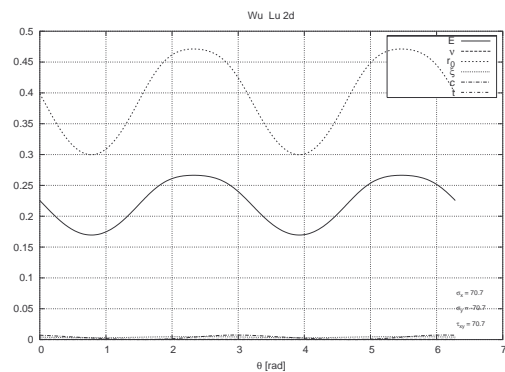
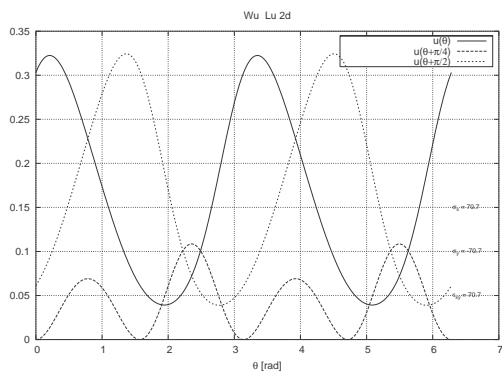


Fig. 5. Curve di sensibilità relative all' algoritmo di Wu-Lu-Han

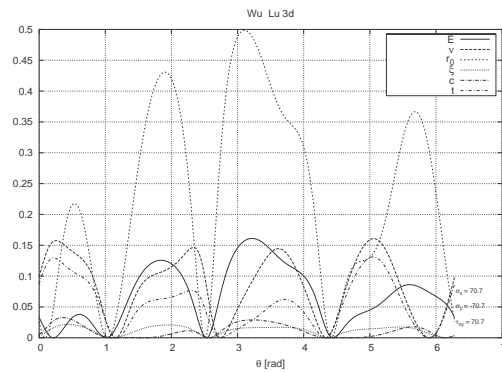
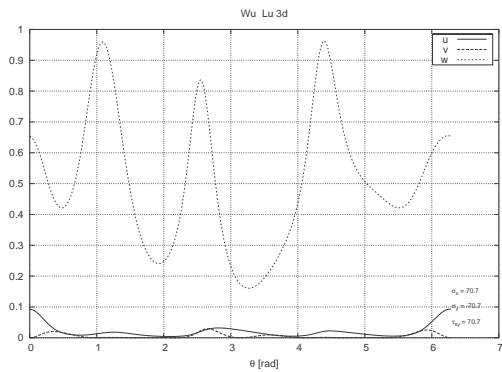


Fig. 6. Curve di sensibilità relative all' algoritmo di Wu-Lu

4. Test comparativi

L'analisi di sensibilità del paragrafo precedente consente di conoscere l'importanza relativa dei parametri ma non l'entità dei singoli errori. A tal fine si è realizzato un apposito codice di calcolo, in grado di generare dati di ingresso opportunamente perturbati, e si sono confrontate le risposte fornite dai vari metodi rispetto ai valori teorici. Nelle figure che seguono sono riportate gli errori percentuale medi dei vari algoritmi in funzione del rumore e della tensione equivalente applicata. Ogni punto corrisponde in effetti al valor medio calcolato su 100 test.

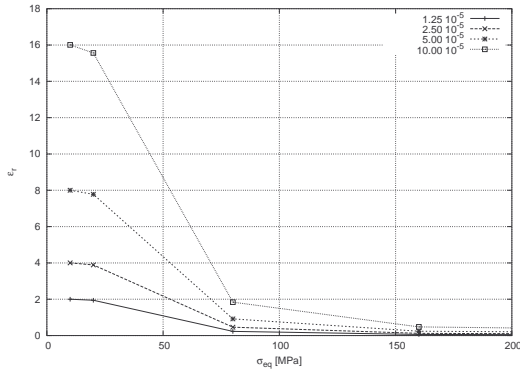


Fig. 7. Errori dell'algoritmo ai minimi quadrati

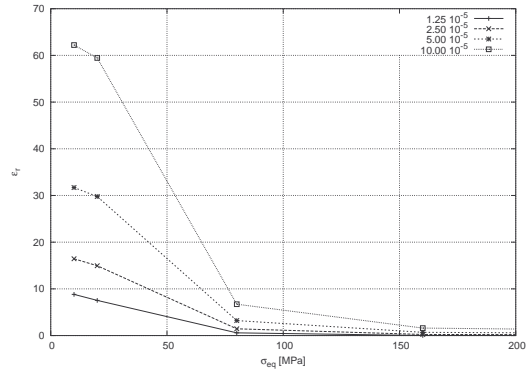


Fig. 8. Errori dell'algoritmo di Focht

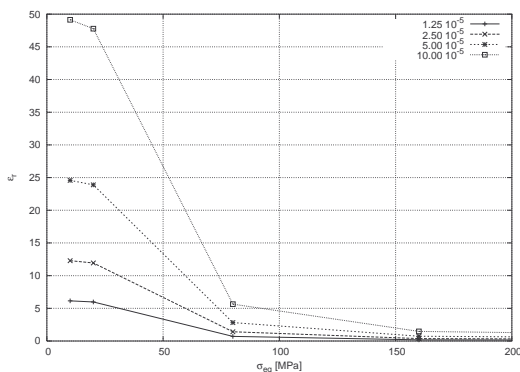


Fig. 9. Errori dell'algoritmo di Makino

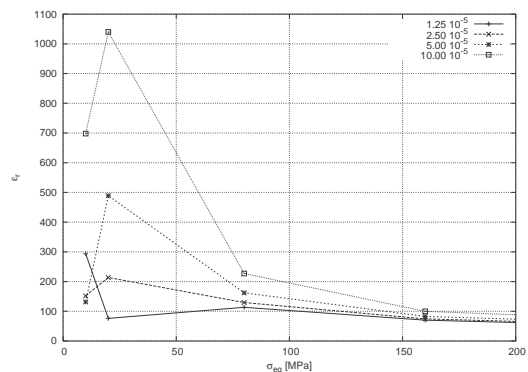


Fig. 10. Errori dell'algoritmo di McCrickerd

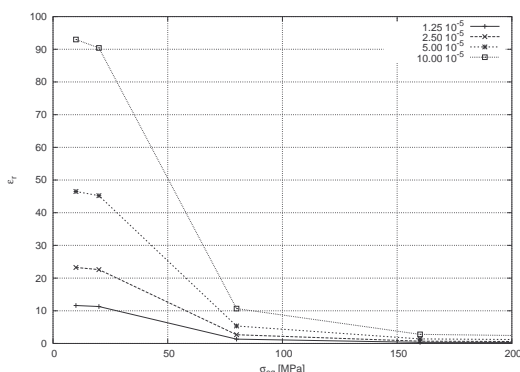


Fig. 11. Errori dell'algoritmo di Wu-Lu-Han

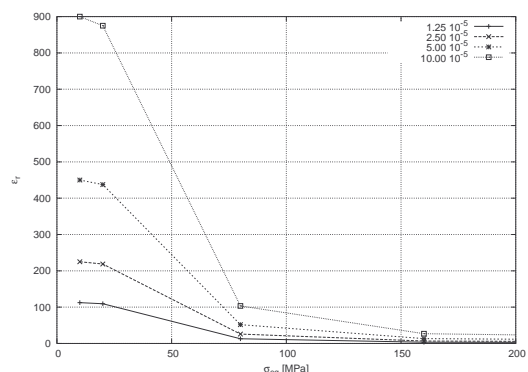


Fig. 12. Errori dell'algoritmo di Wu-Lu

5 CONCLUSIONI

Come è facilmente visibile dalle figure 7–12, l'errore nel calcolo delle tensioni cresce in maniera lineare con il rumore presente nei dati ed ovviamente decresce all'aumentare delle sollecitazioni residue. Fra tutti gli algoritmi, quello meno sensibile al rumore risulta essere l'algoritmo ai minimi quadrati mentre l'algoritmo di Wu e Lu, che pure è caratterizzato da un

sistema numericamente stabile, è fortemente influenzato dagli errori sulla componente fuori dal piano.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ASTM E837-94a, “Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method”, *Annual Book of ASTM Standards*, 1994.
- [2] R.E. Rowlands, “Residual Stresses”, *Handbook on Experimental Mechanics*, chapter 18, pp. 768-813, SEM, Prentice-Hall Inc., 1987.
- [3] J. Lu, Ed., *Handbook of Measurement of Residual Stresses*, SEM, The Fairmont Press, Inc., 1996.
- [4] D.E. Bray, Ed., “Residual Stress Measurement and General Nondestructive Evaluation”, PVP-Vol. 429, ASME, 2001.
- [5] F.A. Kandil, J.D. Lord, A.T. Fry, and P.V. Grant, “A review of residual stress measurement methods. A guide to Technique Selection”, Project CPM4.5, Measurement of Residual Stress in Components, NPL Report MATC(A)04, http://www.npl.co.uk/npl/cmmt/residualstress/pdf_files/review.pdf, 2001.
- [6] G.S. Schajer, “Measurement of non-uniform residual stresses using the hole-drilling method. Part I - Stress calculation procedures”, *J. Eng. Materials and Technology*, Vol. 110, pp. 338–349, 1988.
- [7] A. Ajovalasit, “Measurement of residual stresses by the hole-drilling method: influence of hole eccentricity”, *J. of Strain Analysis*, Vol. 14, pp. 171–178, 1979.
- [8] D.V. Nelson, J.T. McCrickerd “Residual-Stress Determination Through Combined Use of Holographic Interferometry and Blind-Hole Drilling”, *Experimental Mechanics*, **26** (1986) 371–378.
- [9] A. Makino, D.V. Nelson, “Residual Stress Determination by Single-axis Holographic Interferometry and Hole Drilling-Part I: Theory”, *Experimental Mechanics*, Vol.34,1994, pp.66–78.
- [10] A. Makino, D.V. Nelson, E.A. Fuchs, D.R. Williams, “Determination of Biaxial Residual Stresses by a Holographic-Hole Drilling Technique”, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1996, Vol.118, pp.583–588.
- [11] A. Makino., D.V. Nelson, “Determination of Sub-surface Distribution of Residual Stresses by a Holographic-hole Drilling Technique”, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1997, Vol.119, pp.95–103.
- [12] G. Nicoletto, “Moirè Interferometry Determination of Residual Stresses in the Presence of Gradients”, *Experimental Mechanics*, Vol.31, N°3,1991, pp.252–256.
- [13] F.M. Furgiuele, M. Pagnotta, A. Poggialini, “Measuring Residual Stresses by Hole-drilling and Coherent Optics Techniques: a Numerical Calibration”, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 1991, Vol.113, pp.41–50.
- [14] Z. Wu, J. Lu, B. Han, “Study of Residual Stress Distribution by a Combined method of Moirè Interferometry and Incremental Hole Drilling, Part 1: Theory, Part 2: Implementation “, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65, 1998, pp.837–850.
- [15] Z. Wu, J. Lu, “Study of Surface Residual Stress by Three-Dimensional Displacement Data at a Single Point in Hole Drilling Method”, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 2000, Vol.122, pp.215–220.
- [16] G. Focht, K. Schiffrer, “Numerical Processing of Measured Full-Field Displacement Data Around Holes for Residual Stress Determination”, WCCM V, Fifth World Congress on Computational Mechanics, H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer eds., July 7-12, 2002, Vienna, pp. 1–10.