

IX CONVEGNO NAZIONALE DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA
PER L'ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI

TRIESTE 23-26 Settembre 1981

ANALISI SPERIMENTALE DI GUSCI CONICI A SPESSORE SOTTILE

F. Bertolino e B. Picasso
Università di Cagliari

SOMMARIO

Viene studiato il comportamento di gusci conici a spessore sottile mediante il metodo degli elementi finiti e sperimentalmente mediante l'interferometria olografica. Il programma predisposto che impiega elementi monodimensionali "conical frustra" con funzioni di forma di tipo cubico, permette l'analisi statica e dinamica di gusci di rivoluzione per configurazioni assialsimmetriche o non assialsimmetriche della deformata. Quest'ultimo caso viene trattato attraverso la scomposizione in serie di Fourier dei carichi non assialsimmetrici. Viene compiuta l'analisi statica e dinamica di due modelli tronco conici a spessore sottile in alluminio sui quali viene successivamente svolta una verifica sperimentale mediante l'interferometria olografica.

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THIN CONICAL SHELLS

This paper deals with the static and dynamic analysis of thin conical shells. The finite element method is used in order to obtain analytical results which are compared with experimental data coming from the application of holographic interferometry. The finite element program is based on "conical frustra" rectilinear elements with cubic shape functions. It consents the static and dynamic analysis of axisymmetric shells even with non axisymmetric load and displacement conditions, through a Fourier series of expansion of applied loads. Two models were tested with real-time and time average holographic interferometry. Experimental results were in reasonable agreement with the finite element predictions.

1. INTRODUZIONE

Il problema preso in esame nel corso del presente lavoro era quello di svolgere un'analisi del comportamento statico e dinamico di organi meccanici assai diffusi e in genere fortemente sollecitati, come le giranti degli idroestrattori, di alcuni compressori centrifughi, etc. I modelli impiegati nella ricerca avevano forma tronco conica con disco di chiusura piano e dimensioni piuttosto ridotte (massimo diametro della parte conica 143 mm) a causa delle limitazioni imposte dalla tecnica sperimentale impiegata. L'analisi statica e dinamica di gusci di questo tipo presenta elevate difficoltà se affrontata per via teorica ed i numerosi lavori che trattano l'argomento indicano un ricorso preferenziale a metodi numerici, quali il metodo di Rayleigh-Ritz, di Galerkin, o metodi di tipo matriciale [1], [2], [3], e nei pochi casi in cui il problema viene affrontato per via puramente analitica [4], [5], si fa ricorso alla teoria membranale dei gusci di rivoluzione con semplificazioni che sembrano in qualche caso portare a una descrizione non realistica del comportamento del modello. Assai più arduo sembrava trattare analiticamente il problema della lastra conica con disco di chiusura, data la presenza di discontinuità nella superficie del guscio e la probabile scarsa attendibilità che avrebbe avuto in questo caso la teoria membranale.

Le difficoltà accennate hanno portato alla scelta del metodo degli elementi finiti per l'analisi teorica impiegando elementi di tipo assialsimmetrico che permettono però di tener conto anche di situazioni di carico e di deformazione non assialsimmetriche grazie alla scomposizione in serie di Fourier di queste entità.

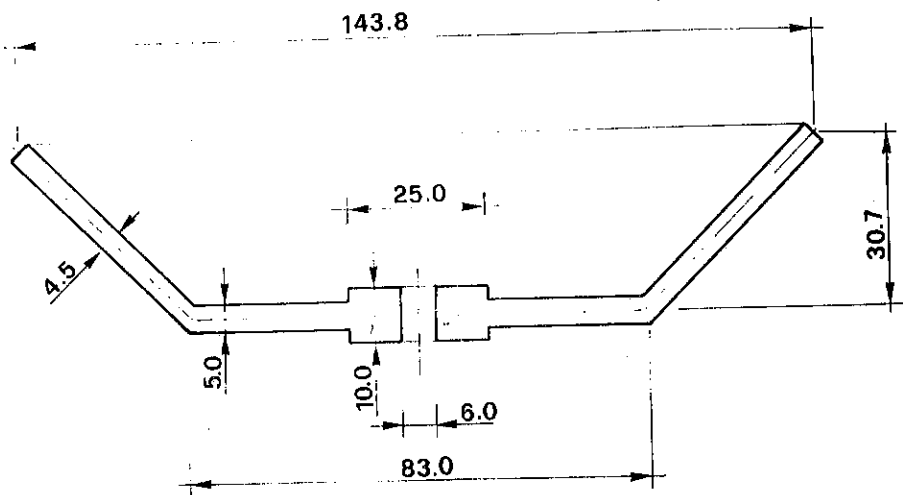


Fig.1. Dimensioni del 1° modello

Il programma predisposto è stato messo a punto e controllato con applicazioni a dischi piani circolari, gusci cilindrici, etc., per cui era nota la soluzione teorica del problema. La tecnica sperimentale impiegata era l'interferometria olografica in tempo reale e 'time average' e l'analisi dell'impedenza nel punto di eccitazione della lastra che coincideva col centro del disco di fondo del modello. Le dimensioni del primo dei due modelli esaminati sono riportate nella Fig.1. I modelli, che differiscono soltanto per lo spessore del disco di fondo e della parte conica, ma non per la geometria, sono stati ricavati per tornitura da un semilavorato di alluminio. Il modulo di Young del materiale è stato ricavato da prove di trazione su provini rettilinei e da prove di vibrazione flessionale in risonanza di un disco circolare a spessore sottile. Il valore medio risultante è stato 64500 N/mm^2 .

2. ANALISI STATICA

Il programma ad elementi finiti impiega elementi assialsimmetrici tronco conici (conical frustra) con due nodi e quattro gradi di libertà per nodo. La procedura per il calcolo delle matrici di rigidezza dell'elemento è riportata in [6] e [7], anzi in [6] la matrice di rigidezza, ottenuta con integrazione analitica, è riportata direttamente. La matrice di massa è stata calcolata in base alle funzioni di forma riportate nei lavori citati sviluppando l'espressione

$$[M] = \int_{\text{vol}} N^T \rho N \, d\text{vol}$$

con

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta^e \}$$

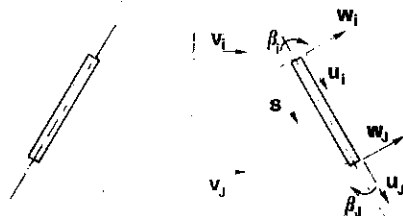


Fig.2. Elemento conico

L'estensione alle deformazioni non assialsimmetriche richiede di inserire un grado di libertà supplementare, lo spostamento v in direzione circonferenziale in quanto nascono in questo caso deformazioni variabili lungo i paralleli che introducono termini addizionali nell'espressione del lavoro elastico e quindi nella matrice di rigidezza. Le funzioni di forma vengono ora espresse da serie di Fourier del tipo

$$\begin{aligned} u &= u(\xi) \sum \cos m\theta & \text{con } \xi &= s/L \\ v &= v(\xi) \sum \sin m\theta \\ w &= w(\xi) \sum \cos m\theta \\ \beta &= \beta(\xi) \sum \cos m\theta \end{aligned}$$

per cui l'integrazione viene svolta anche secondo la coordinata θ .

Nelle applicazioni statiche i carichi non assialsimmetrici vengono scomposti in serie di Fourier e al termine generico di ordine m dei carichi agenti corrisponde una matrice di rigidezza e un vettore di spostamenti nodali. Gli spostamenti relativi alla effettiva condizione di carico vengono ottenuti come somma degli spostamenti dovuti alle varie componenti armoniche del carico. Nelle applicazioni dinamiche m rappresenta il numero di linee nodali meridiane presenti nel modo di vibrare. Il problema dinamico si presenta nella forma:

$$[K]_m \{\delta_m\} = \omega^2 [M]_m \{\delta_m\}$$

che rappresenta un problema classico agli autovalori la cui soluzione fornisce frequenze proprie e modi di vibrare del modello quando siano presenti m linee nodali meridiane.

Lo schema dell'apparecchiatura per l'interferometria olografica è riportato in Fig.3. Si tratta della classica configurazione per la

misura di spostamenti fuori dal piano disposta in modo da ottenere un vettore sensibilità parallelo all'asse del modello. Con l'approssimazione derivante dal ritenere costanti gli angoli formati dei vettori illuminazione e osservazione per i vari punti del modello, le frange ottenute risultavano linee di ugual spostamento w nella direzione dell'asse. Un carico concentrato costituito da un peso è stato applicato in un punto della superficie esterna tronco conica.

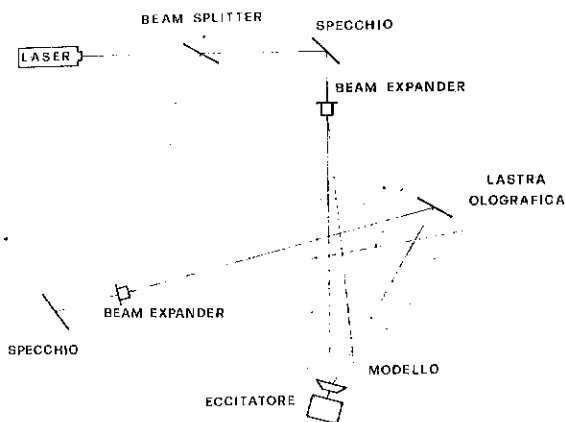


Fig.3. Apparecchiatura sperimentale

Il corrispondente ologramma in doppia esposizione ottenuto con un carico di circa 2,60 N è mostrato nella Fig.4. Nella figura 5 è anche rappresentato l'andamento degli spostamenti secondo l'asse in corrispondenza del meridiano sul quale è il punto di applicazione del carico e di altri due meridiani tra loro perpendicolari. Le linee continue rappresentano invece l'andamento degli spostamenti previsto dal metodo degli elementi finiti. Poiché il carico è concentrato, gli spostamenti calcolati analiticamente dipendono dal numero di termini adottato nella serie di Fourier che lo rappresenta. Nel caso esaminato si è riscontrato comunque che oltre 20 termini si ottengono miglioramenti di scarsa importanza agli effetti pratici. E' abbastanza interessante notare la forma delle deformate in Fig.5 che mostrano come le maggiori deformazioni vengono subite dal disco centrale mentre la geometria della parte tronco conica si mantiene praticamente rettilinea.

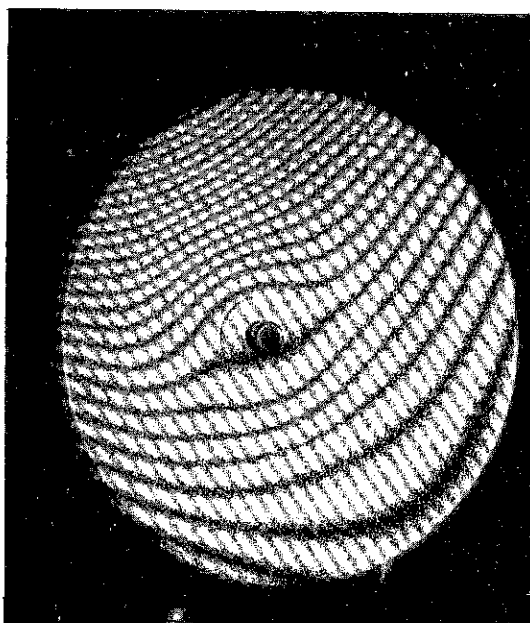


Fig.4. Ologramma relativo alla prova statica

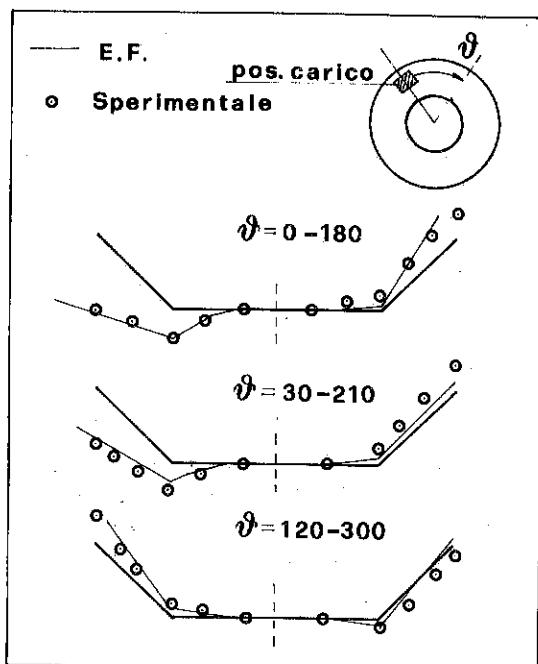


Fig.5. Deformate del modello conico

3. ANALISI DINAMICA

I modi di vibrare di un guscio assialsimmetrico possono essere ricondotti a due tipi fondamentali, con prevalenti spostamenti tangenziali e rispettivamente normali alla superficie [5]. La presenza del fascio di fondo influisce sulla separazione tra i modi dei due tipi accennati, facendo sì che si presentino modi 'misti' in cui a deformazioni di tipo tangenziale sulla parte conica sono accoppiate deformazioni trasversali del disco e viceversa. Il metodo degli elementi finiti fornisce comunque l'intero campo delle frequenze proprie del modello.

Nella Tabella 1 sono riportate alcune delle frequenze calcolate insieme ai valori sperimentali ottenuti con l'interferometria olografica. La tecnica, già sperimentata in ricerche precedenti, viene applicata nel corso di una analisi preliminare in tempo reale per individuare le frequenze (e ove possibile i modi) di risonanza, seguita dal rilevamento di una serie di ologrammi "time average" per l'esatta individuazione del modo. La Fig.6b riporta alcuni dei modi di vibrare così rilevati, la cui identificazione non presenta problemi. Ciò che invece costituisce spesso una difficoltà è ottenere l'eccitazione di tutti i modi in quanto si hanno spesso intervalli di frequenza molto ristretti in cui modi diversi quasi si sovrappongono mascherandosi mutuamente.

Nel corso della presente indagine è stata svolta anche un'analisi del campo di frequenze da 500 a 20.000 Hz col metodo dell'impedenza, ricavando cioè i mini

mi ed i massimi dell'impedenza nel punto di eccitazione del guscio, corrispondenti, come è noto, a condizioni di risonanza o antirisonanza. La Fig. 6 mostra il grafico così ottenuto nel quale si rilevano nettamente i picchi corrispondenti ai soli modi assialsimmetrici mentre non sono rilevabili per ragioni non del tutto comprensibili, le frequenze con uno o più meridiani nodali. Il confronto con i dati forniti dall'interferometria olografica conferma l'attendibilità dei valori sperimentali ottenuti.

Lavori precedenti sui problemi dell'analisi dinamica di gusci assialsimmetrici [8] hanno portato a conclusioni che il lavoro attuale sembra confermare:

- 1) - Il metodo degli elementi finiti si presta bene all'indagine modale e fornisce in generale frequenze e forme modali con buona precisione a condizione che si tenga conto dell'effetto del taglio e dell'inerzia di rotazione che soprattutto per i modi di ordine più elevato, possono influire notevolmente. Nell'analisi svolta sul modello tronco conico l'effetto del taglio è stato trascurato, data la ridotta entità dello spessore rispetto alle dimensioni trasversali del modello, mentre si è tenuto conto dell'inerzia di rotazione.
- 2) - La possibilità di eccitare sperimentalmente i modi di vibrare del modello è condizionata dal tipo di eccitazione usato e dal campo di frequenze in cui si svolge l'analisi. L'interferometria olografica richiede l'impiego di eccitatori a basso spostamento (poiché altrimenti si otterrebbe un eccessivo numero di frange) quali ad esempio quelli di tipo piezoelettrico e si presta quindi bene per analisi sino a frequenze relativamente elevate. Tuttavia non tutti i modi compresi in un certo campo di frequenze vengono eccitati sia perchè alcuni vengono mascherati da altri molto vicini in frequenza, sia perchè non rilevati durante l'analisi in tempo reale. A questo riguardo un'analisi completa può essere compiuta con una eccitazione impulsiva ed un analizzatore di spettro, restando comunque aperto il problema della individuazione dei modi.

L'osservazione delle frequenze proprie indica che rispetto ad esempio al caso di un disco circolare, esistono più frequenze con equal numero di linee nodali meridiane. Si veda, ad esempio, il modo 2-2 per il guscio sottile o il modo 1-1 per quello più spesso in cui le linee nodali pur restando eguali in numero, cambiano posizione. Ad esempio il modo 2-2 presenta a 18426 Hz ambedue i cerchi nodali nella parte conica e a 10719 Hz uno nella parte conica ed uno nel disco di fondo.

Esiste un accordo ragionevole tra previsioni analitiche e risultati sperimentali nel campo di frequenze esaminato. Le differenze più rilevanti si hanno per le fondamentali per ambedue i modelli, per il modo 1-0 per il primo modello e per il modo 0-3 per il secondo. Una indagine ulteriore sarà volta all'esame della causa di tale fenomeno. Una ragionevole ipotesi che sin d'ora può essere avanzata e che si verifichi nel caso delle frequenze con i maggiori scostamenti, una certa distorsione della forma del modo dovuto alle imperfette condizioni di vincolo o a qualche irregolarità del modello.

TABELLA 1

1° Modello				2° Modello			
Modo C-D	Frequenza E.F. (Hz)	Frequenza Sperimentale (Hz)	Errore %	Modo C-D	Frequenza E.F. (Hz)	Frequenza Sperimentale (Hz)	Errore %
0-0	1488	1270	- 17,0	0-0	2055	1750	- 17,4
1-0	9396	9800 9680	+ 4,0 + 3,02	1-0	9770	+ 10000	+ 2,3
2-0	12582	11700	- 7,5	2-0	14610	13950	- 4,7
3-0	17524	16400	- 6,85	3-0	21695	17700	- 22,57
0-1	732	620	- 18,0	0-1	994	980	- 1,42
1-1	6237	-	-	1-1	6416 11542	-	-
2-1	10470 14424	10933	+ 4,42	2-1	15847	-	-
3-1	18389	18000	- 2,16	3-1	20998	-	-
0-2	791	780 765	- 1,35 - 3,29	0-2	1206	1160	- 3,94
1-2	12187	-	-	1-2	12506	-	-
2-2	10719 18426	-	-	2-2	13456 20802	-	-
3-2	20706	20431	- 1,33	3-2	27091	-	-

C indica il numero di cerchi nodali; D indica il numero di linee nodali meridiane

F. Bertolino, B. Picasso

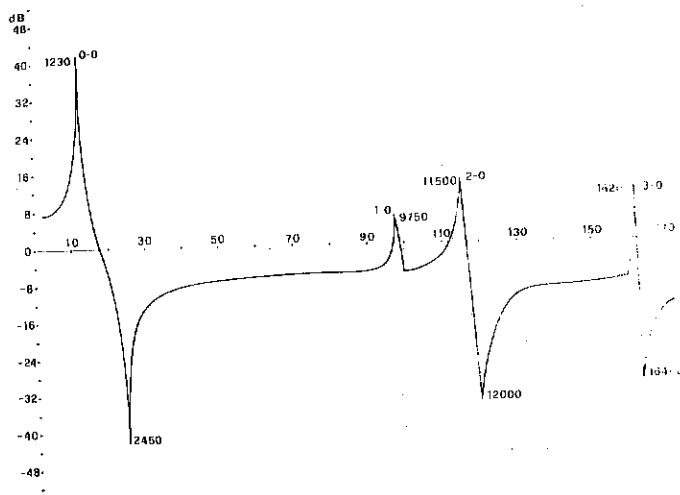


Fig. 6a

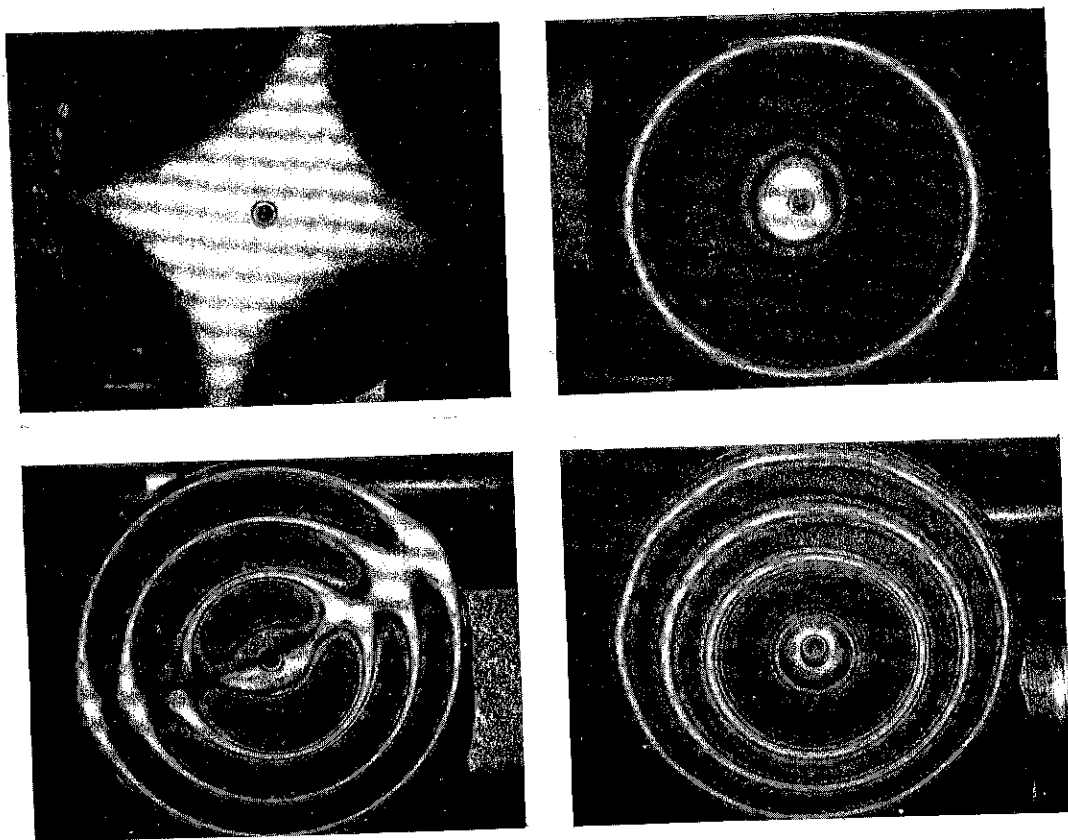


Fig. 6b

CONCLUSIONI

La descrizione ottenuta del comportamento statico e dinamico dei gusci esaminati sembra giustificare una certa fiducia nel modello matematico impiegato. Un affinamento del programma per tener conto, ad esempio, dell'effetto del taglio, risulta necessario soprattutto se si prendono in esame gusci di spessore non piccolissimo. La visualizzazione delle forme modali e distorsioni ottenute con l'interferometria olografica fornisce un'ulteriore conferma della versatilità e dell'utilità di questa tecnica. L'analisi dinamica richiede tuttavia l'apporto di ulteriori mezzi di indagine soprattutto quando sia richiesta una verifica completa delle frequenze e dei modi di vibrare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. HERRMANN, I. MIRSKY: On vibrations of conical shells. Journal of Aerospace Sciences, 25, 451-458, 1958
- [2] W.C.L. HU: Free vibrations of conical shells. HASA TN2666, 1968.
- [3] A. KALNINS: Free vibrations of rotational symmetrical shells. Procs. IX Int. Congress of Applied Mechanics, 7, 333-343, 1956
- [4] C.H. CHANG: Membrane vibrations of conical shells. Journal of Sound and Vibrations, 60 (3), 335-343, 1978.
- [5] A.L. GOLDENVEIZER: Free vibration spectrum structure of a shell of revolution. Mechanics today, Vol.5, Pergamon Press.
- [6] P.E. GRAFTON, D.R. STROM: Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. AIAA Journal, Vol.1, No.10.
- [7] O.C. ZIENKIEWICZ: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, London.
- [8] Y.K. CHEUNG: Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford.
- [9] F. GINESU, B. PICASSO, P. PRIOLO: Vibration analysis of polar orthotropic annular discs. Journal of Sound and Vibration, 65(1), 97-105, 1979.