



Associazione Italiana  
per l'Analisi delle  
Sollecitazioni



Istituto di Macchine  
Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Catania

**Atti del**

# **XXVI Convegno Nazionale AIAS**



Grand Hotel Baia Verde - Aci Castello (CT)  
3 - 6 Settembre 1997

## Applicazione di Tecniche di Correlazione Digitale di Immagini all'Analisi di Materiali Compositi

Ambu R., Bertolino F., Ginesu F.  
Dipartimento di Ingegneria Meccanica  
Università di Cagliari  
Piazza d'Armi, 09123 ITALIA

### Sommario

Le tecniche per l'elaborazione di immagini digitali sono spesso utili per il calcolo di spostamenti e deformazioni nel piano. Una di queste tecniche è la correlazione digitale che viene applicata ad immagini in cui è presente una distribuzione di intensità luminosa di tipo random del tipo "speckle". In questo lavoro viene sviluppata l'applicazione di questa tecnica all'analisi del comportamento locale sotto carico di materiali compositi. Preliminarmente all'indagine sperimentale l'affidabilità e la precisione della tecnica implementata è stata globalmente valutata mediante la sua applicazione ad immagini generate numericamente.

### Abstract

Digital imaging techniques are often useful to measure bidimensional surface displacements and deformations. One of these techniques is the digital image correlation which correlates digital images of speckle patterns to calculate displacements and strains. In this work is presented the application of digital image correlation to the analysis of the local behaviour under load of composite materials. Applications of the technique to numerically generated digital images, useful to evaluate globally the technique, are also reported.

### Introduzione

L'elaborazione digitale di immagini è ormai divenuto uno strumento importante nella sperimentazione. In particolare, nel campo della meccanica sperimentale l'utilizzo di immagini digitali ha dato nuovo impulso alle classiche tecniche ottiche per l'analisi delle sollecitazioni. Per quanto riguarda, ad esempio, le tecniche interferometriche l'utilizzo di metodi per l'elaborazione degli interferogrammi digitalizzati consente di ridurre notevolmente i tempi di interpretazione dei dati sperimentali, conservando la sensibilità di misura propria di queste tecniche ottiche. [1].

Quanto detto è applicabile anche all'insieme di metodi che vanno sotto il nome di speckle. Infatti è ben nota l'applicazione in cui il laser speckle viene combinato con un setup di registrazione di frange in forma digitale [2]. Questo metodo, noto come ESPI (Electronic Speckle Pattern Interferometry), permette di osservare la formazione di frange senza la necessità della pellicola fotografica e, in un certo senso, può essere considerato come il predecessore degli attuali metodi di correlazione digitale. Questi metodi consistono essenzialmente nel correlare numericamente due immagini speckle, per ottenere direttamente spostamenti e deformazioni.

Il metodo di correlazione digitale che si intende applicare è stato utilizzato con successo in passato nel campo dell'analisi di spostamenti e deformazioni nel piano [3] e fuori dal piano [4], nella fluidodinamica [5] e nella meccanica della frattura [6].

Obiettivo del lavoro è quello di studiare l'applicazione di questa tecnica di correlazione digitale all'analisi del comportamento locale sotto carico di materiali compositi. Infatti molte delle proprietà termomeccaniche di un materiale composito sono influenzate dalla struttura e proprietà locali, per cui lo studio del comportamento a livello microscopico può dare delle utili indicazioni per il miglioramento delle sue caratteristiche. La struttura fibre/matrice di un provino in materiale composito può essere evidenziata mediante osservazione al microscopio di una sua sezione opportunamente preparata. Le immagini così ottenute vengono comunemente utilizzate per ricavare alcune caratteristiche del materiale quali la densità delle fibre ed il loro diametro. Tali immagini, digitalizzate ed elaborate in modo tale da aumentare il contrasto fibre/matrice, in genere sono caratterizzate da zone chiare e zone scure, con una configurazione simile alla distribuzione di intensità luminosa che si ottiene con la luce laser nei metodi "speckle". Da tale osservazione si è tratto spunto per sviluppare l'applicazione di una tecnica di correlazione digitale tra immagini per lo studio di spostamenti nel piano in sezioni di provini in composito. Questa tecnica consente di risalire al campo degli spostamenti correlando numericamente due immagini, la prima relativa ad una configurazione di riferimento indeformata e l'altra relativa ad una configurazione deformata. Preliminarmente all'analisi sui compositi, la tecnica è stata messa a punto e valutata mediante l'utilizzo di immagini numeriche.

### **Correlazione digitale**

La correlazione digitale è un metodo numerico che consente di confrontare immagini allo scopo di determinarne la differenza. Questa tecnica viene utilizzata per il calcolo degli spostamenti e gradienti di spostamento nel piano [7]. Il metodo viene applicato ad immagini digitalizzate in cui è presente una distribuzione di livelli di grigio di tipo random, sia per disposizione che per valore, come quando viene registrata la distribuzione di intensità luminosa riflessa da una superficie otticamente rugosa illuminata da luce coerente, e si ha l'effetto chiamato laser speckle. I metodi speckle in luce bianca, con i quali la correlazione digitale fornisce in genere migliori risultati, si hanno invece quando per il calcolo degli spostamenti e deformazioni nel piano si utilizza il naturale aspetto della superficie. L'effetto speckle può essere anche ottenuto artificialmente, ad esempio spruzzando finemente di vernice bianca una superficie nera riflettente.

Un'immagine del tipo suddetto, quando si disponga di una CCD camera standard collegata ad un digitalizzatore video, viene registrata da un computer in una matrice di numeri a ciascuno dei quali è associato convenzionalmente un livello di grigio. La correlazione di immagini digitali è quindi una operazione di confronto di insiemi di numeri.

Supponiamo di avere registrato le distribuzioni di intensità luminosa relativamente alle configurazioni indeformata e deformata dell'oggetto. Prima che questi due insiemi possano essere utilizzati per l'elaborazione occorre ipotizzare una relazione matematica tra la deformazione puntuale dell'oggetto e la "deformazione" o cambiamento tra le due distribuzioni di livelli di grigio registrate. In particolare si suppone che sottoinsiemi di piccole dimensioni dell'immagine indeformata siano legati a sottoinsiemi nell'immagine deformata mediante una relazione biunivoca. Il processo di deformazione ipotizzato è mostrato in Figura 1, per un generico sottoinsieme locale centrato in  $P_0$ . Si suppone inoltre che questa relazione tra sottoinsiemi locali possa essere applicata alla deformazione della superficie dell'oggetto.

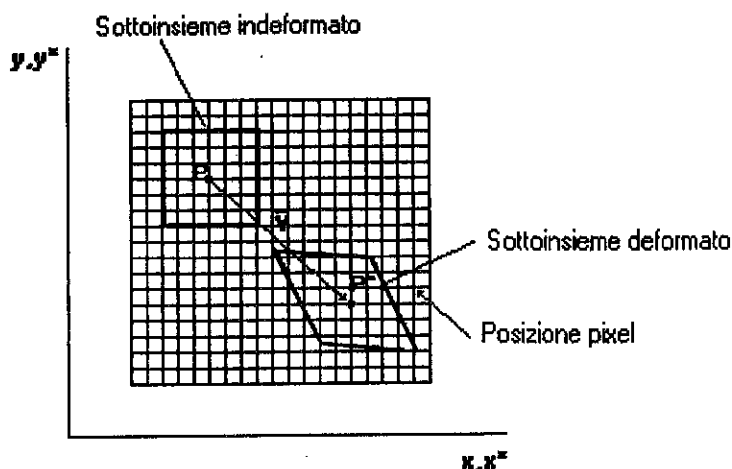


Figura 1. Deformazione di un generico sottoinsieme

La distribuzione dei livelli di grigio nell'immagine è funzione delle coordinate del punto; tale funzione può essere indicata con  $F(x,y)$ . Per effetto dell'applicazione di carichi esterni il generico sottoinsieme centrato in  $P_0$  si deforma. Se indichiamo con  $G(x^*,y^*)$  la distribuzione dei livelli di grigio nell'immagine deformata, allora le coordinate  $(x,y)$  e  $(x^*,y^*)$  sono legate dalla deformazione che è avvenuta tra l'acquisizione della prima e della seconda immagine. Inoltre, se supponiamo che la distribuzione di intensità cambi ma i valori locali di intensità non vengano modificati per effetto della deformazione, allora il calcolo puntuale dei parametri di deformazione può essere fatto direttamente usando i metodi di correlazione digitale.

Occorre osservare che un'ipotesi fondamentale dell'elasticità è la continuità degli spostamenti (omogeneità) relativamente a regioni di piccole dimensioni. Perciò, se i sottoinsiemi vengono scelti sufficientemente piccoli, allora il processo descritto è utile per deformazioni di qualunque entità.

L'operazione di correlazione per un generico sottoinsieme può essere ottenuta utilizzando la seguente funzione:

$$C(u,v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) = 1 - \frac{\sum F(x,y) * G(x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y)}{\sqrt{\sum F^2(x,y) * \sum G^2(x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y)}}$$

$$\Delta x = x - x_c; \Delta y = y - y_c$$

dove  $u$  e  $v$  sono le componenti del vettore spostamento nelle direzioni  $x$  e  $y$  del punto di coordinate  $(x_c, y_c)$ , centro del sottoinsieme considerato e la sommatoria è estesa all'intera regione occupata dal sottoinsieme. La correlazione di immagini è ottenuta determinando i valori di  $u$ ,  $v$ ,  $du/dx$ ,  $dv/dx$ ,  $du/dy$ ,  $dv/dy$  che minimizzano il coefficiente di correlazione  $C$ . [8]

La ricerca del minimo di questa funzione è complessa, perché è molto elevato il numero delle possibili combinazioni dei sei parametri che occorre analizzare. Tale operazione richiederebbe quindi tempi molto lunghi, poiché i calcoli che l'elaboratore deve eseguire

sono onerosi. Occorre quindi utilizzare dei metodi semplificati di calcolo. Uno di questi metodi utilizza un procedimento iterativo a "due parametri" per calcolare il minimo della funzione  $C$ ; il metodo viene qui descritto in sintesi per un generico sottoinsieme. [9]

Anzitutto viene fissato un campo di valori per le componenti  $u, v$  dello spostamento del suo centro. I valori dei livelli di grigio all'interno del sottoinsieme indeformato vengono "confrontati" con i valori  $G(x^*, y^*)$  nelle posizioni  $x^* = x + u$ ,  $y^* = y + v$  come se il sottoinsieme traslasse senza distorcersi. Il confronto avviene mediante il calcolo del coefficiente  $C$ , ponendo pari a zero le altre variabili. In particolare, i valori di  $u$  e  $v$  corrispondenti al valore più basso del coefficiente  $C$ , che possiamo indicare con  $u_1, v_1$  rappresentano la prima approssimazione per la traslazione del punto  $P$ .

Si passa quindi alla iterazione successiva utilizzando campi di valori più ristretti per  $u$  e  $v$  scelti attorno a  $u_1, v_1$ . Il processo iterativo a due parametri continua finché la differenza dei valori trovati nella iterazione attuale rispetto alla iterazione precedente non diventa più piccola di un errore specificato, ed i valori ottenuti,  $u_c, v_c$  rappresentano la soluzione cercata.

La stessa procedura iterativa utilizzata per calcolare  $u$  e  $v$  può essere ripetuta per ottenere i termini relativi alla dilatazione o contrazione del sottoinsieme, cioè  $(du/dx)$  e  $(dv/dy)$ . In particolare, vengono scelti i campi per le variabili  $du/dx$  e  $dv/dy$  e calcolato il coefficiente  $C$  con  $u$  e  $v$  tenuti fissi e pari a  $u_c, v_c$  e  $dv/dx$  e  $du/dy$  pari a zero. Infine, possono essere valutati  $dv/dx$  e  $du/dy$ , termini relativi alla rotazione del sottoinsieme, con  $u_c$  e  $v_c$  e  $(du/dx)_c$  e  $(dv/dy)_c$  tenuti costanti nel confronto fra sottoinsiemi.

Nello sviluppo del programma è stato evidenziato come, per calcolare i sei parametri con questo processo iterativo, fossero necessari tempi piuttosto lunghi soprattutto se il campo di valori dei parametri che viene scelto è ampio. Per cui, una volta calcolati  $u_c, v_c$ , le stime dei valori iniziali dei gradienti da introdurre nell'algoritmo vengono ottenuti per differenziazione delle componenti di spostamento calcolate. Inoltre, anziché considerare sottoinsiemi di dimensioni costanti per l'intera procedura, si è seguito un procedimento in cui vengono considerati sottoinsiemi di dimensioni sempre più piccole ad iterazioni successive. Ciascuna immagine, delle dimensioni di  $640 \times 480$ , viene suddivisa in sottoinsiemi  $64 \times 64$  pixel; il programma quindi, a partire dal campo di valori che gli viene assegnato, ricerca i valori delle variabili, che minimizzano il coefficiente di correlazione  $C$ . Questa operazione viene effettuata su tutti i sottoinsiemi in cui è stata divisa l'immagine; quindi, al termine del primo passo, si ha una prima stima dei valori che vengono utilizzati alla seconda iterazione su sottoinsiemi della dimensione  $32 \times 32$ . La suddivisione in sottoinsiemi di dimensioni più piccole, sottomultipli della prima, continua alle iterazioni successive fino ad un valore minimo pari ad  $8 \times 8$ .

Come osservato in precedenza, le immagini digitali sono discrete. Infatti i livelli di grigio sono definiti solo nelle posizioni corrispondenti ad ogni singolo sensore. Perciò i valori degli spostamenti calcolati con la correlazione digitale sono accurati entro  $\pm 1$  pixel ed il calcolo dei gradienti può avere una percentuale di errore significativa. Un notevole miglioramento dei risultati può essere ottenuto mediante l'interpolazione tra i valori discreti in modo da rappresentare i dati in forma continua [10].

Il primo metodo di interpolazione considerato nel presente lavoro è l'interpolazione bilineare. Per ciascun insieme di 4 pixel si considera un sistema di coordinate locali  $\xi, \eta$  variabili tra 0 e 1, e quindi viene generata una superficie bilineare, relativamente a questi

quattro punti. Le superfici, una volta connesse, formano una funzione continua con derivate discontinue nel passaggio da una superficie all'altra.

Un altro tipo di funzione interpolante utilizzata in questo lavoro è la funzione bicubica B-spline [11]. In questo caso per ogni 4 pixel viene generata una superficie su un insieme di punti di controllo  $4 \times 4$ ; con questo tipo di funzioni si ha la continuità della derivata seconda in tutti i punti della superficie.

#### Applicazione della tecnica di correlazione digitale ad immagini numeriche

Si sono effettuate alcune prove sul programma di correlazione utilizzando delle immagini in cui la distribuzione random del tipo speckle viene generata numericamente. In questo modo, essendo inoltre esattamente noto lo spostamento o la deformazione, è possibile valutare quale sia la precisione dei valori calcolati mediante il programma. Per generare le immagini sono state utilizzate diverse tecniche.

Una di queste consiste nell'introdurre su un'immagine di partenza bianca una distribuzione random di cerchi di diversa intensità, il cui raggio viene assegnato. Sono state effettuate diverse prove relative a :1) traslazione rigida 2) rotazione attorno ad un punto. Per ogni prova sono state utilizzate due immagini; la prima relativa a configurazione indeformata (immagine di riferimento) e deformata. La dimensione di ciascuna immagine era pari a  $512 \times 512$  pixel.

Nel caso della traslazione rigida, è stato possibile avere una stima del campo degli spostamenti da introdurre nel programma di correlazione utilizzando il metodo che fa uso della FFT[12]. Tale metodo consente di ottenere le cosiddette frange di Young in forma digitale in maniera analoga a quanto accade sperimentalmente con la tecnica della fotografia speckle. In particolare, le due immagini speckle vengono sommate numericamente; viene quindi calcolata la trasformata di Fourier dell'immagine risultante per ottenere le frange la cui orientazione e passo è proporzionale allo spostamento tra la prima e la seconda immagine; questo spostamento si ottiene direttamente calcolando la trasformata di Fourier del sistema di frange.

Le prove di traslazione rigida sono state effettuate applicando spostamenti con componenti nelle direzioni x e y. L'algoritmo ha determinato in tutti i casi considerati il valore del vettore spostamento applicato in maniera esatta. I risultati relativi alla rotazione attorno ad un punto sono stati altrettanto soddisfacenti.

Per quanto riguarda questo secondo caso, sono stati presi in esame alcuni parametri che danno un'idea relativamente della precisione dei risultati che fornisce l'algoritmo. I calcoli sono relativi ad una rotazione pari a  $5^\circ$  attorno al centro dell'immagine. La tabella sottostante riporta: numero di sottoinsiemi (N.elem.) in cui è presente un errore ( $E^*$ ) dell'angolo calcolato rispetto a quello applicato, l'errore percentuale massimo in modulo ( $E\%_{max}$ ), e lo scarto quadratico medio del modulo (SQM).

7x7 elem 64x64	$E^* < 1^\circ$	$1^\circ \leq E^* < 5^\circ$	$5^\circ \leq E^* \leq 10^\circ$	56x56elem 8x8	$E^* < 1^\circ$	$1^\circ \leq E^* < 5^\circ$	$5^\circ \leq E^* \leq 10^\circ$
N.elem.	19	28	4	N.elem.	2715	404	12
$E\%_{max}$	12	48	16	$E\%_{max}$	12	30	17
SQM	1,09	1,87	8,5	SQM	0,02	0,17	2,5

In particolare, sono stati riportati i parametri relativi alla suddivisione più grossolana ( $7 \times 7$  elementi da  $64 \times 64$  pixel) e quella più fine ( $56 \times 56$  elementi da  $8 \times 8$ ). Si tenga presente che gli errori percentuali massimi in modulo sono relativi a spostamenti molto piccoli, (frazioni di pixel); si deve quindi dare maggiore attenzione agli scarti quadratici che sono ottenuti da un calcolo complessivo.

Nel paragrafo precedente si è accennato ai metodi di interpolazione per ottenere i dati in forma continua. Da osservare a riguardo che nel passare da immagini non interpolate ad immagini in cui veniva applicata l'interpolazione bilineare si è notato un abbassamento generale dei valori dei coefficienti di correlazione calcolati, già alla prima iterazione, il che denota una stima di prima approssimazione più vicina al valore esatto. Uguale fenomeno è stato osservato con le funzioni B-spline; in quest'ultimo caso però i tempi di calcolo sono all'incirca 5 volte maggiori. (in media 33s contro 7s per correlare un sottoinsieme  $64 \times 64$  pixels). Da osservare infine che sono necessari circa 25 minuti di calcolo per completare un intero ciclo su una Workstation Iris Indigo.

### Applicazione della tecnica di correlazione digitale ai materiali compositi

Sono state svolte due diversi tipi di prove, variando il tipo di sollecitazione applicata al provino. I provini utilizzati sono laminati in fibra di carbonio e matrice PEEK.

Le prove vengono realizzate posizionando provino sulla base di un microscopio metallografico, dotato di 4 differenti obiettivi ( $6,3 \times$ ,  $12,5 \times$ ,  $25 \times$ ,  $50 \times$ ) su cui è fissato il sistema di carico. Il microscopio è collegato ad una CCD camera priva di obiettivo il cui segnale viene inviato ad un personal computer mediante il quale le immagini vengono acquisite e digitalizzate. Le immagini acquisite vengono successivamente trasferite su una Silicon Graphics Workstation ed elaborate mediante il programma di correlazione digitale. L'apparato sperimentale è schematicamente riportato in Figura 2.

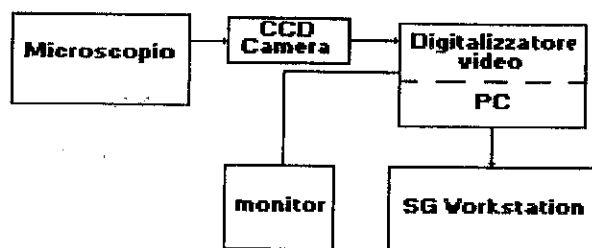


Figura 2. Apparato sperimentale

Prima di iniziare le prove è necessario effettuare una taratura del sistema allo scopo di determinare con precisione l'effettivo ingrandimento dell'immagine della superficie del provino registrata. Questa operazione è stata eseguita utilizzando un reticolo di passo noto. I sistemi di carico utilizzati sono schematicamente riportati in Figura 3.

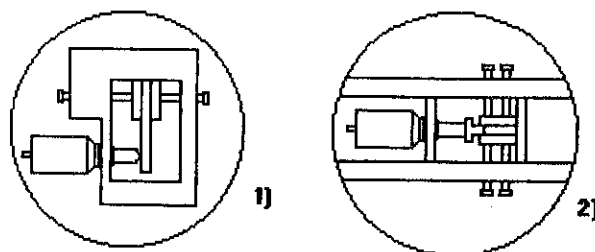


Figura 3. Sistemi di carico utilizzati

Nel primo caso è stata applicata una sollecitazione di flessione. Il provino utilizzato è un laminato  $[\pm 55]_4s$  di lunghezza 52mm e area  $20 \times 2 \text{ mm}^2$ . Questo provino è stato opportunamente preparato in modo tale da mettere in evidenza la struttura con le fibre. Per registrare le immagini è stato scelto l'obiettivo  $12,5\times$ ; è stato quindi determinato che nelle immagini registrate si hanno 5200 pixel/mm nella direzione orizzontale dello schermo e 6320 pixel/mm nella direzione verticale. Quindi, per un'immagine delle dimensioni  $640 \times 480$ , l'area del provino analizzata è pari a  $0,123 \times 0,076 \text{ mm}^2$ .

Acquisita la prima immagine, viene applicato al provino uno spostamento pari a  $10 \mu\text{m}$ , mediante un micrometro, in modo da ottenere l'immagine relativa alla configurazione deformata. In particolare sono state prese in esame tre differenti zone a distanza crescente dall'estremo vincolato e per ognuna di queste sono state effettuate tre prove in successione a carico crescente, per analizzare un campo di spostamenti tra  $10 \mu\text{m}$  e  $30 \mu\text{m}$ . Inoltre le aree analizzate sono state evidenziate sul provino mediante due tacche distanti 1,5mm allo scopo di poter effettuare un calcolo teorico approssimato degli spostamenti nella direzione del carico applicato. Nella tabella seguente per ciascuna delle zone esaminate viene riportato il valore medio dello spostamento nella direzione  $y$  calcolato con il programma di correlazione e i valori teorici approssimati calcolati in corrispondenza della posizione delle due tacche; in tabella sono anche indicate le distanze di ciascuna delle tacche dall'estremo vincolato. Il caso riportato è relativo a  $10 \mu\text{m}$ .

Zona (mm)	$v_{\text{corr.}} [\mu\text{m}]$	$v_{\text{teor.}} [\mu\text{m}]$
I (10÷11,5)	1,10	0,9÷1,42
II(16÷17,5)	4,16	3,8÷5,03
III(18÷19,5)	5,74	5,47÷6,96

Se si considera una variazione lineare dello spostamento medio all'interno di ciascuna delle zone considerate, allora il risultato può considerarsi soddisfacente.

Nel secondo caso è stata applicata una sollecitazione di compressione su un provino  $[\pm 45]_4s$  delle dimensioni  $20 \times 2 \times 22 \text{ mm}$ . In particolare ciascuna prova consiste nell'applicare un carico distribuito perpendicolarmente alla sezione che viene analizzata.

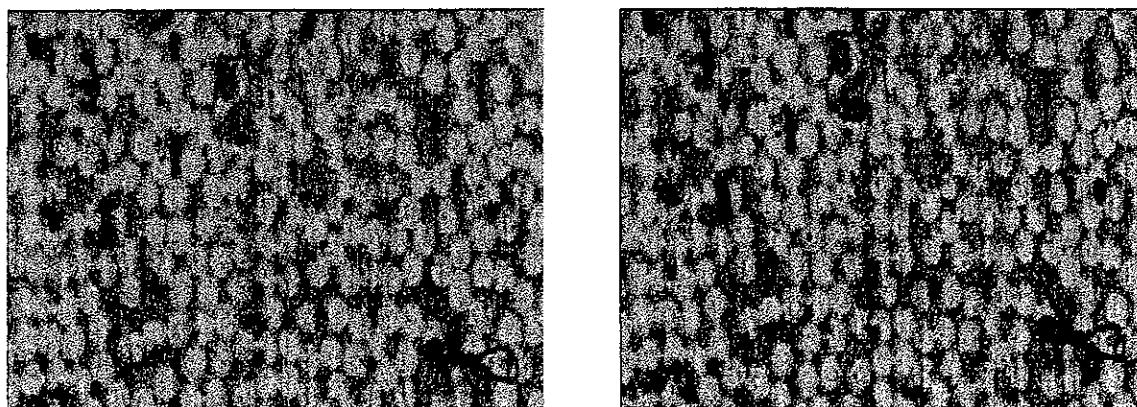


Figura 4. Immagini relative a configurazione indeformata e deformata

Le immagini riportate in Figura 4 sono state ottenute con l'obiettivo  $12,5\times$  e sono relative alla zona centrale della sezione esaminata di area complessiva pari a  $20 \times 2 \text{ mm}^2$ ; esse sono relative rispettivamente alla configurazione indeformata ed quella deformata. Nel caso



riportato, è stato applicato un carico corrispondente ad uno spostamento pari a  $10\mu\text{m}$  nell'estremo libero. Il programma di correlazione ha calcolato uno spostamento  $u_c=5,6\mu\text{m}$ , valore prossimo a quello atteso se si suppone una distribuzione lineare dello spostamento.

### Conclusioni

In questo lavoro è stata implementata di una tecnica di correlazione digitale all'analisi di micro-regioni su superfici di materiali compositi. E' stata anzitutto svolta un'indagine preliminare con immagini generate numericamente mediante le quali è stato possibile verificare che l'algoritmo fornisce i valori delle variabili con soddisfacente accuratezza. E' stato quindi verificato che fosse possibile applicare la tecnica di correlazione digitale all'analisi delle sezioni di provini in composito. I limiti dell'apparato sperimentale utilizzato non hanno però consentito di applicare valori di sollecitazione tali da produrre evidenti deformazioni nelle microregioni esaminate. L'algoritmo di correlazione è risultato comunque sufficientemente accurato. D'altronde uno dei maggiori limiti della tecnica di correlazione, come di tutte le altre tecniche che utilizzano immagini digitali, è legato risoluzione della telecamera utilizzata; per cui una maggiore sensibilità, già elevata, potrebbe essere ottenuta con una CCD ad alta risoluzione.

### Bibliografia

- [1] AA.VV. "Interferogram Analysis: digital fringe pattern measurement techniques", ed. D.W.Robinson e G.T. Reid
- [2] AA.VV, "Speckle Metrology", ed. R.K.Erf
- [3] CHU T.C., RANSON W.F, SUTTON M.A, PETERS W.H., "Applications of digital-image correlation techniques to experimental mechanics", *Experim. Mech.*, Vol. 25 (3), 232-245 (1985)
- [4] KAHN-JETTER Z.L., CHU T.C., "Three dimensional displacement measurements using digital image correlation and photogrammic analysis", *Experim. Mech.*, Vol. 30 (1), 10-16 (1990)
- [5] HE Z.H., SUTTON M.A., RANSON W.F, PETERS W.H., "Two dimensional fluid-velocity measurements by use of digital speckle correlation", *Experim. Mech.*, Vol. 24 (2) 117-121 (1984)
- [6] SUTTON M.A, TURNER J.L., CHAO Y.J., BRUCK H.A., CHAE T.L., "Experimental investigations of three-dimensional effects near a crack tip using computer investigation", *International Journal of Fracture* 53: 201-228 (1992)
- [7] PETERS W.H., RANSON W.F. "Digital imaging techniques in experimental stress analysis", *Opt. Eng.*, Vol. 21 (3), 427-432 (1982)
- [8] BRUCK H.A., MCNEILL S.R., SUTTON M.A, PETERS W.H, "Digital Image correlation using Newton-Raphson Method of partial differential correction", *Experim. Mech.*, Vol. 29 (3) 261-268 (1989)
- [9] SUTTON M.A., WOLTERS W.J, PETERS W.H., RANSON W.F., MCNEILL S.R. "Determination of displacements using an improved digital correlation method", *Image and Vision Computing*, Vol.1 (3), 133-139 (1983)
- [10] PETERS W.H., RANSON W.F., SUTTON M.A, CHU T.C., "Application of digital correlation methods to rigid body mechanics", *Opt. Eng.*, Vol. 22 (6), 738-742 (1983)
- [11] MICHAEL E. MORTENSON, "Modelli geometrici in computer graphics", ed. Mc Graw-Hill
- [12] AA.VV. "Speckle metrology", ed. R.S.Sirohi