

XVII Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana
per l'Analisi delle Sollecitazioni
Ancona, 12 - 16 settembre 1989

SUL COMPORTAMENTO NON-LINEARE DELLE COLONNE IN LEGNO

Filippo Bertolino

Departement de Génie Civil
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
CH - 1015 Lausanne, Suisse

Parole chiave : Elementi Finiti, Legno, Plasticità, Stabilità, Criteri di Resistenza

SOMMARIO

Si descrive il comportamento meccanico di travi in legno per mezzo di un modello bi-dimensionale per un sistema di carichi a due parametri. Il carico è decomposto in forze laterali ed assiali sia concentrate che ripartite. Il comportamento non-lineare del materiale è rappresentato da un modello di scorrimento plastico di tipo associato, mentre la descrizione cinematica ammette un comportamento geometricamente non-lineare con grandi spostamenti ma piccole deformazioni. Il modello è usato per calcolare il carico ultimo della colonna sulla base di un criterio di rottura o sulla base del limite di stabilità laterale. Questo modello trova la conferma sperimentale su delle travi caricate a pressoflessione.

ABSTRACT

A two dimensional, planar deformation model is described for wooden beam columns under a two parameter system of loads. The loading consists of lateral as well as axial components, distributed or pointwise. The nonlinear material behaviour is represented by a plastic flow model while the kinematical description admits geometrical nonlinear behaviour in the sense of large rotations but small strains. The model is useful for the prediction of the ultimate load carrying capacity of beam columns on the basis of a failure criterion or on the basis of general loss of stability. It is verified by checking several tests which have been conducted on beam columns with combined compression and bedding loads.

Filippo Bertolino

disporre di un criterio che ci riporti ad una situazione conosciuta. Un criterio di plasticità può esprimersi nella forma generale seguente:

$$K(r) = f(\{\sigma\}) \quad (2)$$

in cui f è una certa funzione degli sforzi $\{\sigma\}$ e K è un parametro del materiale da determinare sperimentalmente. Il termine K , indicato spesso come sforzo effettivo, può essere funzione del parametro d'incrudimento r .

Il criterio di Tsai-Wu, abbondantemente applicato da una decina di anni ai materiali compositi rappresenta assai bene il comportamento limite del legno [7]. La superficie limite nello spazio degli sforzi si esprime come segue:

$$\{L\}^T \{\sigma\} + \{\sigma\}^T [F] \{\sigma\} = 1$$

$\{L\}$ ed $[F]$ sono tensori degli sforzi del 2 e 4 ordine rispettivamente. Il termine lineare $\{L\}$ prende in considerazione gli sforzi interni e può descrivere un comportamento diverso tra sforzi negativi e positivi.

La determinazione del coefficiente d'interazione $F(1,2)$ pone talvolta dei problemi: esso dovrebbe essere valutato attraverso delle prove di carico bi-assiali, ma non esiste un consenso sul tipo di prove più opportune; in oltre se ne è notata una grande sensibilità agli errori nella valutazione degli sforzi. Liu [10] ha proposto una formula che deriva dal criterio di resistenza di Hankinson molto usato per il legno. Il nostro programma dà all'utente la libertà di scegliere il coefficiente d'interazione normalizzato $F^*(1,2)$ [15].

4.2. Modello di scorrimento plastico

Per studiare il comportamento dei materiali in fase elasto-plastica sono stati proposti numerosi modelli. I più noti sono forse i seguenti:

- modello perfettamente plastico
- modello isotropo
- modello cinematico
- modello anisotropo.

A nostra conoscenza non esistono dei lavori che giustificano, per il legno, la scelta di una delle teorie precedenti. D'altra parte abbiamo potuto constatare attraverso delle prove numeriche che, per dei carichi monotoni, le differenze sono secondarie. Comunque, vista l'anisotropia del legno, ci è sembrato più opportuno adottare il modello anisotropo.

Lo sviluppo progressivo della superficie plastica può essere definito mettendo in relazione lo sforzo effettivo K con la deformazione plastica per mezzo del parametro incrudente r . Si può ammettere che il lavoro incrudente sia funzione solo del lavoro plastico totale W_p . Quindi

$$r = W_p \quad \text{dove} \quad W_p = \int \{\sigma\} * d\{\epsilon_p\} \quad (3)$$

in cui $d\{\epsilon_p\}$ è la componente plastica dell'incremento della deformazione.

Stati di sforzo per cui $f=K$ rappresentano stati plastici, mentre il comportamento elastico è caratterizzato da $f < K$.

Filippo Bertolino

Se poniamo

$$\{a\}^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}, \quad A = \frac{-1}{d\lambda} * \frac{\partial F}{\partial r} * dr$$

abbiamo

$$d(F) = \{a\}^T * d\{\sigma\} - A * d\lambda = 0$$

Dalle relazioni precedenti si può ricavare che :

$$d\lambda = \frac{\{a\}^T [D_e] \{a\}}{A + \{a\}^T [D_e] \{a\}} * d\{\varepsilon\} \quad (7)$$

Se sostituiamo la (7) nella (6) abbiamo

$$d\{\sigma\} = [D_{ep}] * d\{\varepsilon\}$$

in cui

$$[D_{ep}] = [D_e] - \frac{[D_e] \{a\} \{a\}^T [D_e]}{A + \{a\}^T [D_e] \{a\}}$$

Se l'ipotesi (3) è valida, si può dimostrare che A è la tangente locale alla curva $(\sigma - \varepsilon_p)$ uniassiale, trovata sperimentalmente.

Per un materiale incrudente, gli sforzi plastici uniassiali variano all'aumentare della deformazione plastica e quindi anche i parametri anisotropi devono variare in quanto sono funzioni del limite plastico attuale [13]. Alla fine d'una iterazione, in ogni punto del corpo conosciamo sia gli sforzi che le deformazioni. Possiamo dunque calcolare lo sforzo effettivo $K=f(\sigma)$ e possiamo controllare se il punto è in uno stato elastico, elasto-plastico o oltre uno stato limite. Nel primo caso i parametri anisotropi restano costanti, mentre nell'ultimo caso, il calcolo si interrompe. In uno stato elasto-plastico il volume caratteristico di plasticità cambia. Tra i dati che bisogna fornire al programma ci sono anche le curve $(\sigma - \varepsilon)$ nelle direzioni naturali 1 e 2 e la curva di taglio $(\tau - \gamma)$ nel piano 1-2. Se le direzioni naturali e le direzioni di riferimento non coincidono bisogna applicare una rotazione agli sforzi ed alle deformazioni nella base naturale. La variazione dello sforzo limite in ogni direzione (per il modello anisotropo scelto) dipende dalla quantità totale di lavoro plastico fornito in tale direzione. Per esempio nella direzione 1:

$$W_{p1} = \int \sigma_1 * (d\varepsilon_1)_p$$

Bisognerà cercare sulla curva caratteristica corrispondente la combinazione $(\sigma - \varepsilon_p)$ per la quale il lavoro plastico è lo stesso. Lo sforzo così trovato sarà il nuovo limite plastico da introdurre in modo opportuno nei tensori $\{L\}$ ed $\{F\}$.

Filippo Bertolino

La fig. 7 mostra, per $\lambda=127$, la curva carichi/spostamenti ($\lambda_0 F, s$) per $d_0 = L/200$; la fig. 8 mostra la curva ($\lambda_0 F, s$) per la stessa trave priva di difetti, ma perturbata da una forza trasversale pari a 0.1 N.

6. CONCLUSIONI

Il programma di calcolo presentato si è mostrato molto utile per studiare le travi in legno. Esso è capace di prendere in considerazione numerosi fenomeni tipici del legno e lo si può utilizzare sia come supporto nelle prove di laboratorio sia per verificare l'applicabilità di certe teorie sviluppate per altri materiali. Le modifiche necessarie per studiare i fenomeni legati alla viscosità non costituiscono un problema. Rispetto ai limiti contenuti nelle attuali norme europee di calcolo, il nostro modello permette di considerare la non-linearità del materiale. Quando si parla di legno è sempre necessaria una grande prudenza e perciò abbiamo messo in evidenza che i risultati presentati sono validi solo per un certo legno. A causa della sua natura biologica, la dispersione delle caratteristiche meccaniche è molto più marcata che per i materiali da costruzione tradizionali e dunque bisognerebbe sviluppare un programma di tipo probabilistico [11].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bathe K.J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis - Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 07632 (1982).
- [2] Bazant Z.P., Lin F. - Non-local Yield Limit Degradation - Int. Jou. for Num. Meth. in Eng., vol. 26, (1988), pp. 1805-1823.
- [3] Bodig J., Jayne B.A. - Mechanics of Wood and wood composites - Van Nostrand Reinhold Company - 1982.
- [4] Buchanan A.H. - Strength Model and Design Methods for Bending and Axial Load Interaction in Timber Members - Ph.D.Thesis Department of Civil Engineering University of British Columbia, Vancouver, B.C., 1984.
- [5] Crisfield M.A. - An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations. - Int. Jou. for Num. Meth. in Eng. vol. 19, pp. 1269-1289 (1983).
- [6] de Saint Venant B. - Mémoire sur la Flexion des Prismes. Journal de Math. Pures et Appliquées - (Liouville), ser.t.1, 1856
- [7] Gautherin M.T. - Critère de contrainte limite du bois massif - Thèse de Doctorat de 3è cycle - Université Paris VI, ENSET - octobre 1980.
- [8] Hill R. - The Mathematical Theory of Plasticity - Oxford University Press. 1950.
- [9] Lekhnitski S.G. - Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body - Brand statter edit, San Fransisco, 1963.
- [10] Liu J.Y. - Evaluation of the Tensor Polynomial Strength Theory for Wood - J. of Composite Materials, vol. 18 - May 1984.
- [11] Liu W.K., Belytschko T., Mani A. - Random Field Finite Elements - Int. Jou. for Num. Meth. in Eng. vol. 23 pp. 1831-1845 (1986).
- [12] Natter J., Kessel M.H., Sandoz J.L. - Caractéristiques mécaniques du Bois Suisse : Triage - Rapport FN No. 4.746-0.84.12 EPFL, IBOIS, May 1987.
- [13] Owen D.R.J., Figueiras J.A. - Elasto-plastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by the Semiloof Element - Int. Jou. for Num. Meth. in Eng. vol.19, No.4 pp.521-540 (1983).
- [14] Riks E. - Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear structures - Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrgn., 47, (1984) pp.219-259.
- [15] Tsai St.W., Hahn H.T. - Introduction to Composite Materials - by Technomic Publishing Company, Inc. 1980

Filippo Bertolino

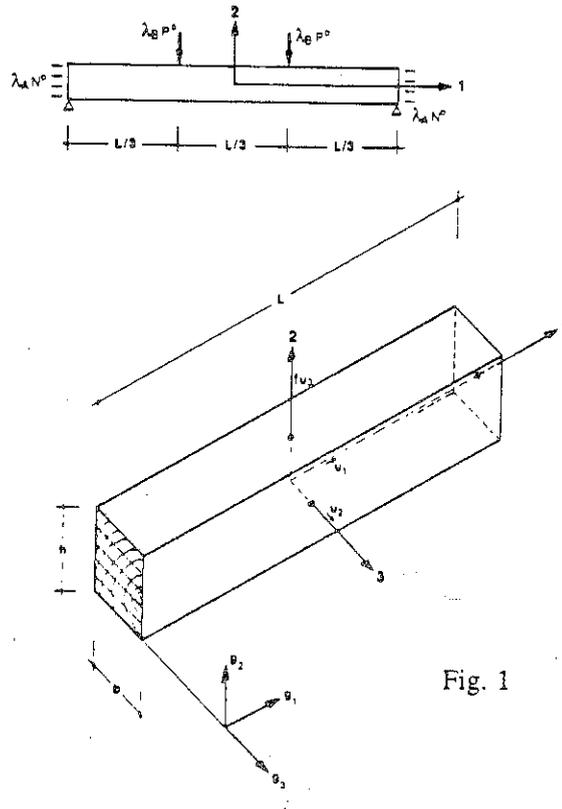


Fig. 1

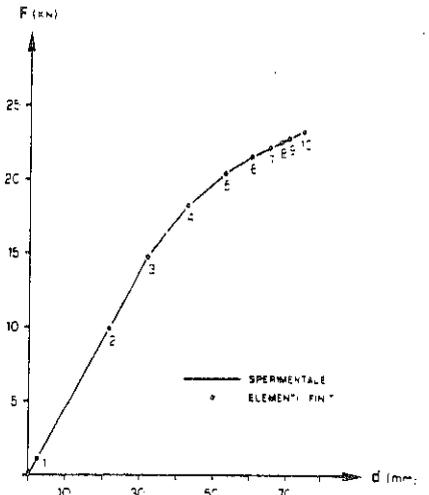


Fig. 2

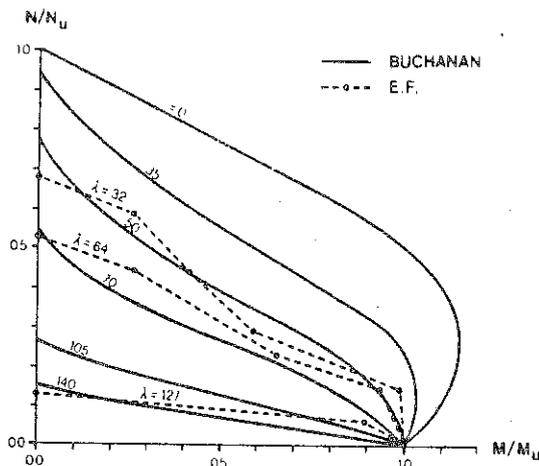


Fig. 3

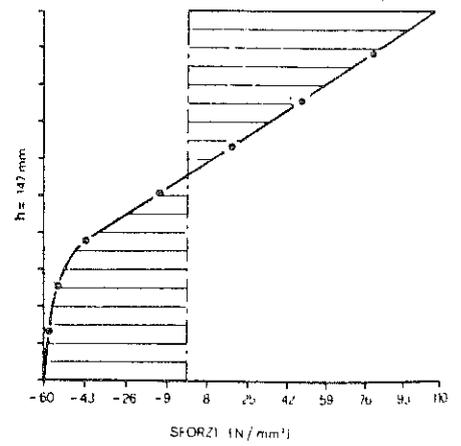


Fig. 4

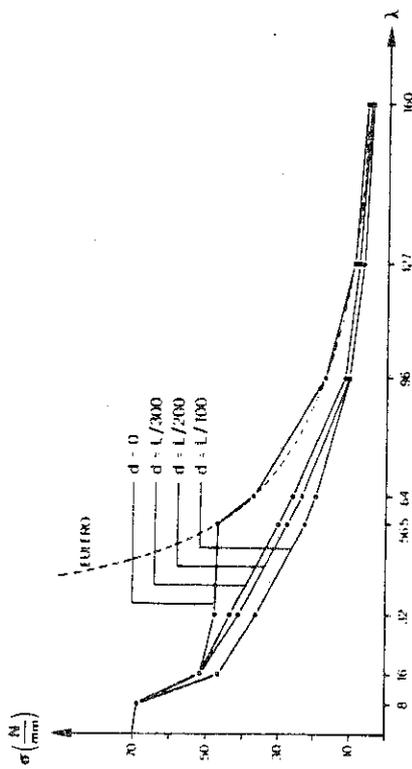


Fig. 5

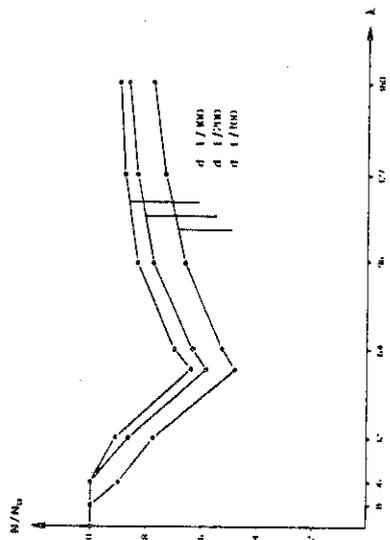


Fig. 6

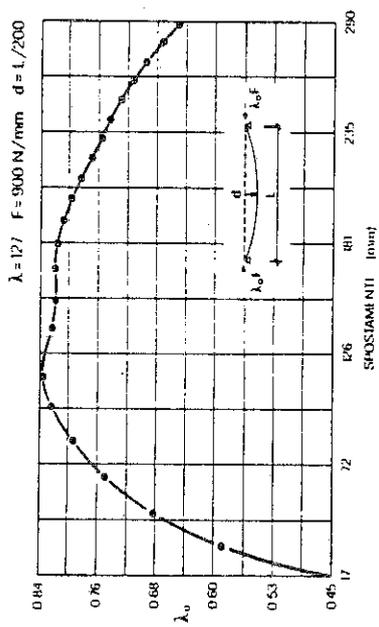


Fig. 7

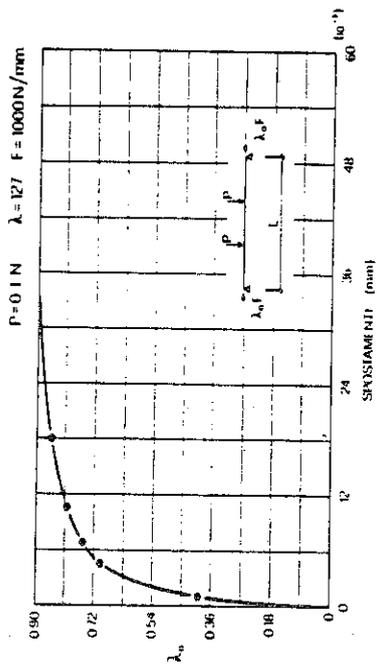


Fig. 8