



Università degli Studi di Cagliari

DOTTORATO DI RICERCA

INGEGNERIA INDUSTRIALE – PROGETTAZIONE MECCANICA

Ciclo XXIV

TITOLO TESI

Analisi teorica, numerica e sperimentale dei
processi di grandi deformazioni nei
materiali duttili

Settore/i scientifico disciplinari di afferenza

ING-IND/14 PROGETTAZIONE MECCANICA E COSTRUZIONE DI MACCHINE

Presentata da:

Luca Francesconi

Coordinatore Dottorato

Prof. Natalino Mandas

Tutor/Relatore

Prof. Antonio Baldi

Esame finale anno accademico 2010 – 2011



Tesi di dottorato:

Analisi teorica, numerica e
sperimentale dei processi di
grandi deformazioni nei materiali
duttile

Indice dei capitoli

Indice dei Capitoli

Introduzione	1
Capitolo 1: Il danneggiamento nei materiali duttili	3
1.1 <i>Il fenomeno del danneggiamento duttile</i>	4
1.2 <i>Approcci e modelli per la descrizione del danneggiamento</i>	9
1.3 <i>La CDM ed Il modello di Lemaitre</i>	12
1.3.1 <i>Calibrazione sperimentale del modello</i>	16
1.4 <i>Il modello di Wierzbicki</i>	19
Capitolo 2: Analisi del danneggiamento: Confronto numerico-sperimentale	24
2.1 <i>L'analisi numerica</i>	25
2.2 <i>Il set-up sperimentale</i>	28
2.3 <i>La correlazione digitale di immagini</i>	30
2.4 <i>Comparazione numerico-sperimentale</i>	33
2.5 <i>Risultati</i>	36

Capitolo 3: Processi di plasticità nei materiali duttili	44
3.1 <i>Microplasticità</i>	45
3.2 <i>Macroplasticità</i>	49
3.2.1 <i>Forma empirica della relazione true stress - true strain</i>	51
3.2.2 <i>La superficie di snervamento</i>	52
3.2.3 <i>Il flusso plastico</i>	56
3.2.4 <i>Plasticità con incrudimento (strain hardening plasticity)</i>	58
3.2.4.1 <i>Incrudimento Isotropo</i>	58
3.2.4.2 <i>Incrudimento cinematico</i>	59
3.2.4.3 <i>Incrudimento misto</i>	61
3.3 <i>Notazione utilizzata ed alcune Key Variables</i>	63
3.3.1 <i>Descrizione spaziale e materiale dei tensori</i>	64
3.4 <i>Isotropia</i>	66
3.5 <i>Cinematica delle deformazioni</i>	71
3.5.1 <i>Deformazioni infinitesime</i>	78
3.5.2 <i>Deformazioni finite</i>	80
3.5.3 <i>Coniugazione nel senso del lavoro: Stress tensors</i>	83
3.6 <i>Anisotropia elasto-plastica</i>	86
3.7 <i>Teoria delle grandi deformazioni</i>	92
3.8 <i>Modellazione dell'anisotropia: Il modello Bathe-Montans</i>	96
3.8.1 <i>Basi teoriche del modello: Cinematica</i>	97
3.8.2 <i>Basi teoriche del modello: Termodinamica</i>	98
3.8.2.1 <i>Stored Energy Function</i>	100
3.8.2.2 <i>Potenziale di Incrudimento</i>	104
3.8.2.3 <i>Termodinamica dei processi irreversibili</i>	106

Capitolo 4: Implementazione del modello Bathe-Montans per analisi elasto-plastiche su solidi anisotropi	108
4.1 <i>Small Strain: Schema del modello e algoritmo di calcolo</i>	110
4.1.1 <i>Algoritmo di small strain basato sulla superficie di snervamento di Hill con incrudimento misto</i>	110
4.1.2 <i>Il principio di massima dissipazione plastica</i>	112
4.1.3 <i>Schema implicito di integrazione degli sforzi</i>	115
4.1.4 <i>Matrice tangente delle piccole deformazioni</i>	120
4.2 <i>Large Strain: Plasticità anisotropa con incrudimento misto</i>	122
4.2.1 <i>Pre-processing</i>	122
4.2.2 <i>Post-processing</i>	125
4.2.3 <i>La matrice tangente delle grandi deformazioni</i>	128
4.2.4 <i>Schema complessivo dell'algoritmo di calcolo</i>	131
4.3 <i>L'implementazione nel software ABAQUS</i>	132
4.3.1 <i>La Routine di calcolo UMAT</i>	134
4.3.2 <i>Risultati e confronti numerici</i>	145
4.3.2.1 <i>Analisi qualitativa dell'anisotropia</i>	150
4.3.2.2 <i>Analisi comparativa: Flangia circolare</i>	154
4.3.2.3 <i>Simulazione di provini circolari intagliati: Acciai anisotropi da pipeline</i>	157
Conclusioni	161
Bibliografia	164

Introduzione

Una parte consistente delle problematiche legate alla progettazione meccanica è rappresentata dalla capacità di inserire nelle analisi ingegneristiche tutti gli effetti di non linearità caratteristici dei materiali duttili, spesso ignorati per questioni descrittive e semplificative.

La considerazione frequentemente usata, basata sull'identificazione del materiale come un *unicum* isotropo, unita ai calcoli progettuali/strutturali solitamente riferiti alla fase elastico-lineare, rendono la teoria di riferimento complessivamente semplice ed efficace, generando così il motivo principale dell'affermarsi lungo gli anni di queste scelte progettuali.

Il continuo sviluppo delle strutture, la ricerca costante di materiali e di design sempre più innovativi e critici costringono però il progettista a fare i conti con tutte quelle situazioni di non linearità in cui si esprimono i materiali, sottoposti a carichi estremi in maniera direttamente connessa alle loro proprietà intrinseche ed alle possibili geometrie impiegate.

Anisotropie, di base o indotte, shear banding, incrudimento isotropo e cinematico, dipendenza dalla velocità di applicazione del carico, effetti termici, deterioramento delle caratteristiche meccaniche iniziali, rappresentano solo una parziale lista dei fattori che, avendo un ruolo importante durante la storia di deformazione di un corpo, rendono l'analisi delle strutture molto più difficoltosa.

I modelli che incorporano nel calcolo questi effetti appena citati, guadagnando in termini di realismo e accuratezza dei risultati, sfociano inevitabilmente in trattazioni matematicamente e processi di identificazione dei parametri molto complessi.

Se quindi da un lato si ha un innegabile effetto positivo, che si concretizza in una migliore descrizione teorica dei fenomeni e nella capacità di fornire accurate previsioni da parte di questa categoria di modelli, altrettanto è evidente l'aumento del costo da pagare sul fronte teorico-computazionale.

Fra i molti fattori di non linearità citati, in questo lavoro si è concentrata unicamente l'attenzione su due effetti - il danneggiamento e le anisotropie - che hanno indubbiamente un ruolo chiave per la corretta modellazione del comportamento dei materiali duttili impiegati nella realizzazione di strutture onshore ed off-shore (oil and gas pipeline) per il trasporto di fluidi.

Per quanto riguarda il danneggiamento, dopo una breve descrizione sui vari approcci che storicamente hanno influenzato le formulazioni utilizzate, sono stati analizzati in dettaglio i modelli di Lemaitre e di Wierzbicki-Xue. La scelta è ricaduta su queste due opzioni per la

diversa filosofia che incarnano ma soprattutto per i diversi effetti eletti come cause principali nel processo di deterioramento delle caratteristiche del materiale durante la deformazione.

Le due formulazioni sono state quindi testate, confrontate e verificate implementando i due modelli tramite delle *user-subroutine* scritte *ad-hoc* su dei software agli elementi finiti e tramite la valutazione D.I.C. dei campi di spostamento/deformazione rilevati sperimentalmente su alcuni provini in alluminio, appositamente costruiti per evidenziare possibili incongruenze fra i risultati proposti dalle due soluzioni.

La seconda parte è invece focalizzata sullo studio delle anisotropie e della plasticità in regime di grandi deformazioni: verranno approfondite le basi teoriche e le conseguenze computazionali, così come le relazioni costitutive per l'approccio isotropo e quello anisotropo.

Durante questo percorso verranno trattate in dettaglio tutte le parti che della teoria della plasticità che nelle ultime decadi hanno guidato la progettazione in queste particolari analisi.

Tutto il background descrittivo verrà utilizzato per introdurre le teorie di deformazioni infinitesime e finite e fare da apripista alla proposta del modello di elasto-plasticità anisotropa di Bathe-Montans.

Il modello Bathe-Montans è stato implementato tramite una UMAT subroutine nel software agli elementi finiti Abaqus e testato numericamente. Verranno presentati alcuni raffronti numerici con modelli meno complessi e alcune evidenze numerico-sperimentali su acciai impiegati nella realizzazione delle offshore pipeline offshore verranno presentati per verificare l'accuratezza e la validità delle soluzioni proposte.

Capitolo 1: Danneggiamento nei materiali duttili

Capitolo 1: Danneggiamento nei materiali duttili

1.1 Il fenomeno del danneggiamento duttile

Con il termine di “materiale duttile” si indicano solitamente tutti quei materiali capaci di sopportare notevoli deformazioni plastiche prima di arrivare alla rottura. La loro controparte infatti (i materiali fragili) sono contraddistinti da una rottura di tipo istantanea prossima al superamento del valore di snervamento.

La duttilità di un materiale, ne danno un esempio lampante i metalli che incarnano in modo preciso questo concetto, è quindi la capacità di resistere oltre lo sforzo di snervamento modificando le caratteristiche geometriche e quelle meccaniche durante il percorso di deformazione.

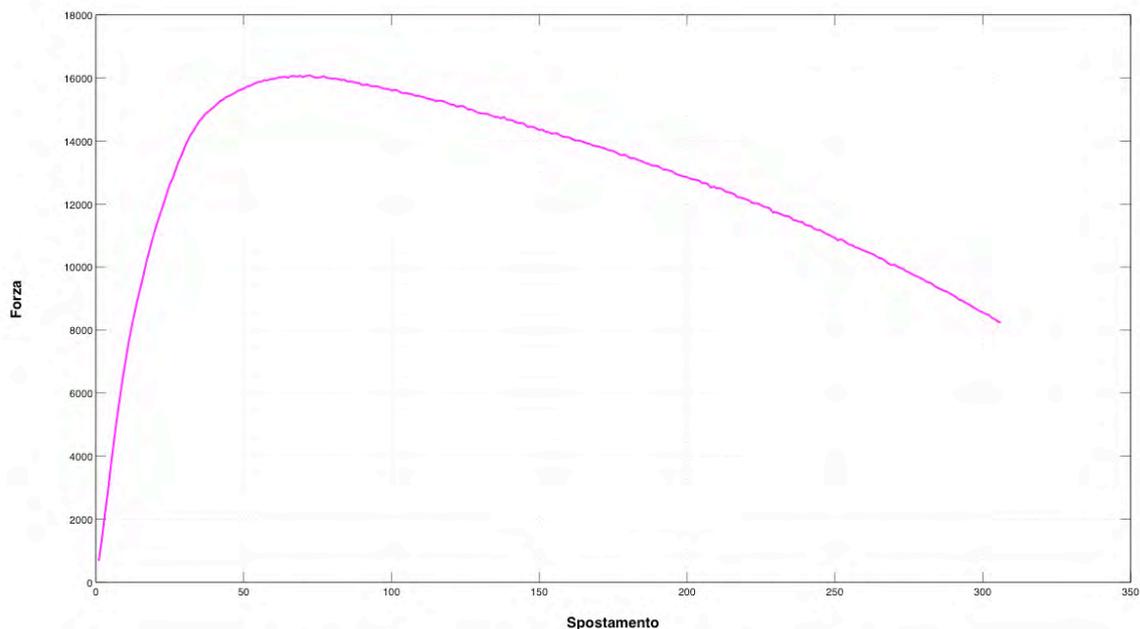


Figura 1 - Curva sperimentale stress-strain per una lega metallica

La figura 1 ben illustra questo appena detto: fino al raggiungimento della sollecitazione di snervamento (indicata con σ_y) la deformazione è definita “elastica” ed il legame fra gli sforzi e le

deformazioni è pressoché lineare. Superato questo limite la deformazione viene definita plastica, il legame fra gli sforzi e le deformazioni diventa non lineare ed, in modo molto semplificato, è possibile asserire che questa deformazione ulteriore viene pagata dal materiale tramite il cambio della sua geometria e delle sue caratteristiche meccaniche. I materiali duttili sono infatti contraddistinti da un campo di deformazione plastica molto più esteso di quello elastico come si può vedere in figura 1.

Se da un punto di vista macroscopico il fenomeno in esame appare semplice, nella meso e micro-scala questo processo viene in essere tramite una commistione di fenomeni, la cui esatta descrizione ed interazione reciproca è ancora ignota [1]. In figura 2 è stata introdotta una schematizzazione per definire in modo chiaro i termini (e la scala dimensionale di riferimento) micro, meso e macro-scala.

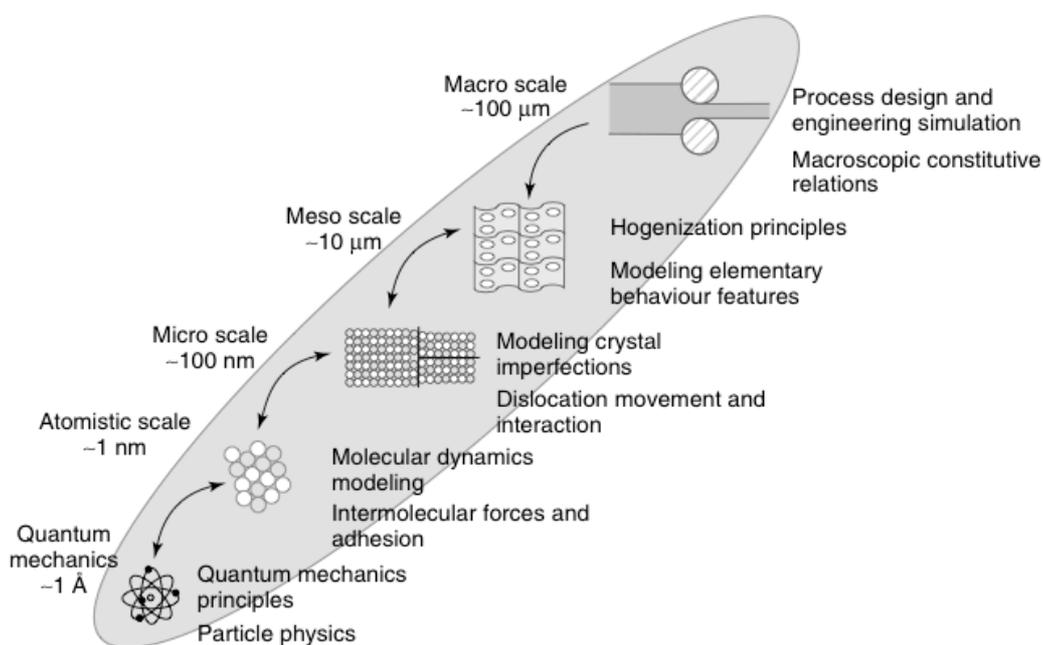


Figura 2 - Diverse scale dimensionali utilizzate nella trattazione con alcuni esempi/situazioni di riferimento. (M. Vaz, E. A. de Souza Neto [56]).

E' opportuno citare alcuni dei principali fattori individuati e ben analizzati da diversi autori [1-6] con il quale il danneggiamento del materiale si verifica nella meso/micro-scala:

- Shear Banding
- Dinamica delle dislocazioni e fenomeni di *piling*
- *Difettosità del materiale*
- *Scorrimento dei piani cristallografici*
- Meccanica dei vuoti

Specialmente l'ultimo punto, la micro-meccanica dei vuoti e dei difetti, risulta essere un aspetto critico nei materiali metallici policristallini sottoposti ad elevate sollecitazioni di trazione.

I vuoti e le difettosità presenti nel materiale, se sollecitati a trazione, tendono ad aumentare la loro dimensione e generare delle nuove porosità che, coalescendo in modo costante fino a formare delle macro-cricche, causano il cedimento meccanico del pezzo nella ben nota forma coppa-cono. Nella figura 3 si evidenziano le tre diverse fasi della rottura duttile di un provino intagliato realizzato con una lega a basso tenore di carbonio

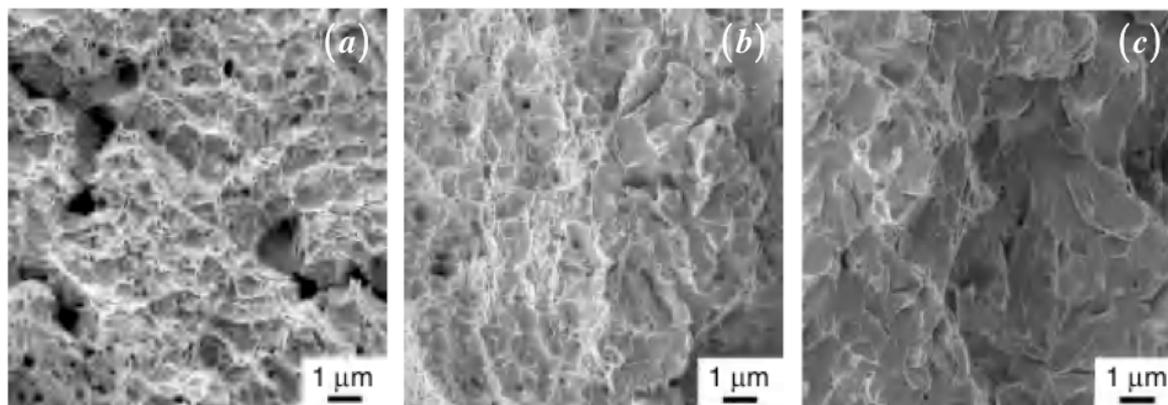


Figura 3 - Analisi granulometrica della frattura duttile (M. Vaz, E. A. de Souza Neto [56]).

La sequenza (a-c, in ordine da sinistra verso destra) mostra le tre diverse zone riscontrabili nelle analisi post mortem dei provini: la prima immagine (3a) corrisponde ad una rottura puramente duttile, in cui i vuoti giocano un ruolo dominante, nelle altre due invece si può vedere la zona di transizione (3b) e la frattura finale puramente fragile (3c).

Questo fenomeno si può legare in modo diretto al fatto che durante il percorso di carico/deformazione il materiale subisce del danneggiamento duttile, sperimentando una notevole riduzione dell'area resistente. Questa riduzione geometrica modifica pian piano le caratteristiche dello stato di sforzo (concentrando la sollecitazione in un'area minore di quella nominale) innescando prima (3b) e poi conducendolo (3c) ad una frattura di tipo fragile.

E' chiaro che la corretta stima del danneggiamento non sia una finalità facilmente raggiungibile: nel corso degli ultimi decenni molti autori hanno provato a suggerire diverse soluzioni e relazioni costitutive [7-13], [14-17] per una quantificazione oggettiva del fenomeno e stabilire un possibile legame con la vita utile del provino testato, ottenendo risultati alterni.

Poiché è praticamente impossibile monitorare i singoli fattori che determinano il deterioramento del materiale e l'evoluzione della fisica interna dei processi che vengono in essere durante la deformazione, le stime sperimentali del danneggiamento sono inevitabilmente delle misure indirette.

La corretta quantificazione del deterioramento è quindi associata alla stima di parametri come la deformazione, sforzi macroscopici, mappe di spostamento/deformazione superficiale ed altri metodi che tramite modelli matematici consentono di effettuare delle stime più o meno accurate in funzione della casistica e delle soluzioni di calcolo scelte.

Fra le tante proposte presentate in letteratura, una efficace metodologia di valutazione della perdita delle proprietà meccaniche in funzione dell'aumento della deformazione è la valutazione ripetuta del modulo elastico durante una prova di trazione.

La figura 4 mostra una prova di trazione a rampe effettuata presso i laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università degli Studi di Cagliari su un provino di AL2024-T351 strumentato con estensimetri. I cicli ripetuti permettono di misurare il cambio nel modulo di elasticità del materiale (che si ricorda essere rappresentato dalla pendenza della curva sforzi-deformazioni nei tratti lineari di carico e scarico) e la sua variazione durante il percorso di plasticizzazione.

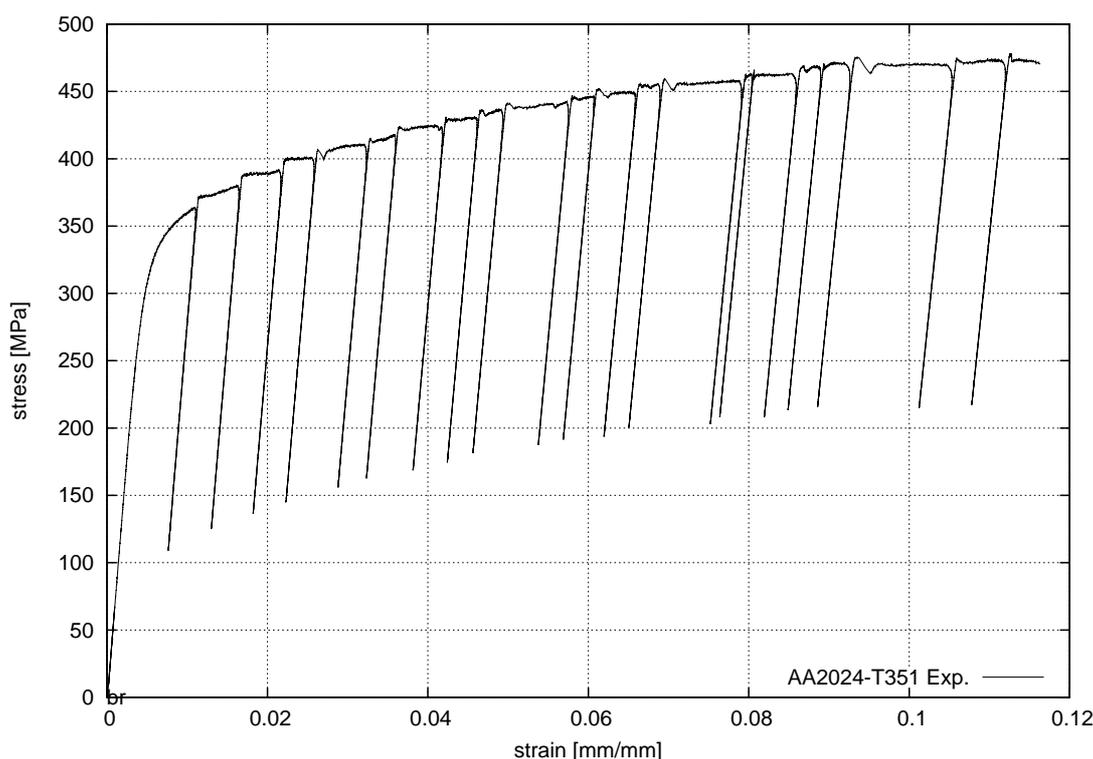


Figura 4 - Prova di trazione a rampe per la valutazione della modifica del modulo elastico

Questa tecnica è anche utilizzata per la calibrazione dei parametri di una importante famiglia di modelli di danneggiamento che verranno introdotti nelle successive parti del lavoro.

La situazione è ancora più complessa se si analizzano diverse metodologie di prova e di carichi agenti. E' noto che i materiali duttili resistono bene alle sollecitazioni idrostatiche σ_H , perché queste agiscono causando un effetto di chiusura sui micro-vuoti e portando quindi ad una riduzione delle criticità associate alle imperfezioni presenti nel materiale. Molti autori, fra cui Wierzbicki, Xue e Bao [25-33], esprimendo la criticità del carico mediante il rapporto fra la sollecitazione idrostatica e la tensione equivalente hanno mostrato quali siano le modalità di frattura del materiale in funzione del tipo sollecitazione agente. Il diagramma in figura 5 riassume le possibili situazioni che si possono verificare.

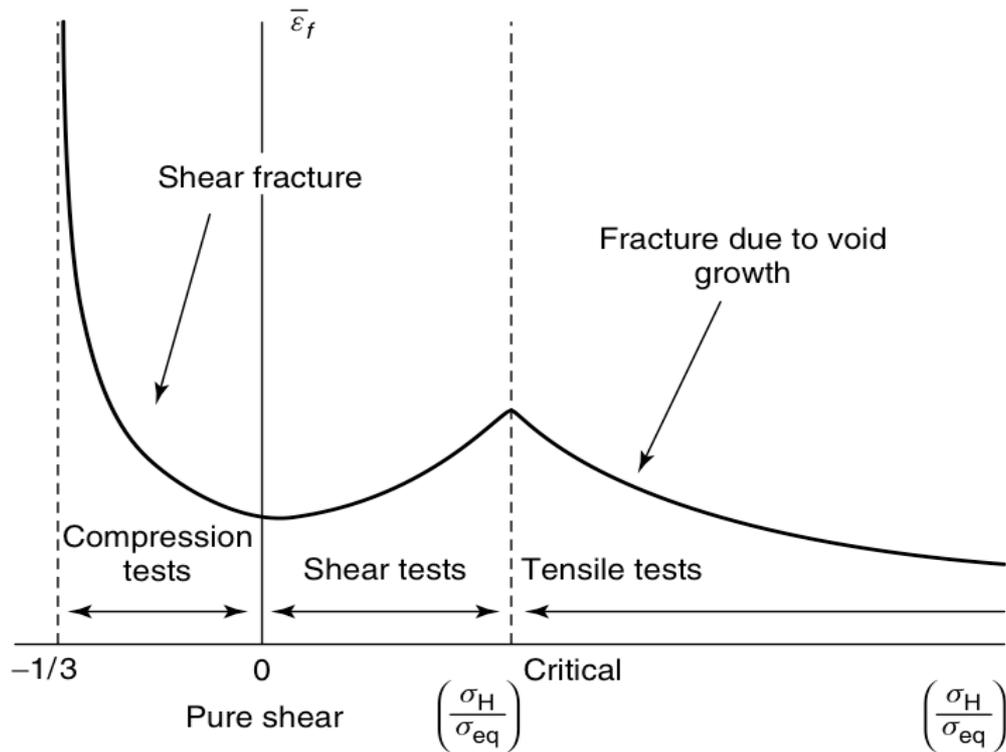


Figura 5 - Differenti tipologie di frattura in funzione della sollecitazione e del test effettuato (M. Vaz, E. A. de Souza Neto [56]).

Dalla figura 5 infatti è possibile evincere in modo chiaro quali siano i meccanismi di frattura associati alle diverse tipologie di carico. Particolarmente importante risulta essere la determinazione della zona critica in cui avviene la transizione fra la rottura causata dalla microdinamica dei vuoti e quella a taglio.

Non essendo quindi possibile una misura diretta dello stato del materiale testato per tutta la durata della vita utile, i modelli di danneggiamento assumono quindi una funzione essenziale nella progettazione meccanica: nel corso di questo capitolo e nel successivo, oltre ad una presentazione dello stato dell'arte ed una breve *review* dei più utilizzati e famosi approcci per la modellazione del danneggiamento duttile, sono stati selezionati due modelli, entrambi appartenenti alla famiglia della CDM (Continuum Damage Mechanics) che verranno implementati, confrontati e verificati con delle mappe di deformazione ricavate su particolari provini di AL2024-T351 per capire l'efficacia delle due soluzioni proposte.

1.2 Approcci e modelli per la descrizione del danneggiamento

Il danneggiamento dei materiali duttili è un fenomeno di difficile interpretazione ed analisi la cui natura dipende non solo dall'entità delle sollecitazioni ma soprattutto dalla loro evoluzione temporale. Possibili soluzioni di questo problema, tramite lo sviluppo di modelli matematici che consentano previsioni sufficientemente affidabili per guidare la progettazione meccanica, sono state proposte sotto varie vesti e approcci.

Le conseguenze sono descritte in modo molto accurato in [17, 34, 35]: molte analisi e *trial* sperimentali hanno prodotto risultati insoddisfacenti per quanto riguarda la determinazione delle reali proprietà dei materiali testati.

Per migliorare questa discrepanza, incrementare le tecniche di design e le capacità descrittive, nel corso degli ultimi 50 anni sono state proposte numerose teorie matematiche per approssimare questo fenomeno. Ripercorrendo questo cammino in modo storico, il danneggiamento è stato prima affrontato con modelli empirici e fin dalle prime battute collegato alla nascita, crescita e coalescenza dei micro-vuoti all'interno delle matrici metalliche (come ad esempio Gurson-Tvergaard-Needleman [10, 11, 13]). Queste teorie poi hanno lasciato il campo a nuove formulazioni che hanno affrontato il tema tramite analisi teoriche più accurate, basate su un approccio di tipo microscopico o macroscopico.

Tali approcci si differenziano per una diversa visione del campo di interesse: mentre quello micro affronta il problema da un punto di vista locale, il secondo ha l'obiettivo di categorizzare il danneggiamento impiegando variabili macroscopiche riferite quindi alle caratteristiche del materiale testato nella sua globalità.

L'approccio del macro-danneggiamento è stato utilizzato da molti studiosi fra i quali spiccano i nomi di Lemaitre [14-20], Voiyadijs [36-38], Chaboche [21, 22], Bonora [39-41] e Krajcinovich [34, 35], che dalla seconda parte del 1900 hanno formulato le basi e poi decretato il successo di quella che viene chiamata "Meccanica del Danneggiamento Continuo" (dall'inglese Continuous Damage Mechanics o C.D.M.).

Numerose esperienze [42, 43] hanno messo in luce il fatto, già ampiamente riscontrato in molteplici applicazioni industriali, che non sia ancora possibile trovare una corrispondenza sufficientemente accurata fra i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche e quelli sperimentali. Questo fatto è ancora più evidente in presenza di sollecitazioni critiche caratterizzate da elevate pressioni idrostatiche ed alti valori della triassialità. E' frequente trovare simili condizioni in operazioni di interesse per aziende di vari settori fra cui spiccano quello automobilistico (l'idroformatura ne è un chiaro esempio) ed il settore offshore tout-court (il caso più comune è rappresentato dai tre metodi di posa delle pipeline S-Lay, J-Lay e Reel-Lay).

Recentemente una nuova soluzione, appartenente alla famiglia dei modelli macro, è stata proposta da Wierzbicki e Xue presso il Massachusetts Institute of Technology, a Cambridge negli Stati Uniti d'America [25-30].

La novità rispetto alle precedenti proposte è rappresentata dall'enfasi posta sul ruolo assunto nel processo dal terzo invariante del tensore degli sforzi (I_3) e da quello del deviatore degli sforzi

(J_3) e dall'introduzione di due parametri; l'angolo di Lode ed un parametro di triassialità, che secondo recenti evidenze numeriche e sperimentali agiscono in modo determinante nel decadimento delle proprietà dei materiali duttili, dall'inizio del processo di carico fino alla rottura.

La vera originalità della teoria non risiede nell'inclusione di questi due fattori nell'analisi; è doveroso ricordare che molteplici teorie con trattazioni tensoriali [17,22] ed ipotesi meno restrittive (includendo fra i fattori in gioco anche le anisotropie del materiale) [36] sono state presentate durante gli anni nella letteratura del settore.

Questi modelli più "evoluti", se da un punto di vista teorico si possono ritenere ben basati, accurati ed esaustivi nella descrizione del fenomeno, richiedono spesso delle procedure di calcolo e di identificazione dei parametri troppo onerose per renderli realmente utilizzabili nella pratica, non dando così la possibilità di identificare un tool utilizzabile nell'analisi del danneggiamento in presenza di stati tensionali critici.

A causa dell'alto numero di teorie e soluzioni proposte per risolvere queste problematiche, connesse con numerose situazioni di calcolo strutturale e con svariati processi industriali, può essere complicato distinguere esattamente le differenze e la validità dei risultati ottenuti.

Infatti, sebbene non esistano allo stato dell'arte attuale dei modelli di danneggiamento di facile calibrazione, le procedure richieste da quello di Wierzbicki-Xue sono considerabilmente più impegnative rispetto a quelle richieste dalla controparte proposta da Lemaitre, sia per quanto riguarda il lato sperimentale, sia nel post-processing dei dati.

Poiché l'identificazione dei parametri del modello Wierzbicki-Xue richiede molteplici test sperimentali sui materiali, nello sviluppo di questo lavoro è stato scelto di utilizzare una lega di alluminio, la 2024-T351, per cui i dati di calibrazione sono facilmente reperibili da alcuni lavori pubblicati [26,29,32,33] e l'intera procedura è esposta in dettaglio nella tesi di dottorato al M.I.T. di Liang Xue [30].

Una diversa soluzione è stata adottata per l'altro modello scelto per cui sono state effettuate in modo completo le procedure di calibrazione secondo quanto descritto in [14] per la valutazione dell'andamento del danneggiamento. Tutte queste procedure verranno discusse dettagliatamente nelle prossime sezioni.

Identificati correttamente i parametri richiesti per la lega di alluminio 2024-T351, i due modelli sono stati implementati tramite apposite user-subroutine scritte in ForTran per il software agli elementi finiti Msc.Marc permettendo così la simulazione di alcune analisi numeriche e la valutazione delle diverse previsioni fornite dai due contendenti.

Le simulazioni numeriche hanno testato i due modelli su geometrie particolari, per evidenziare la loro efficienza della previsione del campo di deformazione sotto l'azione di diverse tipologie di carico.

Per quantificare gli errori commessi dai due modelli, successivamente, sono stati acquisiti sperimentalmente i campi di spostamento tramite la correlazione digitale di immagini (D.I.C.). Le mappe di spostamento/deformazione superficiale sono state ricavate presso i laboratori del

D.I.Me.Ca. (Dipartimento di Ingegneria Meccanica di Cagliari) [44] e rappresentano un arbitro imparziale per la quantificazione delle discrepanze ed identificare quale fra i due modelli fornisca le migliori previsioni.

In questo capitolo, oltre ad una analisi accurata dei due modelli matematici in esame e delle filosofie sul quale essi sono basati, verrà descritto in modo dettagliato il set-up sperimentale realizzato, insieme alla presentazione dei risultati e delle conclusioni ricavate.

L'analisi critica dei risultati ha messo inoltre in evidenza le differenze fra i due approcci offrendo indicazioni importanti per l'analisi e la scelta dei parametri di influenza nel danneggiamento duttile dei materiali.

1.3 La Continuum Damage Mechanics ed il modello di Lemaitre

La C.D.M. fin dalla sua prima formulazione, avvenuta nell'ultima parte degli anni '80 grazie ai lavori di Lemaitre e Chaboche [14-22], si è da subito dimostrata un potente tool per la descrizione del danneggiamento dei materiali duttili. L'approccio descrittivo che differenzia questa teoria dalle altre utilizzate in questo campo, è l'utilizzo di un punto di vista locale unito a delle considerazioni di equivalenza durante l'evoluzione della deformazione.

Nel 1977 Jean Lemaitre ha proposto all'interno di questo *framework*, utilizzando basi termodinamiche, un modello matematico per quantificare l'evoluzione del danneggiamento [20]. Partendo da un piccolo volume di riferimento, noto come "R.V.E." (o *Reference Volume Element*), mostrato nella figura 6, si può asserire che durante il processo di deformazione, a causa della dinamica interna dei vuoti e delle cricche, il materiale perda parte delle sue caratteristiche in relazione all'area effettiva che, per le ragioni espresse precedentemente, si riduce fino alla rottura. Questo significa ovviamente trattare il materiale da un punto di vista macroscopico, considerando globalmente i contributi che modificano le relazioni fra sforzi e deformazioni dovute alla dinamica dei vuoti ed alla presenza di cricche e difetti.

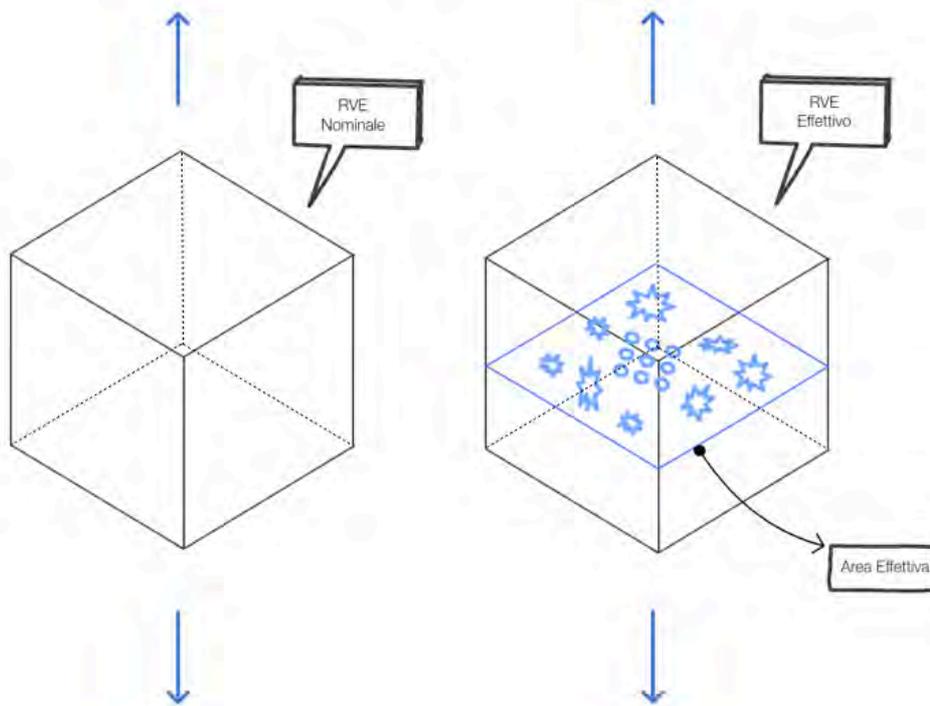


Figura 6 - Schema raffigurante gli RVE nelle due situazioni, danneggiato e vergine

Le aree si intendono ovviamente prese sulla stessa normale alla superficie del RVE, ed inoltre le relazioni usate, così come tutte le variabili, assumono una forma vettoriale e la trattazione complessiva è caratterizzata da un framework di natura tensoriale [15, 17]. Sotto l'ipotesi di considerare il danneggiamento del materiale isotropo e che si possa prescindere dalle

orientazioni dei difetti e delle micro-cricche (considerando una sorta di compensazione media all'interno del RVE) si ottengono delle più maneggevoli equazioni scalari:

$$D = 1 - \frac{A_{eff}}{A_{nom}} \quad (1.3.1)$$

Dove con A_{eff} , si indica l'area resistente effettiva (considerata al netto di vuoti e cricche) mentre A_{nom} è usata per indicare l'area iniziale. Ovviamente la situazione in cui $D = 0$ configura il pezzo vergine non danneggiato mentre, da un punto di vista teorico, $D = 1$ identifica la rottura del pezzo (in quanto associato ad una area nulla). In accordo con gli studi di Lemaitre [14, 16] risulta che la rottura avviene per un valore critico della funzione di danneggiamento e che questo valore critico D_{cr} non è unitario, ma bensì varia in buona approssimazione fra i due valori limite 0.2 e 0.8.

Quindi si può asserire che la variabile scalare D rappresenti proprio il rapporto fra il materiale “pieno” e quello affetto dai vuoti, descrivendo quindi una misura della sezione effettiva. E' anche chiaro che D sia indipendente dalla direzione considerata e dalla normale alla superficie stessa. Il problema della completa determinazione del modello è legato alla corretta identificazione dell'area effettiva, ovvero, alla misura di vuoti e difetti presenti nella sezione resistente durante il processo di deformazione. Da un punto di vista pratico questo sarebbe possibile, una volta note le misure e le forme dei difetti, utilizzando delle tecniche di omogenizzazione ma questa operazione, anche con strumenti opportuni, potrebbe risultare complicata ed onerosa. Solitamente si preferisce quindi utilizzare un approccio di tipo teorico, noto come ipotesi di deformazione equivalente. L'ipotesi di deformazione equivalente afferma che il comportamento del materiale danneggiato (e le leggi che lo descrivono) sia identico a quello del pezzo vergine, ricavato sostituendo nelle relazioni costitutive i valori effettivi a quelli nominali del materiale.

Nel caso uniassiale quindi queste considerazioni possono essere tradotte, per un generico carico T nelle seguenti relazioni:

$$T = \tilde{\sigma} A_{eff} = \sigma_{nom} A_{nom} \quad (1.3.2)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_{nom}}{1 - D}$$

Introducendo l'energia libera di Helmholtz e disaccoppiando l'effetto delle variabili di stato per il comportamento plastico da quello elastico del materiale e dissociando inoltre gli effetti di dissipazione in una componente plastica ed in una funzione del solo danneggiamento, è possibile legare l'evoluzione del danneggiamento alla sua sola parte di dissipazione, riducendo così notevolmente la difficoltà teorica e applicativa dei processi di identificazione connessi al

modello. Proseguendo tramite difficoltosi passaggi fisico-matematici (non riportati nel testo del lavoro) è possibile scorporare l'influenza delle variabili interne legate all'effetto elastico da quelle che risultano legate alla parte plastica e quindi scrivere il potenziale di dissipazione legato al solo danneggiamento ed ottenere successivamente le relazioni di interesse:

$$F = F_p(\sigma, R, X, D) + F_D(Y, p, D) \quad (1.3.3)$$

Dove X , Y , R sono delle variabili di stato legate all'incrudimento ed al processo di danneggiamento.

Ritenendo valida l'ipotesi di piccole deformazioni, i tensori che descrivono le deformazioni stesse nella configurazione spaziale e di riferimento del materiale sono coincidenti ed è la decomposizione additiva della deformazioni totale sicuramente è applicabile. E' allora possibile scorporare il contributo termico-elastico ϵ_e da quello plastico ϵ_p e scrivere:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (1.3.4)$$

la legge di evoluzione del danneggiamento viene assunta nella forma:

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s \dot{p} \quad (1.3.5)$$

Dove $D = 0$ se $\epsilon_p \leq \epsilon_{th}$ ovvero se la deformazione plastica è minore di quella di soglia, "Y" è una funzione che quantifica il rilascio di energia a causa del danneggiamento e può essere derivata dalla (1.3.3) [14]

$$Y = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 R_v}{2E} \quad (1.3.6)$$

Nella (1.3.6) compare la funzione di triassialità R_v , che per il caso isotropo può essere calcolata tramite l'espressione:

$$R_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \quad (1.3.7)$$

in cui, rispettivamente, ν , σ_H , σ_{eq} sono il modulo di Poisson, lo stress idrostatico e la tensione equivalente di Von Mises.

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D} \quad \text{con} \quad \sigma_{ij}^D = \text{Deviatore dello stress} = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij}$$

\dot{p} rappresenta invece la variazione di deformazione plastica accumulata, che viene definita in funzione della superficie di snervamento scelta nel modello.

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (1.3.8)$$

Nel caso di analisi monodimensionale si ottiene che $\dot{p} = |\dot{\epsilon}_p|$. Per esplicitare completamente la Y è necessario utilizzare lo stress effettivo nelle relazioni costitutive che governano la fase elastica, come mostrato nella (1.3.8)

1.3.1 Calibrazione sperimentale del modello di Lemaitre

Il modello di Lemaitre necessita, per la completa procedura di identificazione sul materiale, di 6 diversi parametri tutti determinabili tramite delle prove sperimentali. Questi parametri sono:

1. Il danneggiamento iniziale D_0 con cui il materiale inizia il percorso di carico e la deformazione plastica ϵ_{th} di soglia per quanto riguarda la nucleazione dei microvuoti.
2. Il danneggiamento finale D_{cr} e la deformazione finale a rottura ϵ_{cr} .
3. L'esponente s di danneggiamento ed infine S

Tutti i cinque parametri, seguendo quanto dimostrato in [14, 20, 18], sono determinabili tramite una singola prova di trazione, svolta rispettando delle particolari modalità di esecuzione. Usando un provino con una geometria *hourglass* (clessidra) e strumentandolo utilizzando degli estensimetri è possibile misurare l'accumulo del danneggiamento tenendo traccia delle variazioni del modulo di Young, in quanto:

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (1.3.9)$$

Dove E è il modulo di elasticità longitudinale calcolato ripetutamente durante la prova ed E_0 rappresenta il valore di partenza.

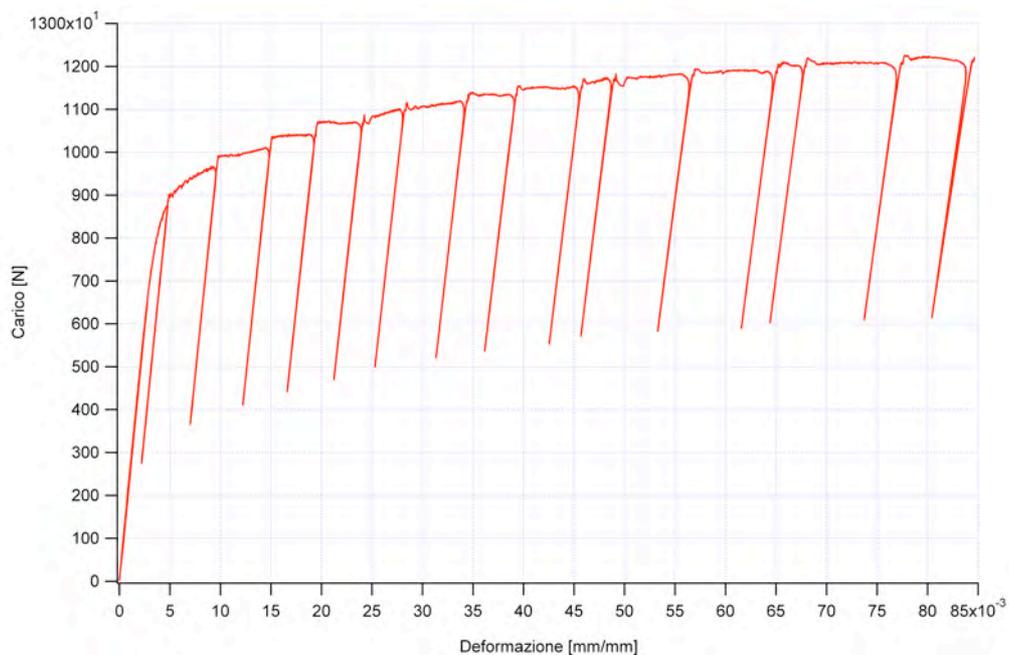


Figura 7 - Procedura di calibrazione a rampe. Curva sperimentale carico-deformazione

Risulta ovvio che la deformazione ed il parametro critico di danneggiamento verranno ricavati mediante la rottura del provino, mentre per ϵ_{th} il discorso è meno banale: ϵ_{th} rappresenta il valore limite oltre cui la non linearità del danneggiamento in fase di accumulazione risulta manifesta, ovvero quando, dopo la fase elastica e lo snervamento del materiale gli incrementi della variabile D assumono caratteristiche esponenziali. Questo può essere determinato quindi in forma puramente deduttiva, oppure per via inversa tramite la (1.3.9) successivamente alle procedure di calcolo.

Questa procedura ovviamente non consente di stimare il danneggiamento iniziale che dipende dalla storia di carico precedente (e quindi sconosciuta all'inizio dell'analisi). Il danneggiamento critico " D_{cr} " può invece essere dedotto ma il valore calcolato dipende in modo molto stretto dai parametri rilevati sperimentalmente.

La figura 7 mostra invece una valutazione sperimentale della prova multi-rampa eseguita su un provino di AL 2024-T351 presso il laboratorio di Prove sui Materiali e Meccanica Sperimentale dell'Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, utilizzando il seguente set-up, visualizzabile anche nel complessivo riportato nell'immagine 8:

- Macchina di prova: MTS 370, Carico massimo attuatore 100 [KN], Corsa attuatore: 200 [mm]
- Estensimetri:HBM: 120 [Ω] ± 3 %, Gauge factor: 1.91 ± 1 . 5 %
- Sistema di acquisizione dati: HBM Quantum X, Modello MX840



Figura 8 - Set-up sperimentale utilizzato nelle prove. Laboratorio di Prove sui Materiali e Meccanica Sperimentale, D.I.Me.Ca

Realizzando un apposito programma di prova è stato possibile far compiere al provino diverse rampe di scarico elastico lungo tutta la parte plastica delle deformazioni (figura 7), tramite cui è stato possibile ricavare la variazione del modulo elastico e, per via indiretta, il danneggiamento D . Durante l'esecuzione della prova il programma consente inoltre di mantenere il provino in una condizione carica di stand-by mentre gli operatori procedono alle ripetute sostituzioni degli *strain-gauge* man mano che questi cedono a causa delle ingenti deformazioni plastiche.

In tabella 2, invece, sono riportati i valori finali per i parametri di calibrazione considerati con i metodi di *fast identification* indicati in [14, 15, 18, 19] e con la prova di trazione a rampe multiple.

Tabella 2 - Parametri di calibrazione per il modello Lemaitre

Materiale	ϵ_{th}	S	D_{cr}	D_0	s
Fast Identification	0,095	1,213	0,00587	0,0000	2,05
Ramps	0,00972	3,83	0,29	0,0000	1,306

1.4 Il modello Wierzbicki-Xue

La maggior parte dei modelli di danneggiamento duttile citati in questo lavoro, utilizzano come condizione di snervamento e come base per determinare la superficie di frattura, la teoria di Von Mises, ovvero focalizzano il centro del discorso sul secondo invariante degli sforzi, nella valutazione della resistenza del materiale. Questo è stato dimostrato [24, 25] essere un fattore limitante nelle analisi che coinvolgono grandi deformazioni, plasticità e danneggiamento duttile. In particolare, si è potuto osservare in alcuni studi [42], che dall'analisi dei dati a rottura, in funzione della triassialità T e dai percorsi di deformazione, numerosi approcci di simulazione del danneggiamento non si sono dimostrati sufficientemente accurati. Fra il 2005 ed il 2006 Wierzbicki, Xue et al. [26-33], hanno presentato alla comunità scientifica un nuovo modello per la descrizione del danneggiamento, enfatizzando il ruolo assunto dalla pressione idrostatica e dall'angolo di Lode. La formulazione stabilisce infatti un forte legame fra i processi in gioco edue funzioni, legate all'angolo di Lode ed alla sensitività della pressione idrostatica, descrivendo così il deterioramento del materiale lungo la sua storia di carico/deformazione.

Si consideri il diagramma in figura 9; lo stato di sforzo del materiale può essere rappresentato nel sistema di tensioni principali, dove è anche possibile visualizzare l'asse idrostatico e descrivere il piano ottaedrico sul quale si definisce l'angolo di lode.

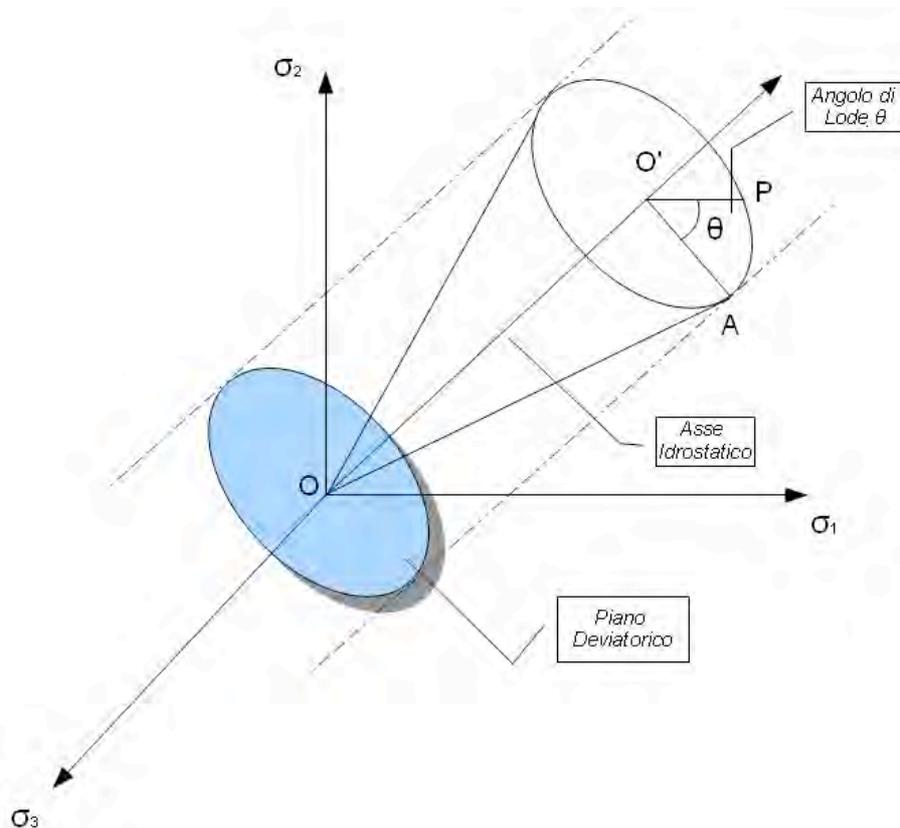


Figura 9 - Rappresentazione dell'angolo di Lode nello spazio delle tensioni principali

Sempre dalla figura 9 si nota anche che l'asse idrostatico ed il piano ottaedrico risultano ortogonali e, di conseguenza, risultano essere indipendenti da un punto di vista analitico. Questo importante fatto offre il vantaggio di permettere la formulazione di due equazioni indipendenti, la cui combinazione fornisce proprio il *fracture strain envelope*.

Tutta la teoria si regge su alcune ipotesi chiave che è opportuno puntualizzare:

- Un aumento di pressione idrostatica aumenta le proprietà duttili del materiale;
- Il danneggiamento ha caratteristiche comparabili su tutti i percorsi di carico proporzionale deviatorico per una pressione idrostatica fissata.
- La duttilità assiale è solitamente più alta di quella tangenziale quando la pressione è tenuta costante;
- La legge di snervamento utilizzata è quella di Von-Mises così come la *legge di flusso plastico*;
- Esiste un valore limite della pressione p_{lim} oltre il quale non si può avere danneggiamento;
- Il danneggiamento duttile è *path-dependent* e si accumula in modo non lineare;

Sotto tutte queste assunzioni il *fracture strain envelope* assume la seguente forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{fo} \mu_p(p) \mu_\chi(\chi) \quad (1.4.1)$$

Il primo parametro, ε_{fo} , rappresenta il valore di riferimento della deformazione a frattura (con uno sforzo equivalente nullo), la seconda, $\mu_p(p)$, è invece una funzione della pressione idrostatica, mentre la terza, $\mu_\chi(\chi)$, è funzione dell'angolo di Lode. Tutte e tre saranno ora descritte con un dettaglio maggiore.

Per quanto concerne la dipendenza dalla pressione idrostatica, l'effetto ad essa imputata è che al crescere di questa si sperimenta in modo univoco un aumento della duttilità [25]. Questo effetto è certamente collegabile al fatto che la compressione triassiale riduce la propagazione dell'effetto di intaglio innescato dalla coalescenza dei vuoti, limitando anche la crescita e l'aggravarsi dei difetti interni e delle cricche preesistenti.

Per descrivere questo comportamento è stata assunta una legge logaritmica:

$$\mu_p = 1 - q \log\left(1 - \frac{p}{p_{lim}}\right) \quad (1.4.2)$$

Dove $p = -\left[\frac{1}{3}\right]\sigma_{ii}$ è la pressione idrostatica, p_{lim} rappresenta invece la pressione limite oltre cui non può avvenire danneggiamento e q è un parametro di forma.

La seconda funzione della (1.4.1) è invece intrinsecamente legata all'angolo di Lode ed è quindi legata alla componente deviatorica del tensore degli sforzi. La (figura 9) mostra una rappresentazione nello spazio delle sollecitazioni principali (o spazio di Haigh-Westergaard); si può notare che nel piano ottaedrico l'angolo di Lode descriva lo stato di sforzo deviatorico. Per darne una più comoda e chiara descrizione, è conveniente introdurre un nuovo parametro che rimpiazza l'angolo di Lode tramite quello che prende il nome di *stress ratio* χ , compreso fra 0 ed 1, e definito tramite un rapporto fra le tensioni principali:

$$\chi = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.4.3)$$

In alternativa, l'angolo di Lode può essere ricavato, grazie ad alcune relazioni trigonometriche applicate su piani ortogonali all'asse deviatorico dello spazio di Haigh-Westergaard, mediante la relazione:

$$\tan(\theta_i) = \frac{-\mu_i}{\sqrt{3}} \quad (1.4.4)$$

dove:

$$\mu_i = \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \quad (1.4.5)$$

$$-30^\circ \leq \theta_i \leq 30^\circ$$

L'evidente parentela fra la (1.4.3) e la (1.4.5) consente di utilizzare entrambe le relazioni in maniera essenzialmente analoga. Utilizzando queste due diverse possibilità e seguendo una strada euristica, è stata formulata una funzione che esprime il legame fra il *fracture envelope* e l'angolo di lode.

$$\mu_\chi = \begin{cases} \frac{\sqrt{\chi^2 - \chi + 1}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma} - 2\right)\chi} & \text{con } 0 \leq \chi \leq 0.5 \\ \frac{\sqrt{\chi^2 - \chi + 1}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma} - 2\right)(1 - \chi)} & \text{con } 0.5 \leq \chi \leq 1 \end{cases} \quad (1.4.6)$$

in cui γ è una costante del materiale ottenuta dal rapporto fra le deformazioni a rottura applicando sollecitazioni di trazione e compressione (a pressione idrostatica costante).

Questa formulazione degenera in un esagono quando $\gamma = \sqrt{3}/2$.

Tramite le relazioni (1.4.3) (1.4.5) e (1.4.6), è possibile ricavare l'evoluzione del danneggiamento e delle caratteristiche meccaniche del materiale.

Al verificarsi dello snervamento e durante la durata del processo di plasticizzazione, le proprietà meccaniche del materiale cambiano in modo continuativo. Mentre questo accade altri due fenomeni connessi, molto strettamente ma distinti, devono essere prendere in esame: da un lato si ha l'accumulo del danneggiamento e dall'altro si riscontra una variazione nella duttilità e nella rigidità del solido. Il concetto base è che, durante la crescita del danneggiamento il materiale si deteriora ed è fondamentale descrivere questo processo tramite una appropriata e realistica relazione costitutiva.

Seguendo la strada aperta da Manson-Coffin e Miner-Palmgren [45-49] è stata scelta una legge esponenziale per descrivere l'evoluzione del danneggiamento nel tempo:

$$dD = m \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f} \right)^{(m-1)} \frac{d\varepsilon_p}{\varepsilon_f} \quad (1.4.7)$$

Nella (1.4.7) D rappresenta il danneggiamento, ε_c è definita come la deformazione plastica a rottura per il carico imposto, mentre ε_p è la deformazione plastica generica ed è ovviamente variabile, essendo definita per un qualsiasi percorso di deformazione. m è invece definito come l'esponente del danneggiamento.

D varia fra zero (materiale vergine) ed il valore unitario (rottura) ed è allora possibile scrivere:

$$D = \int_0^{\varepsilon_c} dD = 1 \quad (1.4.8)$$

Con il procedere delle deformazioni non cambiano le proprietà intrinseche del materiale base ma si verifica una riduzione di area resistente, che si traduce inevitabilmente in una minore capacità di sostenere i carichi cui la struttura è soggetta.

Sotto questo assunto è possibile esprimere il comportamento macroscopico del materiale come una funzione delle caratteristiche del materiale vergine, deprezzate tramite un opportuno fattore riduttivo β , chiamato *weakening factor*.

$$\sigma_{eq} = (1 - D^\beta) \sigma_M \quad (1.4.9)$$

Dove β è anche l'esponente del danneggiamento. Essenzialmente, un valore unitario di questo parametro implica che le perdite di duttilità e rigidità dovute al danneggiamento del materiale hanno uguale peso nel processo.

Presso il *Impact and Crashworthiness Laboratory* del M.I.T. sono state anche eseguite le prove di calibrazione del modello in esame relative alla lega 2024-T351.

Una identificazione completa dei parametri richiesti necessita di una campagna sperimentale non banale, in quanto implica varie prove meccaniche per più valori di pressione idrostatica e di stress ratio.

Queste prove inoltre includono valutazioni di compressione cilindrica (C.T.S.), trazione di barre circolari con e senza intagli e flessione su tre punti (T.P.B.)

A causa dell'impossibilità di ripetere la calibrazione in modo esatto, come anticipato precedentemente, è stata quindi effettuata la scelta di utilizzare un materiale già calibrato [30]. Il set di parametri per la lega di alluminio 2024-T351 è riportato nella tabella 3.

Tabella 3 - Calibrazione parametri finale. Modello di Wierzbicki-Xue

Materiale	ε_{fo}	p_l	q	γ	m	β
AL2024-T351	0.8	800 [MPa]	1.5	0.4	2.0	2.0

Capitolo 2: Analisi del danneggiamento: Confronto numerico-sperimentale

Capitolo 2: Analisi del danneggiamento: Confronto numerico-sperimentale

2.1 L'analisi numerica

I due modelli descritti nel capitolo precedente sono stati implementati nel software agli elementi finiti Msc.Marc attraverso la scrittura di due FORTRAN user-subroutine dedicate. L'utilizzo di user-subroutine in software agli elementi finiti sta diventando una pratica sempre più comune in quanto consente di associare la potenza e l'efficacia di strumenti commerciali ben testati, user-friendly e programmati per una grande casistica di analisi, con le esigenze di innovazione e nuove proposte richieste dai lavori di ricerca.

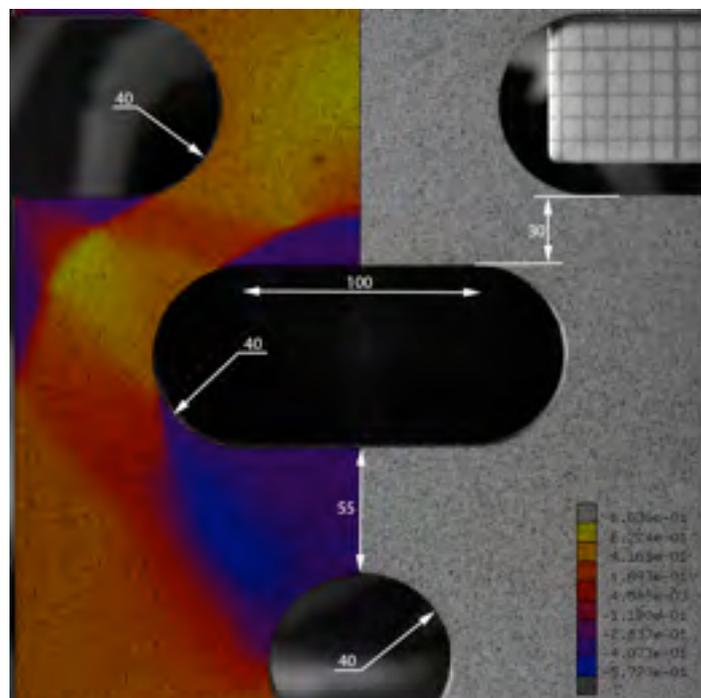


Figura 1 - Geometria del provino progettato per evidenziare il comportamento del materiale al alti " χ "

Dall'analisi numerica, tramite delle valutazioni basate sulla teoria e sulle equazioni costitutive dei modelli, ci si aspetta che le previsioni fornite dalle due soluzioni siano simili o coincidenti per tutte le analisi caratterizzate da bassi valori della triassialità, al contrario, notevoli differenze sono attese quando vengono generati alti valori di χ .

Per verificare la considerazione appena fatta e realizzare un'analisi significativa, sono stati progettati e testati dei provini che sottoposti ad una prova di trazione monoassiale siano caratterizzati da una rottura prevalentemente legata al taglio. Per far questo è stata impiegata una particolare geometria (figura 1).

Sempre nella figura 1 sul lato sinistro è visualizzabile la mappa dei valori di triassialità T , realizzata con il software agli elementi finiti Msc.Marc all'inizio della storia di carico, dove

$$T = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \quad (2.1.1)$$

A causa della loro definizione, considerare la funzione T o la funzione χ ai fini qualitativi di individuare le zone ad elevato comportamento deviatorico è indifferente. La mappa in figura 1 consente anche di capire dove si attende la rottura del provino: il sottile lembo di materiale in alto a sinistra, compreso fra la gola ovale della parte inferiore e l'intaglio laterale, mostra una maggior criticità ed è proprio quello il luogo in cui è atteso l'innescò della frattura.

Scritte le user-subroutine per implementare i due modelli di danneggiamento di Lemaitre e Wierzbicki si è proceduto alla modellazione del provino. In figura 2 è stata riportata la mesh utilizzata caratterizzata dai seguenti parametri:

- Tipo di elementi: Triangolari isoparametrici B-Bar (elemento 124 della libreria MSC-Marc)
- Tipo di analisi: *Plane stress*
- Numero di nodi: 16765
- Numero di elementi: 8182

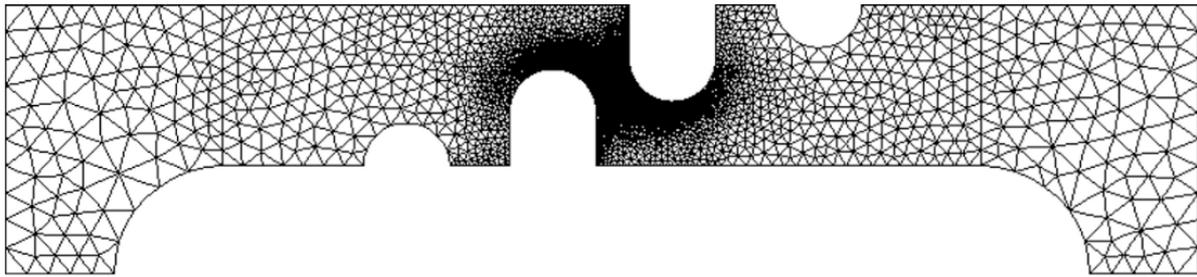


Figura 2 - Mesh del provino realizzata con il software Msc.Marc

Per quanto riguarda la parte computazionale e l'algoritmo di calcolo, le user subroutine scritte per l'implementazione dei due modelli vengono utilizzate dal programma Msc.Marc dopo ogni step e passo di carico, che in questo caso sono stati presi coincidenti. Più in dettaglio, le user-subroutine prendono parte al loop iterativo che viene eseguito durante la procedura di assemblaggio, successivamente vengono poi chiamate continuamente fino al raggiungimento dei valori di convergenza. Ottenuti i valori di convergenza per gli sforzi e per le variabili nodali alla fine di ogni incremento, le subroutine vengono chiamate in sostituzione del codice di default nelle analisi di danneggiamento secondo la card *UDAMAGE. Una volta calcolati i valori di danneggiamento del materiale, il software è in grado di modificare le proprietà del materiale e adattare la legge stress-strain tramite la *WKSLP che guida l'aggiornamento dello stress di snervamento e le caratteristiche della curva di incrudimento.

Una volta realizzate le mesh ci si è chiesti quale previsione fosse oggettivamente la migliore e quale fosse la via oggettiva più significativa per comparare i due modelli.

Come precedentemente accennato, non è possibile avere una quantificazione sperimentale diretta del danneggiamento duttile di un materiale. Ne deriva che l'individuazione di un criterio oggettivo in grado di classificare i modelli sulla base di canoni come l'efficacia e l'esattezza della previsione è legato a misure indirette.

In questo lavoro per assolvere questo scopo è stata scelta la Digital Image Correlation che verrà affrontata nel prossimo paragrafo. Tramite il software DICFEM sviluppato dal prof. Bertolino del Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Cagliari è stato possibile utilizzare la *digital image correlation* rilevando sperimentalmente delle mappe di deformazione/spostamento del provino durante la prova di trazione monoassiale. Questo ha permesso di evidenziare le differenze nelle risposte fornite dai due modelli e quantificare il gap fra l'analisi numerica e quella sperimentale.

2.2 Il set-up sperimentale

Presso il laboratorio di Prove Materiali del D.I.Me.Ca. è stato allestito un *set-up* sperimentale per realizzare la correlazione digitale durante una prova di trazione monoassiale utilizzando il provino descritto nelle due precedenti sezioni.

Lo schema del *set-up* è riportato nella figura 3.

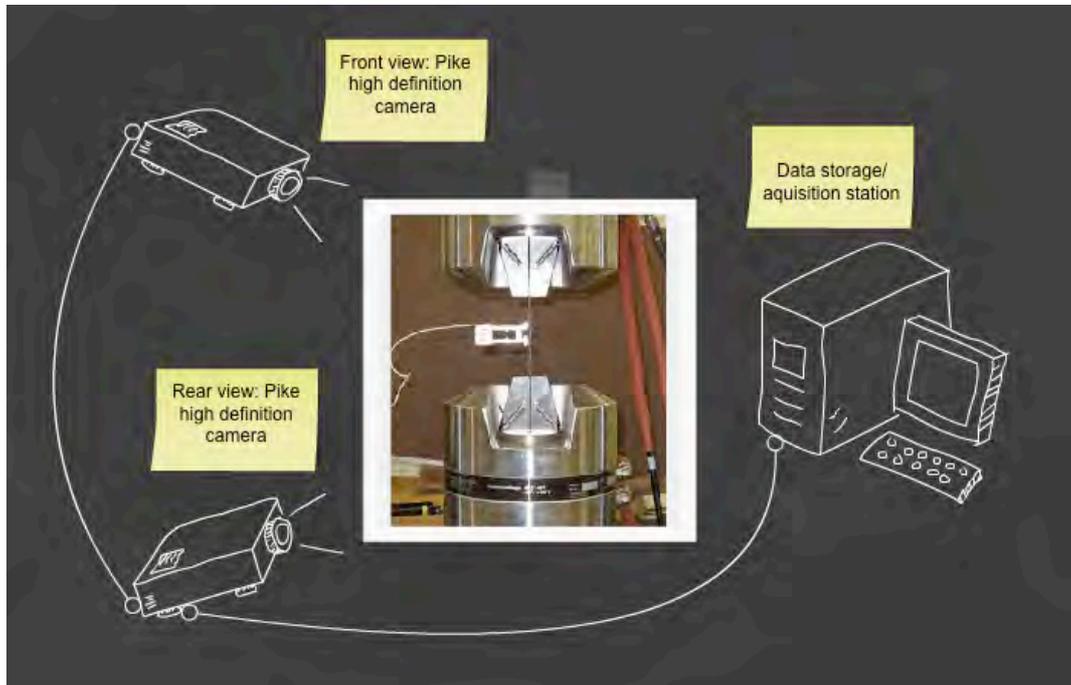


Figura 3 - Schema del set-up di acquisizione immagini usato per eseguire la D.I.C. sul provino mostrato in figura 1

Sono state utilizzati gli strumenti e le apparecchiature qui elencate:

- Macchina di prova: MTS LandMark 370 *tensile testing machine*
- Fotocamere: Allied Vision F421- B Pike high resolution
- Gruppo ottico "Front": Edmund 62901 telecentric lens
- Gruppo ottico "Rear": Schneider Kreuznach Macro camera lens
- Sistema di acquisizione e trigger delle telecamere: HBM Quantum X MX840

Le immagini sono state registrate utilizzando due fotocamere monocromatiche Allied Vision F421- B Pike ad alta risoluzione, posizionate in modo da inquadrare entrambi i lati del provino. L'intento di fondo nell'utilizzo di due dispositivi è di monitorare sia la porzione di provino, in cui si realizza la maggiore concentrazione degli sforzi, sia controllare la situazione complessiva da un

punto di vista più ampio. In figura 5 e 6 è possibile vedere la differenza fra i due campi ripresi dalle telecamere.

Per realizzare al meglio questo intento sono stati impiegati due sistemi ottici molto diversi: la fotocamera frontale (posizionata in modo da riprendere il dettaglio dell'area di frattura) è stata equipaggiata con un telecentrico Edmund 62901, quella posteriore invece, utilizzata per la ripresa più larga del provino, è stata equipaggiata con un sistema di lenti macro Kreuznach della Schneider con un opportuno numero di distanziali. Tutte le immagini sono state acquisite a 14 bit e con una frequenza di campionamento di 1 immagine/secondo. Le prove sono state condotte in controllo di spostamento e l'incremento è stato fissato pari ad 1 mm/minuto.

Tutte le prove sono state condotte sulla macchina MTS LandMark 370; per realizzare un sistema stabile e funzionale per la D.I.C. un profilato curvo di alluminio (di raggio di 50 cm) è stato fissato alle traverse della macchina (capitolo 1, figura 8) con l'intento di poter maneggiare il sistema di acquisizione ed i provini senza il rischio di modificare le angolazioni dell'hardware o di muovere accidentalmente lo stesso set-up. Dei particolari sistemi di illuminazione per realizzare condizioni di luce uniforme (è dimostrato che una illuminazione non uniforme compromette la qualità del risultato finale) sono stati fissati sempre sul profilato e sulle traverse della macchina.

2.3 La correlazione digitale di immagini

Spesso chiamata con l'acronimo D.I.C. (dall'inglese Digital Image Correlation) rappresenta uno dei metodi ottici più efficaci ed utilizzati per la misura delle deformazioni in 2D e 3D.

I motivi del grande successo e della sempre maggiore diffusione di questa tecnica, sono da ricercare principalmente nella sua facilità di esecuzione e nella vasta possibilità applicativa che varia dalla macro alla micro scala.

Per dare una idea molto semplificativa di come la tecnica viene eseguita si può analizzare la figura 4 e 5:

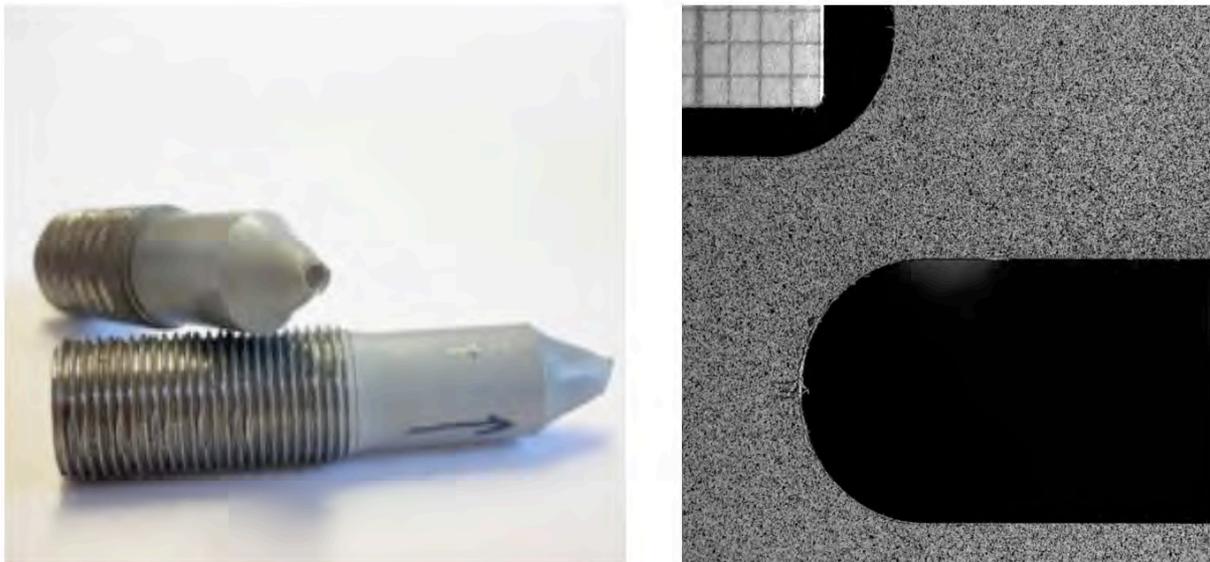


Figura 4, 5 - Due provini aerografati per l'esecuzione di prove D.I.C 3D (3) e 2D (2)

Dopo il tempo necessario alla totale essiccazione della vernice applicata, il provino viene ripreso da una o più telecamere ad alta risoluzione durante l'esecuzione dei test meccanici.

L'aerografo consente la deposizione di una vernice di sfondo con poche particelle di un colore opposto sulla superficie (solitamente bianco e nero) costituendo un pattern unico e ben contrastato come riportato nella figura 4 e 5.

Lo scopo delle acquisizioni fatte con le fotocamere è il *tracking* delle particelle che fotogramma dopo fotogramma modificano la loro posizione. Tramite il trattamento di ogni singolo fotogramma è possibile risalire alla motion delle particelle e ricostruire una misura di campo estesa a tutta l'area del provino fotografata.

Accoppiando le immagini provenienti da diverse telecamere è possibile valutare spostamenti descritti nel piano e fuori dal piano.

Il software DICFEM, tramite una *mesh* (figura 6) simile a quelle usate nei codici di calcolo agli elementi finiti, è in grado di riconoscere il pattern unico degli *spot* legati a ciascun elemento e seguire il movimento dell'elemento e delle connessioni nodali da immagine ad immagine esplicitando i campi di spostamento e deformazione.

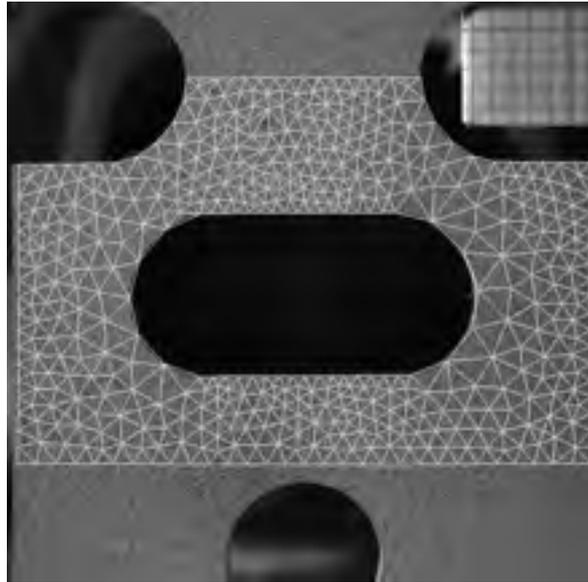


Figura 6 - Mesh utilizzata nelle analisi di correlazione digitale

Per avere maggiori informazioni sulle funzioni e sulle analisi numeriche necessarie per realizzare la correlazione è possibile consultare [50] mentre per quanto riguarda le prestazioni e l'efficacia del metodo è possibile trovare precisi riferimenti in [51-54]

Tramite il set-up realizzato presso i laboratori del D.I.Me.Ca. è stato possibile ricavare le 2d *displacement maps* dei provini realizzati in AL 2024-T351. Sono state impiegate due fotocamere Pike Allied Vision F421- B ad alta risoluzione.

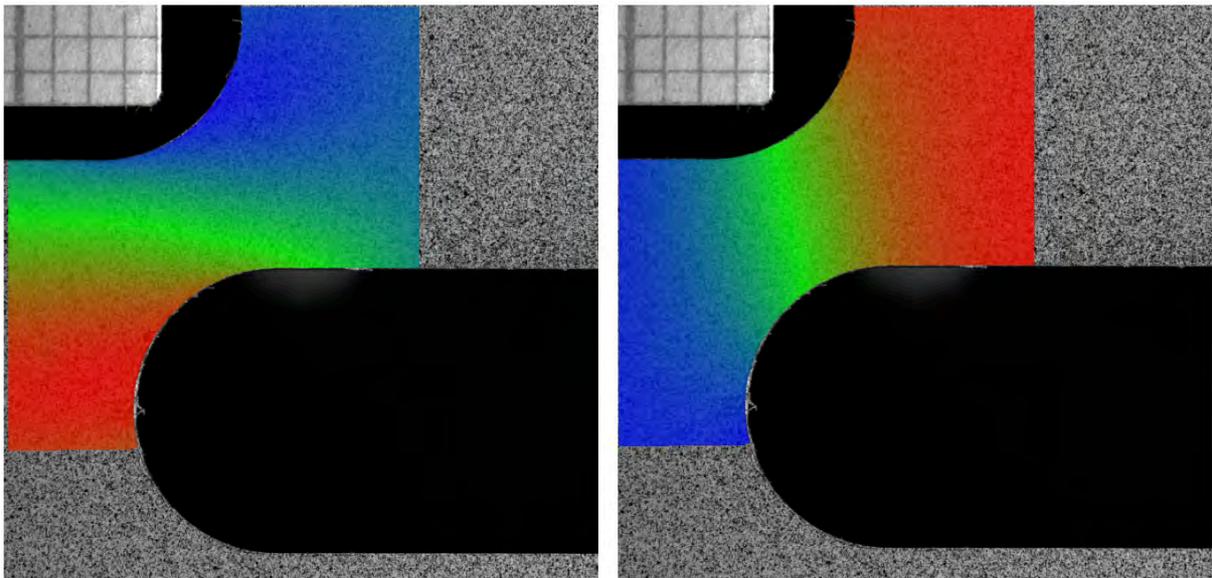


Figura 7, 8 - Spostamenti orizzontali (sinistra) e verticali (destra)

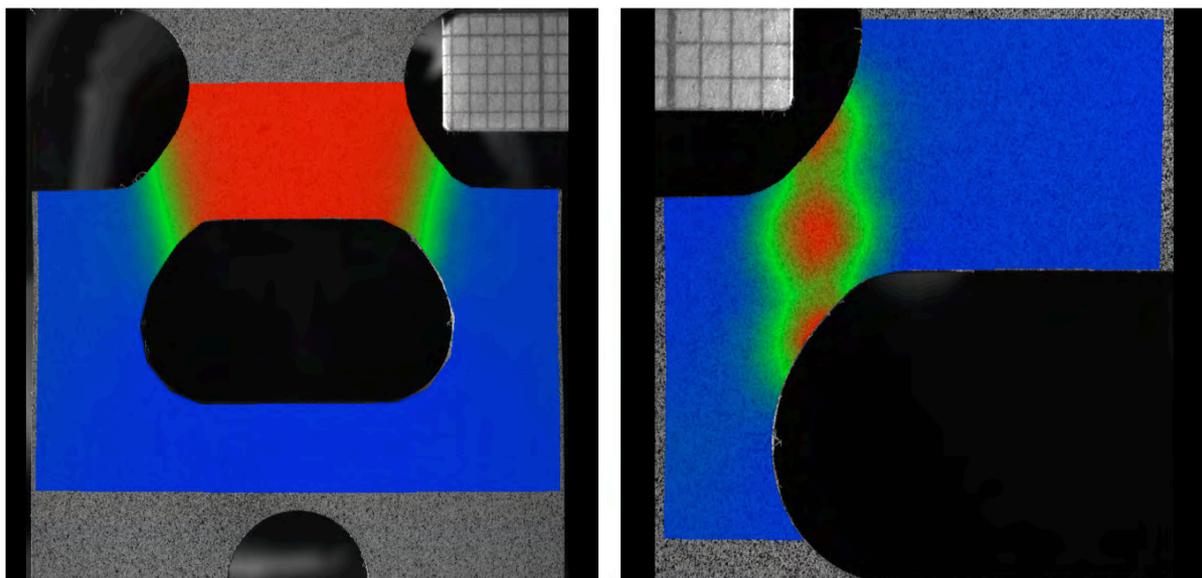


Figura 9 - Spostamento verticale del complessivo (sinistra) e gamma della parte più sollecitata (destra)

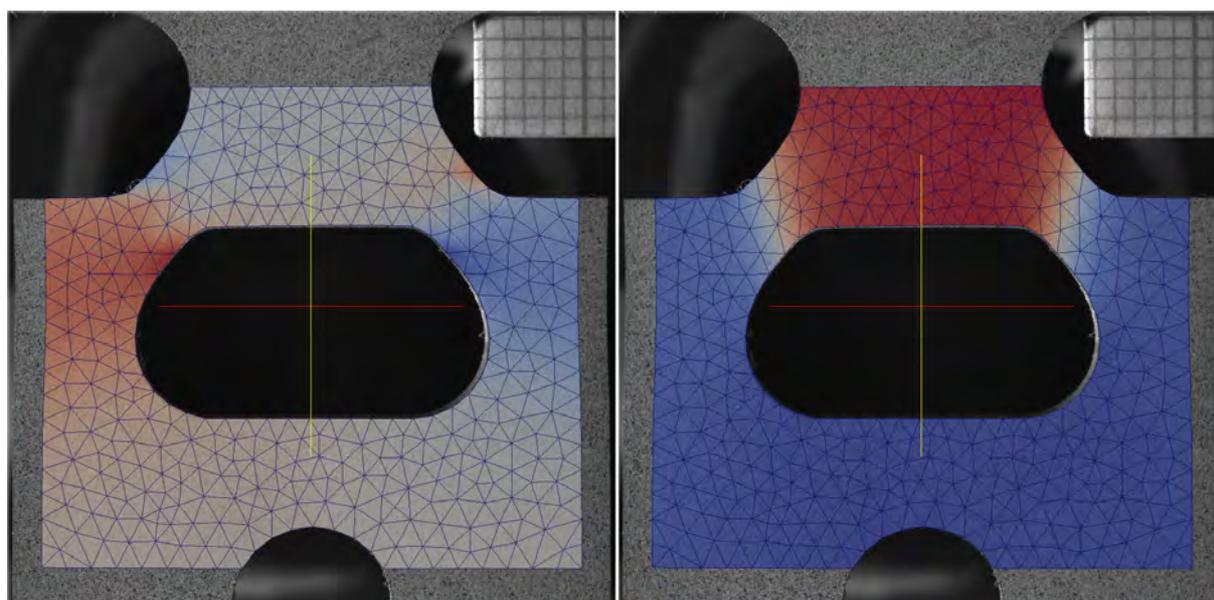


Figura 10 - Immagine a campo intero (con la mesh in trasparenza) della mappa di spostamenti orizzontali (sinistra) e verticali (destra)

L'utilizzo di una doppia camera ha senso in termini di controllo delle operazioni e verifica: questa scelta permette di poter legare la zona maggiormente critica con una porzione maggiore del materiale, ricavando così maggiori informazioni sul comportamento globale del provino e sull'influenza della localizzazione del danneggiamento.

Alcuni risultati sono mostrati nelle immagini 7-10 e mostrano il moto delle particelle in varie fasi della prova di trazione monoassiale. Le specifiche delle analisi e degli strumenti utilizzati verranno fornite in dettaglio nei prossimi paragrafi.

2.4 Comparazione numerico-sperimentale

Una volta effettuate le simulazioni numeriche e rilevate le mappe di spostamento durante la prova di trazione, il lavoro si è concentrato sulla comparazione dei risultati ottenuti.

Per tutto quello detto finora, ci si aspetta che entrambi i modelli di danneggiamento si comportino in modo molto simile per bassi valori della triassialità mentre si attendono grosse variazioni nelle predizioni quanto lo stato di sforzo abbandona le caratteristiche idrostatiche diventando prevalentemente deviatorico.

Come si può facilmente vedere in figura 11, l'analisi D.I.C. e la simulazione agli elementi finiti del provino (ed in particolar modo dell'area in cui è attesa la rottura) sono state fatte tramite una discretizzazione del dominio usando due diverse mesh.

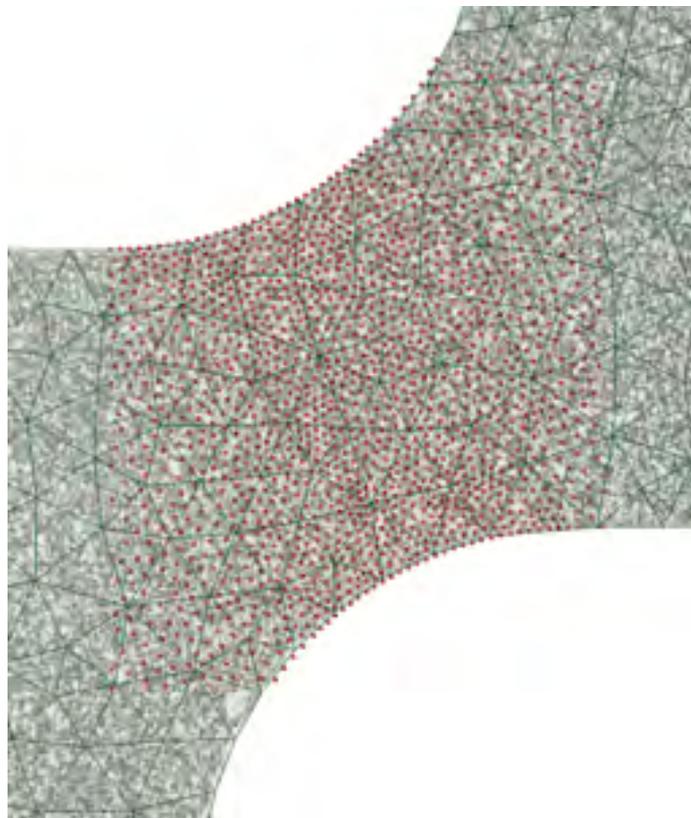


Figura 11 - Mesh del provino. D.I.C. (linee verdi) e F.E. (markers quadrati rossi)

Utilizzando tutto questo come base di partenza, un modo valido ed efficace per poter indicare l'errore medio totale fra gli spostamenti stimati con il metodo F.E. e quelli del campo misurato sperimentalmente utilizzando il codice D.I.C. 2D può essere espresso come:

$$e_{tot} = \sum_1^{N_s} \sum_1^{N_p} \frac{\|u_{FEM} - u_{DIC}\|_2}{N_s} \quad (2.4.1)$$

Dove “ u_{FEM} ” e “ u_{DIC} ” rappresentano i vettori di spostamento nodali calcolati rispettivamente con Msc.Marc e con DICFEM, N_s è il numero di step considerati e N_p è il numero di punti di campionamento presi sulla superficie. L’equazione (2.4.1) confronta il campo di spostamenti attraverso tutta la storia di carico del provino ma può anche essere usata per una misura dell’errore medio nello step i esimo, semplicemente rimuovendo la prima sommatoria e la seconda divisione per N_s :

$$e_{ave}^i = \sum_1^{N_p} \|u_{FEM} - u_{DIC}\|_2 \quad (2.4.2)$$

E’ anche opportuno notare che la relazione (2.4.1) non vincola due gradi di libertà: questa situazione è legata al fatto che sono state utilizzate delle diverse frequenze di campionamento per il FEM e per l’analisi DIC.

Il calcolo con gli elementi finiti “vive” infatti all’interno di un *time step* diverso dalla frequenza di acquisizione della fotocamera.

In aggiunta, come mostrato in figura 11, anche la posizione dei nodi delle due mesh non è la stessa di quella utilizzata nella discretizzazione D.I.C.

Da questi due fatti ne deriva che per eseguire il calcolo della relazione (2.4.1), siano necessarie due diverse interpolazioni. Per avere una misura sincrona fra i due campi, la prima interpolazione è stata fatta sulla variabile temporale e successivamente, è stata effettuata una interpolazione spaziale, ottenendo così le misure dello spostamento e dell’errore commesso dai due modelli calcolate sullo stesso set di punti (nodi).

Essendo DicFEM, il codice usato per l’analisi D.I.C. utilizzato in questo lavoro, basato su un approccio FEM ed avendo realizzato una mesh bidimensionale topologicamente più semplice (in quanto descritta con meno elementi di quella usata nel software Msc.Marc), si è scelto di utilizzare la discretizzazione del dominio D.I.C. (mesh con linee verdi figura 11) come riferimento per ambedue le interpolazioni, scalando ovviamente le lunghezze da pixel a millimetri.

L’errore fra la rilevazione sperimentale degli spostamenti e quella della previsione FEM è stato comparato per ciascun nodo mappando le coordinate che descrivono la mesh FEM nel sistema di riferimento di ciascun elemento della mesh utilizzata nella D.I.C.

Successivamente, si è calcolato lo spostamento utilizzando le funzioni di forma proprie dell’elemento D.I.C.

Da un punto di vista pratico queste operazioni sono state realizzate modificando il file di input del MSC.Marc in modo da creare prima ed estrarre poi le coordinate del set di nodi di interesse ed infine leggere dall’output del FEM i valori degli spostamenti calcolati, collegandoli alla mesh usata in DicFEM per generare i risultati finali. Per agevolare ed automatizzare tutte queste operazioni è stato scritto un software apposito che è stato impiegato durante le analisi.

Le simulazioni FEM, infatti, per poter essere eseguite necessitano la completa caratterizzazione della relazione macroscopica sforzi-deformazioni del materiale impiegato e di conseguenza è stata calcolata la curva di incrudimento per la lega di alluminio 2024-T351.

Per garantire piena comparabilità fra i risultati forniti dai due modelli la stessa legge stress-strain è stata usata in tutte le simulazioni; in accordo con la tesi di dottorato di Xue [30] è stata utilizzata una legge esponenziale:

$$\sigma_M = A(1 + B\varepsilon_p)^n \quad (2.1.4)$$

I valori numerici dei coefficienti A , B ed n sono riportati nella tabella 1.

Tabella 1 - Calibrazione parametri finale. Modello di Wierzbicki-Xue

Materiale	A [MPa]	B	n
AL2024-T351	0.8	800 [MPa]	1.5

2.5 Risultati

La figura 12 riporta tutte le curve stress-strain ottenute, riunendo i risultati dei test sperimentali e delle numerose simulazioni numeriche eseguite con i diversi modelli di danneggiamento implementati. E' subito importante sottolineare che, utilizzando il modello di Wierzbicki-Xue, implementato con i parametri suggeriti in letteratura, non sono stati ottenuti risultati soddisfacenti. In questa forma infatti si è riscontrata una rottura del provino corrispondente a circa l'80% della storia di carico sperimentale.

Per superare questo problema, simulando meglio il comportamento del materiale, sono stati utilizzati diversi valori di β (*weakening factor*). Dalle numerose prove eseguite il risultato è stato che con un valore del *weakening factor* compreso fra 3 e 4 è possibile prevedere la frattura del provino al 98% ($\beta = 3$) e 101% ($\beta = 4$) della storia di carico sperimentale.

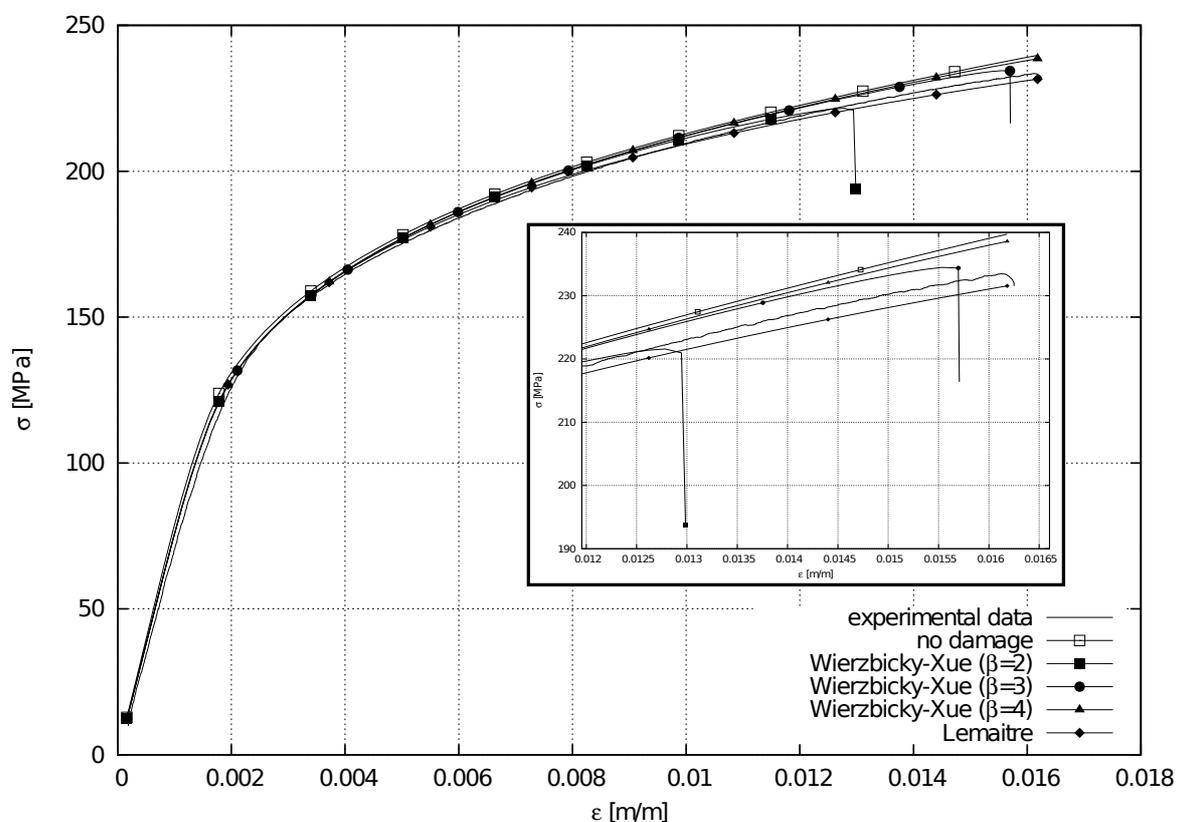


Figura 12 - Complessivo delle curve Stress-Strain ottenute dalle prove sperimentali e dalle simulazioni numeriche utilizzando diversi modelli di danneggiamento. Il grafico incluso nel riquadro sulla destra mostra una vista ingrandita della zona in cui avvengono le rotture.

Per il ruolo assunto da β nelle relazioni costitutive è ovvio che una crescita di questo parametro genera un indebolimento dell'accoppiamento fra il modello di danneggiamento e la legge di incrudimento. Si può quindi asserire che all'aumentare di β Il comportamento complessivo del provino simulato approssima quello del modello considerando il danneggiamento in misura

minore. Anche in questa condizione però, si può notare che al 99% della simulazione della storia di carico il danneggiamento cresce esponenzialmente, raggiungendo un valore molto prossimo a quello unitario, segnalando correttamente la rottura.

Al contrario, i risultati ottenuti dalle simulazioni sfruttando il modello di Lemaitre, sovrastimano leggermente il deterioramento del materiale, indicando uno stress di rottura minore rispetto a quello registrato nelle prove sperimentali. Nonostante questo, il modello di Lemaitre fornisce la miglior approssimazione in termini globali (indicata come deviazione media rispetto alla curva sperimentale). E' opportuno comunque sottolineare che il danneggiamento a rottura (ricavato dalle simulazioni numeriche) risulta essere circa la metà del valore atteso per il materiale in questione. Si ottiene infatti un $D_{cr} = 0.144$ rispetto a $D_{cr} = 0.290$ che rappresenta il valore riferimento ottenuto secondo [14].

Essendo il danneggiamento un fenomeno che risente in maniera molto marcata di fenomeni locali, nel quale i meccanismi di frattura fragile e duttile spesso si alternano nella generazione della superficie di rottura, è sicuramente utile ai fini della comprensione dei processi in esame andare ad analizzare nel dettaglio la situazione locale nella zona di massima sollecitazione.

Da un punto di vista locale la situazione può quindi essere analizzata più semplicemente: la serie di immagini dalla 13 alla 18 mostra infatti i risultati ottenuti per i due modelli comparati con gli spostamenti calcolati con DicFEM.

Le figure 13 e 14 riportano le mappe di errore del modello di Wierzbicki (con *weakening factor* pari a 3) e di quello di Lemaitre rispetto al calcolo sperimentale, entrambe riferite allo step 89 (su 91 totali) della simulazione agli elementi finiti (lo step 89 è significativo perché è l'ultimo step utile prima di arrivare alla rottura). Le mappe sono state ricavate utilizzando l'equazione (2.4.1) limitando

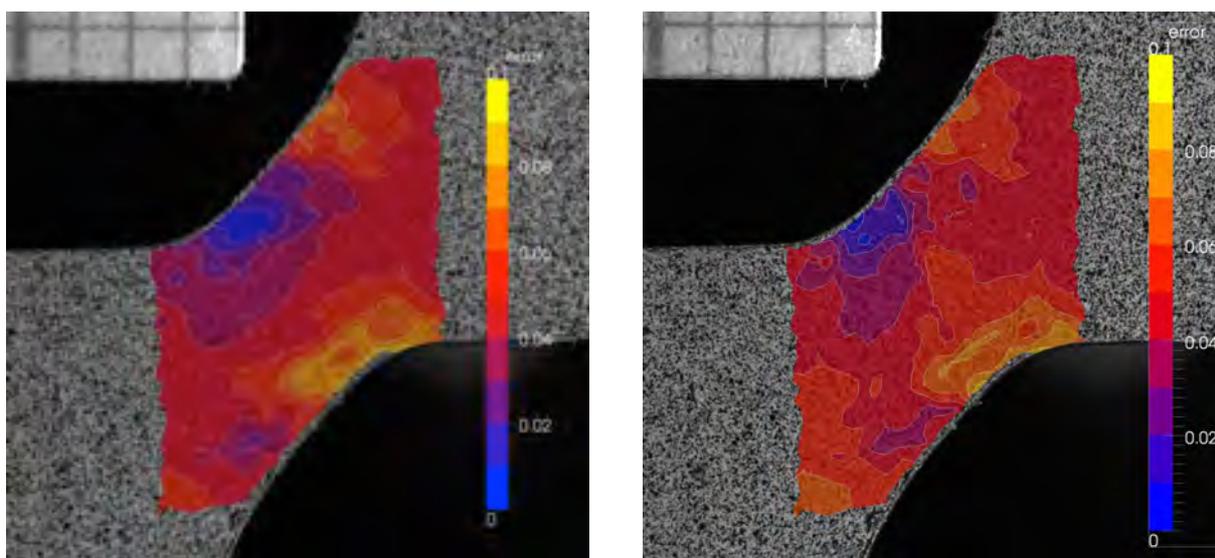


Figura 13, 14 -Mappe di errore: Modello di danneggiamento di Lemaitre (sinistra) e di Wierzbicki-Xue (destra, $\beta = 3$)
gli errori sono riportati in millimetri

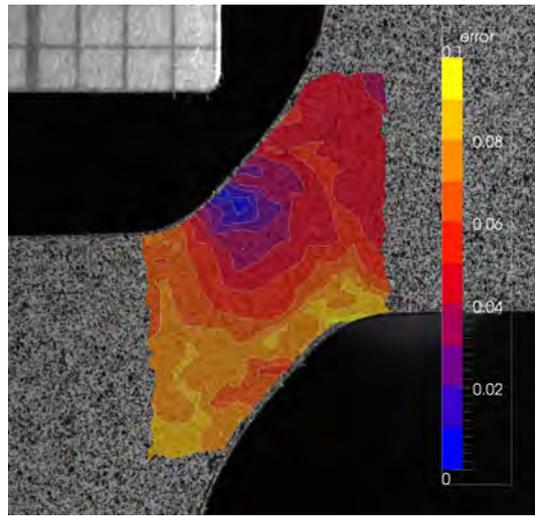


Figura 15 - Mappe di errore: Modello di danneggiamento di Wierzbicki-Xue ($\beta = 4$)

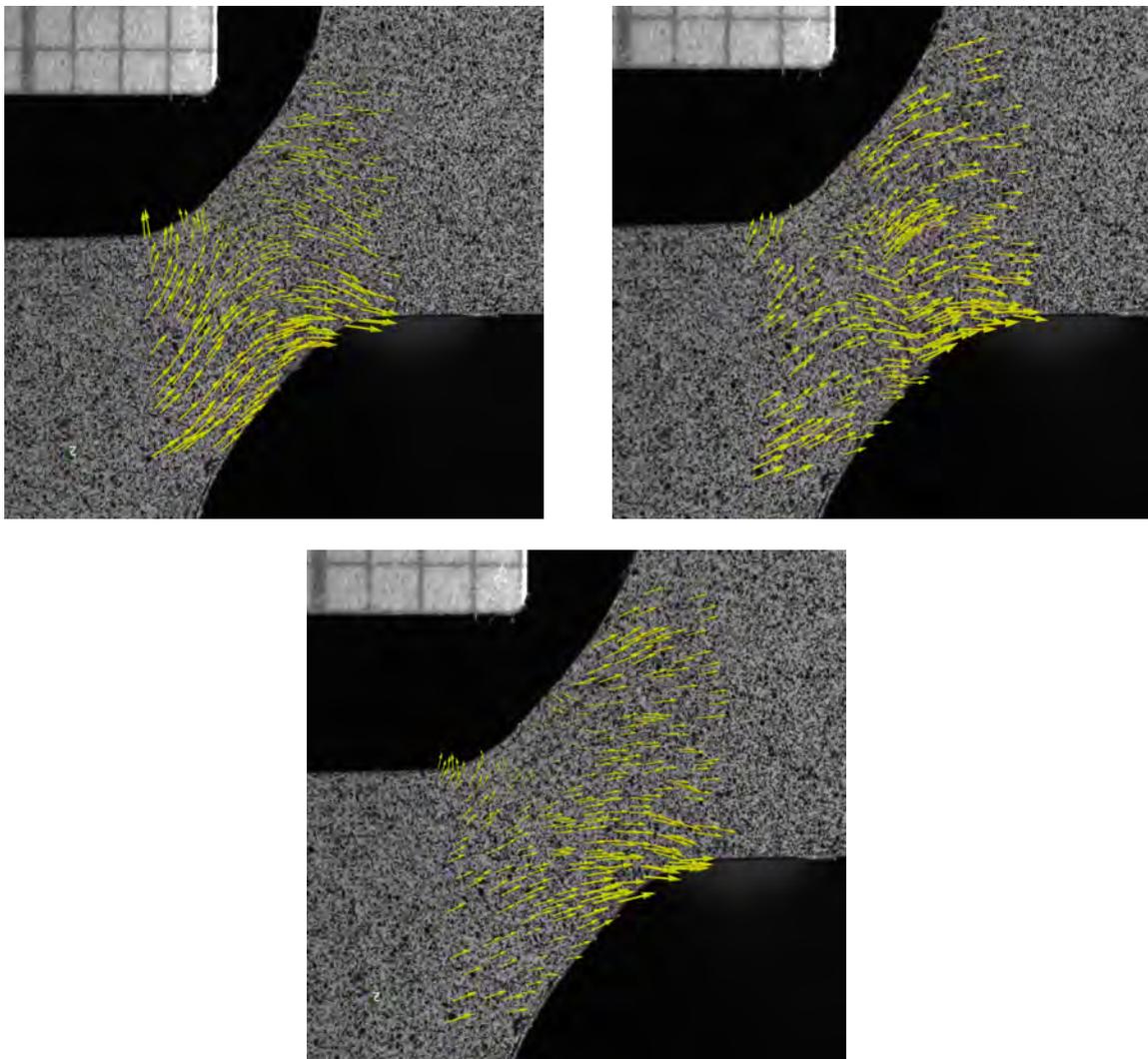


Figura 16, 17, 18 - Rappresentazione grafica dell'errore: Modello di danneggiamento di Lemaitre (basso) e di Wierzbicki-Xue con $\beta = 3$ (in alto a destra) e con $\beta = 4$ (in alto a sinistra)

l'integrazione temporale all'ultimo step utile, evidenziando le differenze fra gli spostamenti predetti dai modelli di danneggiamento ed il campo di spostamento misurato in situ.

Ad onor del vero bisogna subito sottolineare che, gli errori negli spostamenti sono molto piccoli per entrambe le soluzioni di calcolo ed i valori medi e massimi rispettivamente son stati verificati essere 0.047 mm e 0.077 mm per il modello di Wierzbicki-Xue e rispettivamente 0.044 e 0.085 per quello di Lemaitre.

In aggiunta alle considerazioni dedotte dall'analisi degli errori, anche la visualizzazione qualitativa delle mappe fa notare che le differenze maggiori fra i risultati numerici e quelli sperimentali si verificano nelle stesse porzioni di area. Per tutto quello detto finora e per quanto è stato dedotto dall'analisi delle mappe di spostamento e delle curve sforzo-deformazione globali, è possibile asserire che il modello di Lemaitre lungo tutto il percorso di carico subito dal provino ha un

migliore risultato globale rispetto a quello di Wierzbicki:

Tramite l'equazione (2.4.1), considerando tutta la simulazione numerica, l'errore cumulativo dei due modelli rispetto ai dati sperimentali è stato di 1.373 mm per il modello di Lemaitre e di ben 2.380 mm per il modello di Wierzbicki-Xue.

Questo è il primo dato che segna uno spartiacque fra i due modelli. Avendo però finora riscontrato previsioni e valutazioni comparative non capaci di mettere in risalto discrepanze notevoli, si è proseguita l'analisi esaminando la storia di danneggiamento del materiale ed il suo processo di accumulazione. Nelle immagini 20, 21 e 22 è presentato un confronto significativo: la rilevazione della distribuzione nell'area critica dello sforzo di taglio ottenuta sperimentalmente mediante il software di correlazione digitale (figura 20) è stata affiancata alla mappa di danneggiamento ottenuta per i due modelli (figure 18 e 19). Siccome il provino è stato specificatamente disegnato per rompersi a causa di una componente predominante del taglio, è lecito aspettarsi che il campo di danneggiamento sia simile alla distribuzione delle γ_{xy} (riportata in figura 21). Dall'analisi delle immagini proposte risulta che il

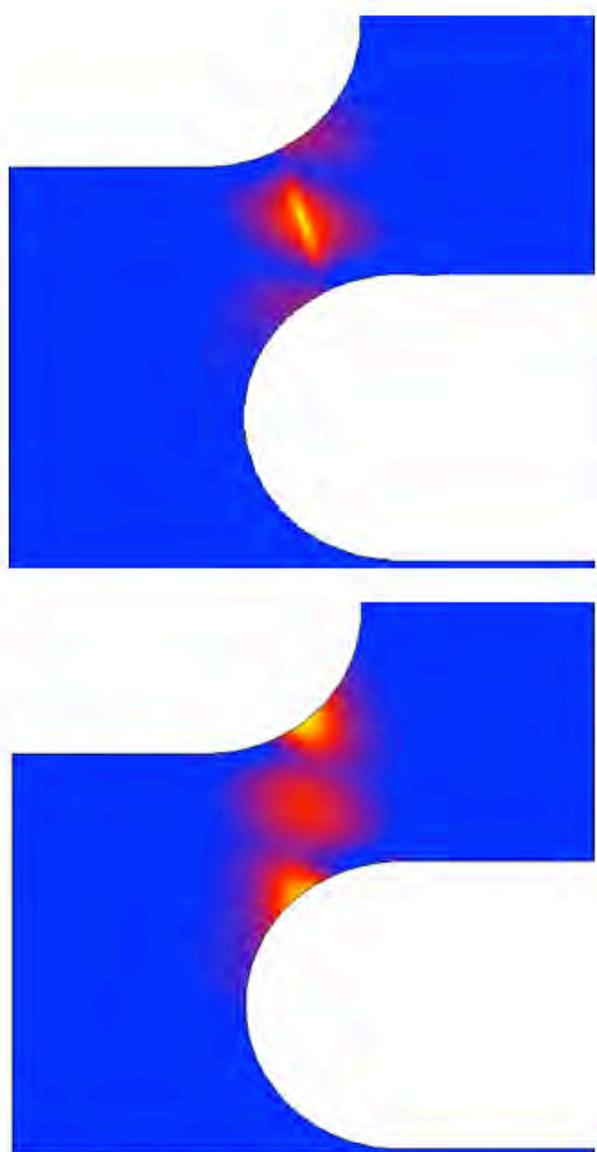


Figura 19, 20 - Mappe di danneggiamento per il modello di Lemaitre (sinistra) e per il modello di Wierzbicki-Xue (a destra, nella versione con $\beta = 3$)

modello di Lemaitre fornisce una previsione dell'area di frattura nel quale la maggior concentrazione di danneggiamento (e quindi l'innesco della macro-cricca di frattura) parte dalla parte esterna del sottile lembo di materiale, mentre quello di Wierzbicki indica una concentrazione del danneggiamento (e di conseguenza come punto di maggior deterioramento) una posizione centrale, decrescendo verso la periferia.

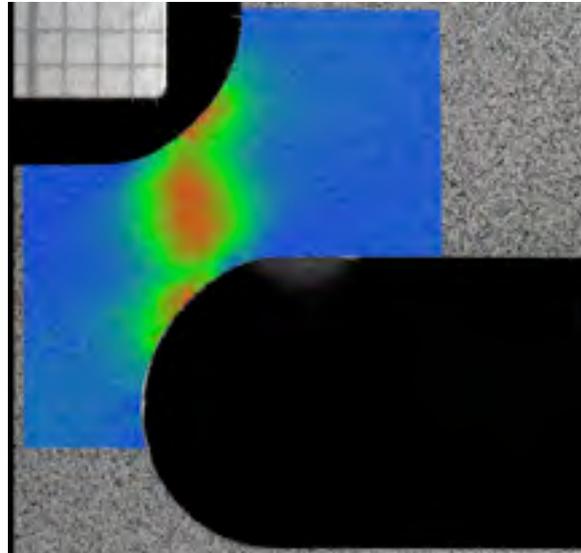


Figura 21 - Mappe sperimentale dello sforzo di taglio ottenuta con il software DicFEM

Questa differenza assume un senso ancora maggiore, se rapportata all'indagine sperimentale per quanto concerne il momento esatto della rottura del pezzo, e corrispondente alla propagazione della cricca che porta al cedimento finale.

Nell'immagine 22 si può vedere esattamente l'istante in cui la frattura inizia la sua propagazione. In evidenza (cerchio bianco) si vede facilmente che, proprio come teorizzato dal modello di Lemaitre, la cricca parte dal bordo esterno del provino e si propaga verso il centro.

Ancora una volta quindi il modello di Lemaitre sembra fornire la miglior previsione del fenomeno.

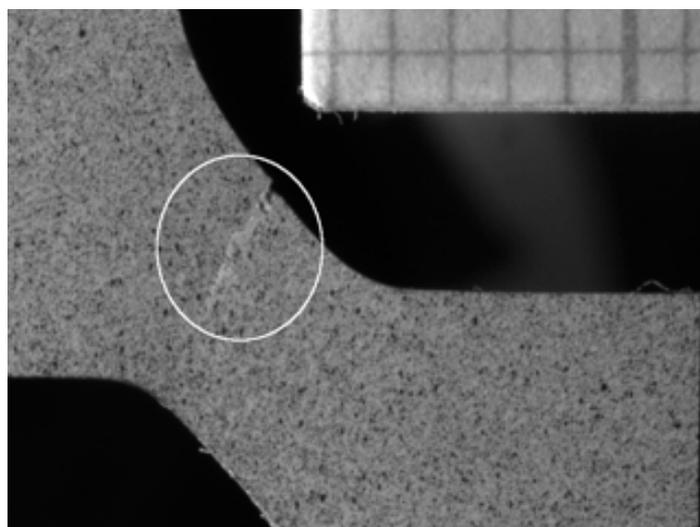


Figura 22 - Propagazione della cricca e cedimento del provino

Una ulteriore analisi per quantificare ed indagare in maniera ancora più approfondita le capacità dei due modelli e le eventuali discrepanze con le rilevazioni sperimentali è stata effettuata una ulteriore indagine in cui si è andato ad analizzare l'evoluzione del danneggiamento riferita ad un unico nodo, preso nelle due porzioni di maggior criticità indicate dai due modelli usati.

In figura 23 è riportato il diagramma (per il nodo 5045) in cui si mostra l'andamento del danneggiamento al crescere della deformazione plastica equivalente calcolata con tutti i vari modelli implementati nei pressi del centro della porzione di interesse del materiale.

Nell'immagine 24 invece è mostrato lo stesso identico grafico riferito però alla zona prossima al bordo esterno (nodo 15687) in cui il modello di Wierzbicki-Xue teorizza la maggior criticità di sforzi e danneggiamento.

I due grafici ovviamente mostrano dei valori "equivalenti" di danneggiamento poiché sarebbe stata una operazione non sensata confrontare i valori tali e quali, in quanto le due formulazioni, profondamente diverse nella loro essenza, utilizzano dei valori del parametro di danneggiamento e delle stime sulle variabili molto differenti.

Nei grafici presentati nelle figure 23 e 24 quindi in danneggiamento è considerato al netto del weakening factor (assunto ovviamente con valore unitario nel calcolo del modello di Lemaitre) in funzione della deformazione plastica equivalente.

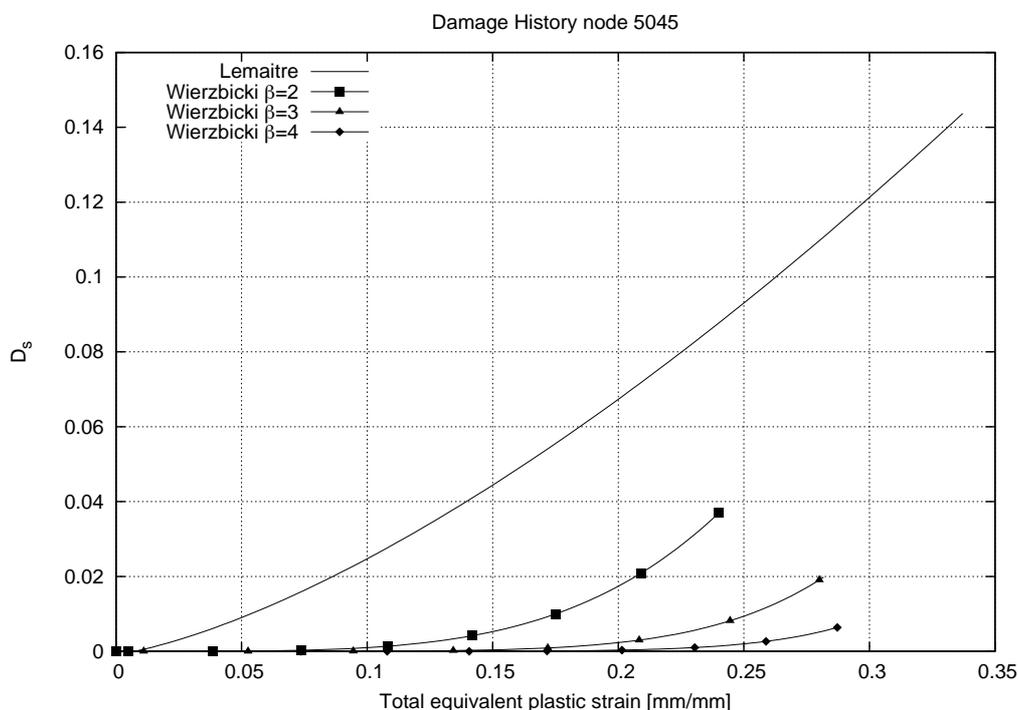


Figura 23 - Evoluzione della variabile di danneggiamento. Bordo della porzione di provino considerato

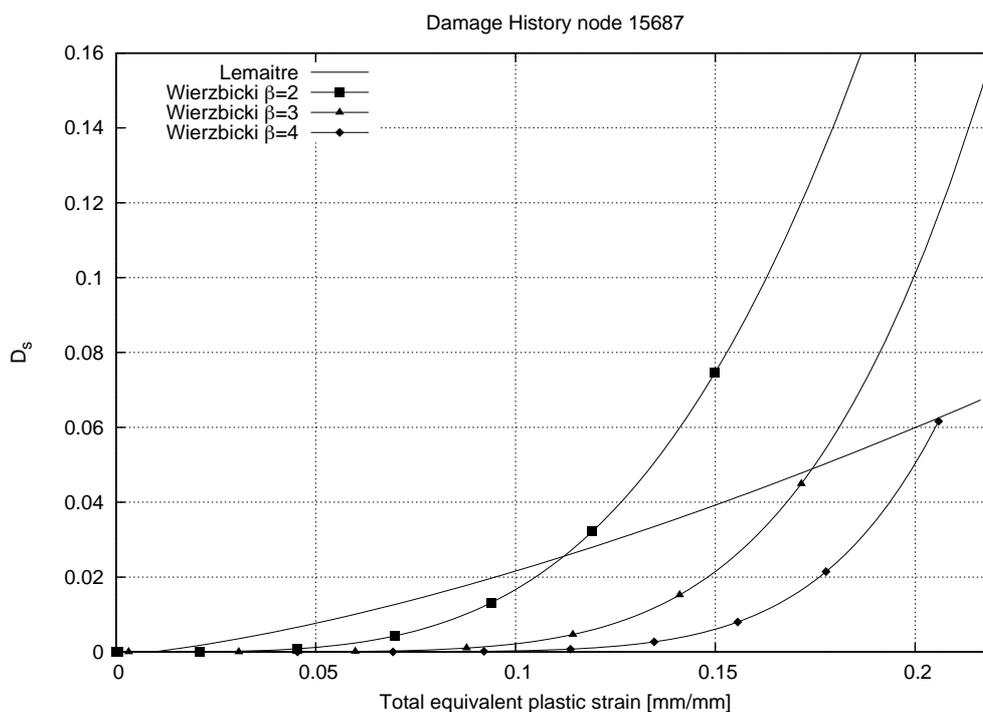


Figura 24 - Evoluzione della variabile di danneggiamento. Centro della porzione di provino considerato

Focalizzando l'attenzione sul centro dell'area considerata si può vedere che il danneggiamento effettivo predetto è molto simile per tutti i casi testati (Lemaitre e Wierzbicki-Xue con i diversi valori di weakening). Spostandosi invece verso il bordo e la zona di frattura si vede come il modello di Lemaitre, sebbene sia caratterizzato da una legge di accumulo più "lineare" cresca notevolmente avvicinandosi verso il bordo raggiungendo un valore doppio rispetto al centro, mentre risultati opposti sono stati ottenuti con l'utilizzo del modello di Wierzbicki-Xue.

Nella figura 25 sono riportate, in modo chiaro e facilmente consultabile, le stime fornite dai due modelli rispetto ai dati sperimentali.

Gli errori commessi nella valutazione del campo di spostamenti sono esigui (nell'ordine del centesimo di millimetro) e tutti distribuiti nella stessa porzione di area.

Per quanto riguarda le curve sforzi-deformazioni globali invece, si è mostrato che la lega di alluminio 2024-T351 è scarsamente influenzata dal danneggiamento quindi, sebbene entrambi i modelli diano degli ottimi risultati, il modello di Lemaitre garantisce una migliore descrizione del fenomeno traducendo questo fatto in risultati finali sommariamente migliori.

Le motivazioni di questo fatto sono da ricercare nella sua classe di appartenenza ed ai trattamenti subiti dal materiale: il macro-risultato spesso esibito da questa famiglia di leghe di alluminio è una duttilità molto pronunciata (nel senso che il provino riesce a sostenere elevate deformazioni plastiche) ma con un softening ed un deperimento della matrice metallica non molto accentuata.

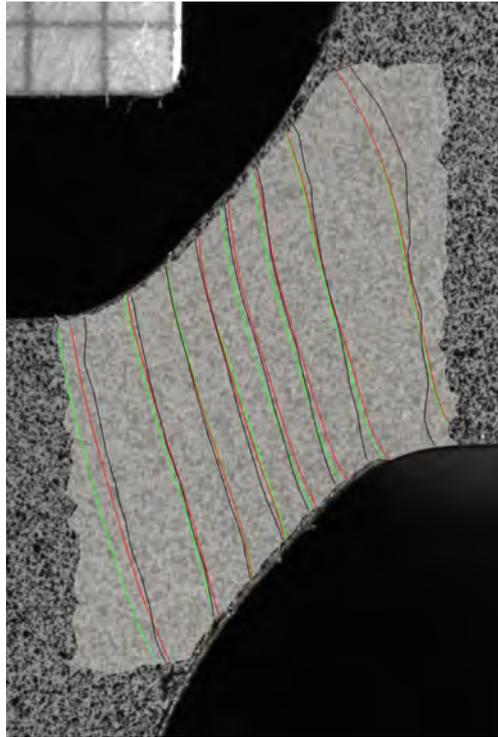


Figura 25 - Valutazione comparativa degli spostamenti- Valori sperimentali (in nero), e quelli numerici ottenuti con il modello di Lemaitre (rosso) e con quello di Wierzbicki-Xue (verde)

Ne deriva che il materiale al posto di danneggiarsi lentamente durante la storia di carico immagazzina energia elastica al suo interno, arrivando alla rottura in modo molto violento dopo una breve fase di danneggiamento duttile iniziale.

Un'analisi più dettagliata della storia di danneggiamento dei due modelli ha però mostrato che l'evoluzione del materiale predetta dai due modelli è molto differente e questo conduce ad una diversa determinazione del punto di innesco della cricca che causa il cedimento del pezzo: nel primo caso (modello di Lemaitre) il punto di innesco è stato decretato essere nel bordo mentre nell'altra soluzione il centro è stato indicato come punto principale di propagazione della frattura.

In conclusione, entrambi i modelli di danneggiamento si comportano in modo molto soddisfacente anche se quello di Lemaitre durante tutte le analisi ha fatto registrare sempre delle leggere differenze positive ed una maggior capacità di approssimare i dati sperimentali rispetto al modello di Wierzbicki-Xue.

I risultati comunque non possono considerarsi conclusivi in quanto altre sperimentazioni e confronti si dovrebbero eseguire su diverse classi di materiali. Il problema di fondo è che, come precedentemente accennato, il materiale AL 2024-T351 arriva alla rottura con una fase di softening poco accentuata, fratturandosi in modo tipicamente fragile. Una buona strada futura per la ricerca è quindi quella di ripetere la classificazione e la comparazione dei due modelli utilizzando un materiale molto più influenzato dal processo di danneggiamento previa la completa caratterizzazione dei parametri richiesti dai modelli.

Capitolo 3: Plasticità nei materiali duttili

Capitolo 3:

Plasticità nei materiali duttili

Nel corso del capitolo 3 verranno richiamati alcuni concetti di base della teoria della plasticità che verranno usati per introdurre le tematiche più complesse e approfondite, la notazione utilizzata nel resto del lavoro e infine per identificare in modo univoco la teoria sul quale si basa la seconda parte del lavoro.

Puntualizzando come primo passo alcuni cenni sulla microplasticità e sul comportamento meccanico dei monocristalli, sarà possibile dare una visione d'insieme più ampia dell'argomento, richiamando alcuni concetti chiave come l'isotropia plastica, l'incomprimibilità e l'influenza della pressione idrostatica, aprendo così la strada alle teorie macroscopiche, che verranno successivamente analizzate in dettaglio. In maniera del tutto simile verranno approfondite molte delle ipotesi e delle assunzioni che costituiscono il cardine della teoria della plasticità nel caso di *small* e *large strain*. Questo consentirà una naturale introduzione agli algoritmi di calcolo ed ai modelli per l'analisi della plasticità anisotropa che verranno presentati nella parte conclusiva di questo capitolo e approfonditi nelle parti successive.

3.1 Microplasticità

Prendendo in esame un singolo cristallo (considerazione valida per un'ampia gamma di metalli e materiali duttili) il meccanismo principale che guida le deformazioni plastiche è quello di taglio (anche detto *simple shear*), agente lungo le direzioni ed i piani di scorrimento preferenziali tipici del materiale. Questa ipotesi è stata verificata da numerose esperienze sperimentali, riportate in numerosi studi [1, 2, 4].

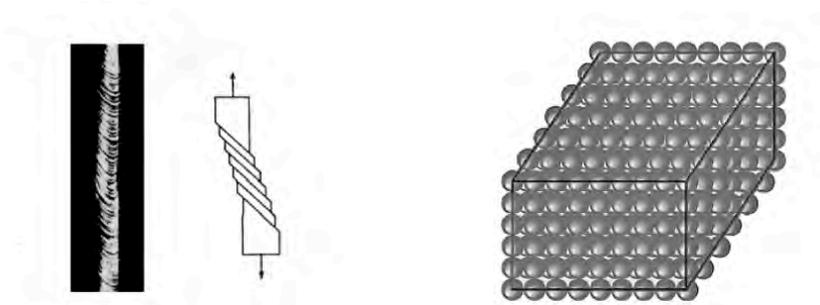


Figura 1-2 - Schematizzazione di un singolo cristallo (sinistra). Deformazione di un cristallo singolo di zinco e la figura schematica delle modalità di deformazione (destra), (F. Dunne, N. Petrinic, [55])

In modo molto sintetico è quindi possibile affermare che la causa principale della plasticità monocristallina è da ricercare nello scorrimento fra piani cristallografici; i metalli essendo materiali policristallini sono ovviamente connessi a questo fenomeno in modo molto stretto. In figura 1 e 2 è possibile vedere il processo di deformazione su un singolo cristallo (zinco) e la sua schematizzazione in una struttura con gli atomi “impacchettati” in una struttura molto regolare. In figura 3 viene invece presentato un ingrandimento di un materiale policristallino in cui è possibile vedere la varietà nella disposizione dei grani nella matrice ed infine in figura 4 viene schematizzato il processo di slip fra piani cristallini.

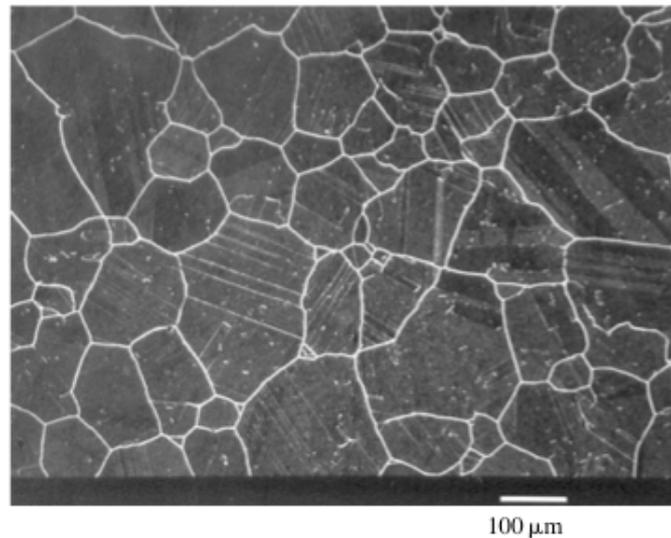


Figura 3 - Ingrandimento della granulometria della lega di Nickel C26, (F. Dunne, N. Petrinic, [55])

Dall’analisi della figura 4 è chiaro che a differenza delle deformazioni definite “elastiche” che riguardano solo lo *stretching* e la deformazione dell’interfaccia fra i singoli grani (*grain boundaries*), nelle deformazioni plastiche il processo di *slip* (scorrimento di piani cristallini) richiede la rottura e la formazione di nuovi legami atomici: lo spostamento relativo dei piani atomici modifica infatti in modo definitivo l’organizzazione cristallografica del materiale e di conseguenza la sua forma.

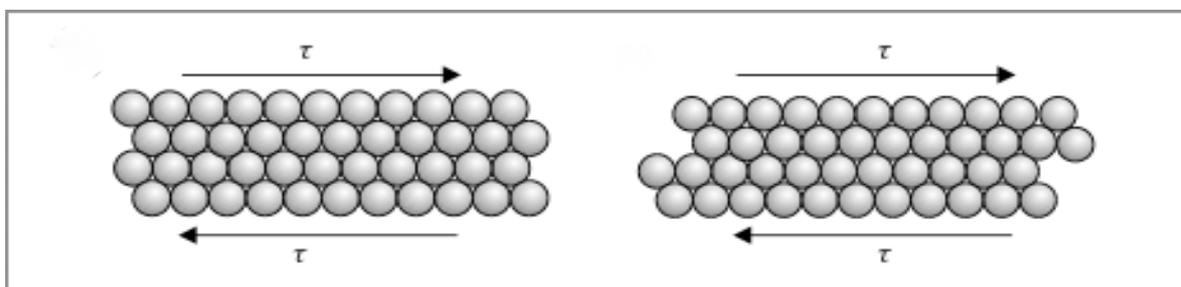


Figura 4 - Schematizzazione della scorrimento fra piani cristallini, (F. Dunne, N. Petrinic, [55])

Ne deriva quindi che anche a livello macroscopico la risposta dell'intero assemblato policristallino non può che essere la somma dei tanti piccoli contributi, dati dalla deformazione dei singoli grani e del comportamento del materiale nelle interfacce e nelle zone critiche in cui avviene la concentrazione degli sforzi. La deformazione elastica è quindi totalmente recuperabile perché non riguarda un riarrangiamento della struttura del materiale, viceversa, le deformazioni plastiche modificando in modo definitivo la struttura del materiale, sono per loro natura permanenti e non recuperabili anche eliminando il carico che le ha causate. Da queste poche evidenze che sono state puntualizzate è possibile comprendere a fondo alcuni fattori chiave della macro-plasticità:

- Lo scorrimento fra piani cristallini non causa una variazione di volume.
- Lo scorrimento è un processo legato intrinsecamente agli sforzi di taglio; la pressione idrostatica anche se applicata su un'ampia porzione di materiale può spesso essere considerata come ininfluenta.
- Nei materiali policristallini spesso lo snervamento plastico è un processo isotropo a causa della distribuzione caotica dell'orientamento dei cristalli.

Specialmente il primo punto (incompressibilità del flusso plastico) è un assioma fondamentale di molte teorie sulla plasticità presentate nelle ultime decadi. Nonostante questo, non tutti i materiali sono incompressibili. Molti materiali porosi infatti a livello macroscopico mostrano durante i fenomeni di plasticità notevoli variazioni di volume ed una forte dipendenza dalla pressione idrostatica. E' però evidente che questo comportamento non derivi dalle caratteristiche intrinseche del materiale che costituisce la matrice, ma bensì dall'effetto di chiusura degli stessi pori. Come si è accennato in questo stesso paragrafo, il processo di slip è legato agli shear stress ed è allora possibile esprimere la resistenza a taglio di un singolo cristallo tramite il modulo di resistenza trasversale "G" del materiale in esame tramite la relazione:

$$\tau_{th} = \frac{G}{2\pi} \quad (3.1.1)$$

ma questo approccio risulta sovrastimare largamente lo sforzo (misurato sperimentalmente) necessario a causare uno scorrimento dei piani cristallini del cristallo in esame.

La principale mancanza della relazione (3.1.1) è che essa considera il cristallo come una entità "perfetta" e priva di difetti. Il caso reale invece è ben diverso: la presenza di numerosi difettosità chiamate *dislocazioni* guida il processo di slip, portando dei riarrangiamenti atomici in un intorno molto piccolo e generando delle modifiche permanenti alla struttura, tramite uno sforzo di taglio minore di quello teorico, calcolato con la (3.1.1).

Le dislocazioni sono dei difetti considerabili monodimensionali; si possono presentare due casi estremi in cui lo scorrimento fra piani cristallini avviene sul piano (dislocazioni a cuneo o *edge*

dislocation) o avviene fuori dal piano (dislocazioni a vite o *screw dislocation*) come mostrato in figura 5.

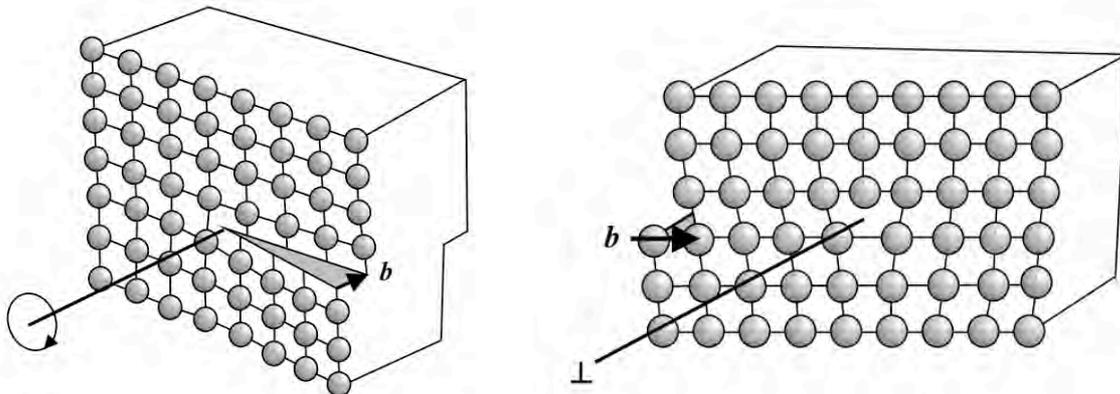


Figura 5 - Screw dislocation (sinistra) ed edge dislocation (destra), (F. Dunne, N. Petrinic, [55])

Oltre a questa categoria di difetti, ve ne sono molte altre fra cui si possono citare quelli elettronici e quelli *di punto* che sono molto importanti. I difetti di linea e quelli planari (effetto dei bordi, piling etc.) generano degli effetti riscontrabili da un punto di vista micro e macroscopico durante i processi meccanici di deformazione. Questi sono limitabili tramite particolari trattamenti termici che ne limitano la densità (ricotture) ma non sono completamente eliminabili ed hanno grande influenza nelle fasi di elasticità e plasticità dei materiali.

3.2 Macroplasticità

Sebbene numerosi sforzi siano stati fatti sotto la forma di varie campagne sperimentali e studi analitico-numeric, non è ancora possibile trovare una correlazione precisa fra le proprietà microstrutturali di un materiale ed il comportamento complessivo di un provino realizzato con lo stesso. Per superare queste difficoltà è infatti richiesto un approccio diverso che consideri il materiale come un *unicuum*, valutando la sua risposta complessiva, dove la miriade di fenomeni microscopici venga in un certo qual senso mediata dall'elevato numero di grani, particelle, difetti e fattori che interferiscono formando il materiale reale. Come conseguenza di questo, partendo da semplici valutazioni sperimentali, come ad esempio una prova di trazione monoassiale (figura 6), è possibile studiare il comportamento complessivo di un provino fatto con un materiale duttile ed analizzare il legame fra sforzi e deformazioni, introducendo importanti concetti come: l'incrudimento, la superficie di snervamento, ed il flusso plastico.

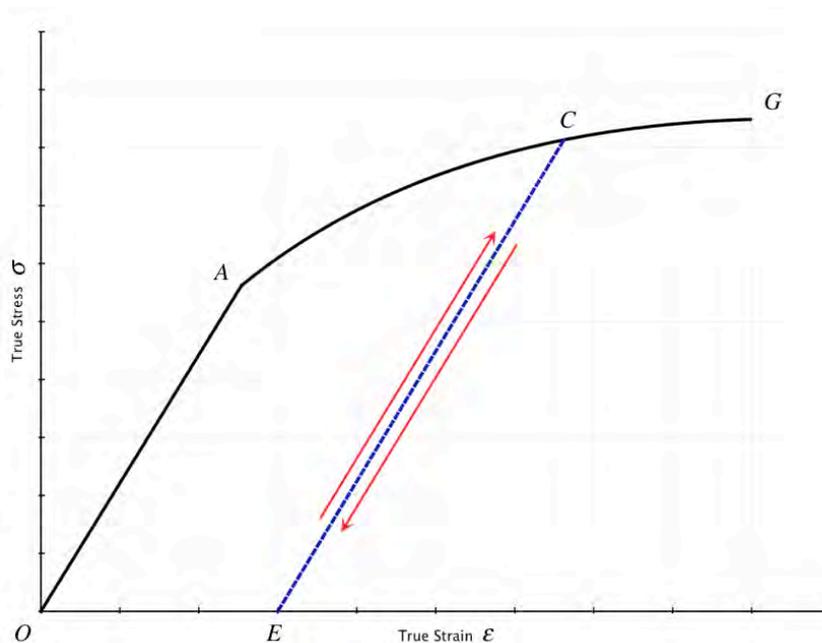


Figura 6 - Diagramma sforzi deformazioni per un materiale duttile con uno scarico elastico durante la fase di deformazione plastica

La prima grandezza da introdurre è proprio lo sforzo nominale o ingegneristico, definito come il rapporto fra il carico e la sezione di partenza del provino. I valori nominali o "ingegneristici" sono profondamente diversi da quelli "reali", che tengono invece conto istante per istante del cambiamento della condizione di riferimento del provino e si possono calcolare mediante le seguenti relazioni:

$$\sigma = \frac{\text{Carico Applicato } [N]}{\text{Area Corrente } [L^2]} \quad (3.2.1)$$

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

(3.2.2)

Dove con il pedice “0” ci si riferisce alla situazione di riferimento del provino testato.

Senza spendere troppe parole, è chiaro che lungo il percorso di deformazione il valore dello sforzo reale diventa sempre maggiore (trazione) o minore (compressione) di quello nominale.

La deformazione “vera” invece è progressivamente minore di quella ingegneristica nel caso di trazione monoassiale o maggiore nel caso di compressione.

Numerose prove sperimentali consentono di affermare che, per la maggior parte dei materiali policristallini il legame fra sforzi veri e deformazioni vere è simile a quello riportato in figura 6, ovvero, una curva crescente monotona. Nel primo tratto OA è definita la fase elastica, dove il punto A rappresenta il limite elastico e lo sforzo corrispondente è detto valore di snervamento del materiale. Superato questo, dopo una fase di instabilità, spesso abbastanza breve, inizia la fase plastica.

Al procedere delle deformazioni plastiche, per questioni legate all’incrudimento del materiale, lo sforzo vero continua progressivamente ad aumentare mentre fra lo snervamento e la rottura (che avviene nel punto G) la pendenza della curva cala continuamente.

Per tutto quello già anticipato le deformazioni plastiche sono irreversibili; uno scarico successivo all’accumulo di una aliquota di plasticizzazione fa seguire al provino un percorso lineare CE dove E giace proprio sull’asse delle ascisse, individuando il valore totale di deformazione plastica accumulata (e quindi permanente) fino al punto C. Considerando tutto il processo “ideale”, ricaricando dal punto E il materiale seguirà il percorso EC iniziando nuovamente da C in poi la fase plastica, snervando ad un valore di tensione molto più alto rispetto al punto A di partenza. In questo caso si dice che il materiale ha incrudito modificando le sue proprietà a causa delle deformazioni permanenti subite.

Tutto il processo è stato considerato ideale, tralasciando alcuni dettagli e non citando alcuni importanti fenomeni (come ad esempio l’effetto Bauschinger e le bande di Luders) che giocano un importante ruolo nei processi sotto esame.

3.2.1 Forma empirica della relazione true stress - true strain

Nel calcolo teorico delle strutture ed in molte simulazioni realizzate con il metodo agli elementi finiti è fondamentale conoscere come il materiale risponda durante la fase plastica, come si modifichi la sua sollecitazione di snervamento e quale sia lo sforzo vero effettivo all'aumentare della deformazione plastica. Il modo più comune di fare questo è di assumere delle leggi empiriche che approssimino la curva sforzi-deformazioni del materiale e caratterizzarle con alcuni parametri ottenibili dalla curva sperimentale stessa.

Verrà ora fatta una piccola rassegna dei principali modelli utilizzati per questo scopo con la descrizione dei parametri in gioco. Per approfondimenti sulle equazioni e la determinazione dei parametri è possibile consultare [1, 2, 4, 55, 57, 60]

- **Ludwik** - Legge esponenziale semplice (1909)

$$\sigma = C\varepsilon^n$$

Dove C è uno stress costante di riferimento e n è una costante adimensionale (solitamente minore di 0.5) chiamato esponente dello strain hardening (incrudimento)

- **Swift** - Legge esponenziale modificata (1952)

$$\sigma = C(m + \varepsilon)^n$$

Dove m è la sollecitazione di *pre-strain*

- **Voce** - Diversa combinazione dei parametri in gioco

$$\sigma = C(1 - me^{-n\varepsilon})$$

C , m , n , sono delle costanti del materiale da determinare tramite prove sperimentali

- **Ramberg-Osgood** (1943)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{m-1} \right\}$$

σ_0 è la sollecitazione di snervamento nominale, α ed m sono delle costanti adimensionali.

Altre leggi che includono diverse tipologie di effetti (temperatura, influenza dalla velocità della deformazione) non sono state considerate per focalizzare l'attenzione sulla parte puramente meccanica del problema.

3.2.2 La superficie di snervamento

Sotto l'ipotesi di isotropia è possibile estendere il caso monoassiale all'analisi di stati di sforzo più complessi, indagando così sulle condizioni per cui un materiale raggiunge lo snervamento. L'analisi che qui viene presentata è valida sotto le ipotesi di isotropia, di ininfluenza della pressione idrostatica nello snervamento dei materiali duttili e di trascurare gli effetti termodinamici. Lo scopo finale è trovare la superficie di snervamento (o *yield surface*) ovvero la legge che governa il limite del comportamento elastico, stabilendo così un criterio di snervamento per qualsiasi tipo di sollecitazione applicata.

Lo stato di sforzo di un materiale può essere rappresentato, nel caso più generale, da un punto in uno spazio a 9 dimensioni (ognuna associata ad una componente σ_{ij} del tensore di sforzo).

Intorno all'origine di questo particolare spazio è possibile individuare il dominio elastico del materiale che rappresenta la totalità di tutti gli stati di sollecitazione elastici che un materiale può subire. Ovviamente il contorno di questo dominio definisce una superficie che viene chiamata superficie di snervamento di cui si può dare una forma analitica come funzione dello sforzo vero. Nel caso più generale è possibile scrivere questa funzione come:

$$f(\sigma_{ij}) = \text{costante} \quad (3.2.3)$$

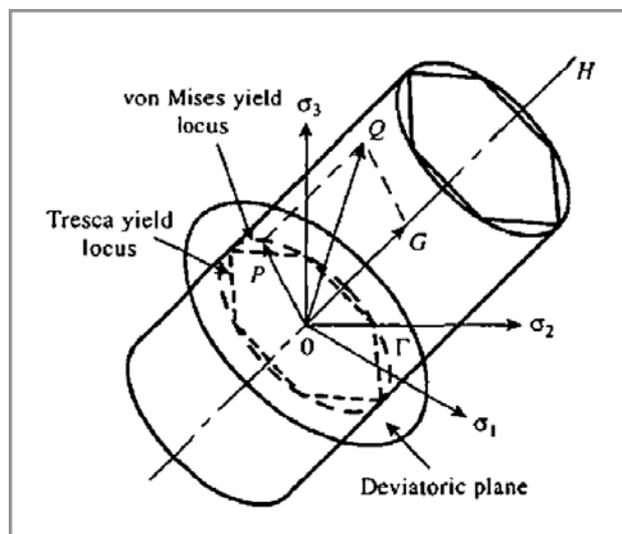


Figura 7 - Superfici di snervamento. Piano delle tensioni principali (spazio di Haigh–Westergaard), (J. Chakrabarty, [1]).

Sotto l'assunzione di isotropia, tutta la formulazione è indipendente dalle diverse componenti del tensore degli sforzi (non si ha dipendenza da un punto di vista "direzionale") ed è scrivibile come funzione delle sole tre tensioni principali.

Ne deriva che utilizzando queste assunzioni, il criterio di snervamento si può scrivere analiticamente come funzione dei tre invarianti del tensore degli stress.

La funzione di snervamento risulta quindi essere una funzione simmetrica delle sollecitazioni principali e indipendente dalla pressione idrostatica (definita come la media dei tre stress principali). Tutto ciò è graficamente riscontrabile nella figura 7 in cui tramite due funzioni di snervamento diverse (Von Mises e Tresca) sono state messe in evidenza le qualità di simmetria e di ortogonalità fra la componente idrostatica e quella deviatorica.

E' stato messo in luce, tramite considerazioni sulla microplasticità e sul comportamento dei materiali duttili, che un ruolo molto importante nei processi di plasticità è giocato dalla componente deviatorica dello sforzo che è strettamente legata alla sollecitazione di taglio. Ha allora senso scrivere tutto in funzione del deviatore degli sforzi " s_{ij} " e dei suoi invarianti " $J_{1/2/3}$ "

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij} \quad (3.2.4)$$

$$\sigma_H = \text{Pressione Idrostatica} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.2.5)$$

Essendo il deviatore un tensore *skew* la sua traccia (" J_1 ") è ovviamente nulla e le componenti principali non possono essere tutte linearmente indipendenti. Questo consente di esprimere le relazioni in modo compatto utilizzando solo il secondo " J_2 " e terzo " J_3 " invariante del deviatore

$$J_2 = -\left(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1\right) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (3.2.6)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (3.2.7)$$

Sempre nella figura 7 è possibile notare che la generatrice del cilindro è perpendicolare al piano deviatorico e siccome su questa particolare retta si ha che " $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ", l'asse del cilindro coincide con l'asse idrostatico. Questo fatto indica che la variazione della componente idrostatica sia ininfluente ai fini della determinazione della superficie di snervamento.

Avendo trascurato l'effetto Bauschinger e assunto il materiale come isotropo, la superficie di snervamento risulta avere una simmetria esagonale, garantendo notevoli vantaggi nella pratica sperimentale: per la determinazione della superficie di snervamento non saranno quindi necessarie delle prove a tutto campo ma è sufficiente identificare alcuni punti compresi fra 0° e 30°.

Per maggiore chiarezza e semplicità descrittiva sulla superficie di snervamento è opportuno introdurre un parametro " μ " legato all'angolo di Lode (visualizzabile in figura 8-9)

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = -\sqrt{3} \tan(\theta) \quad (3.2.8)$$

con $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

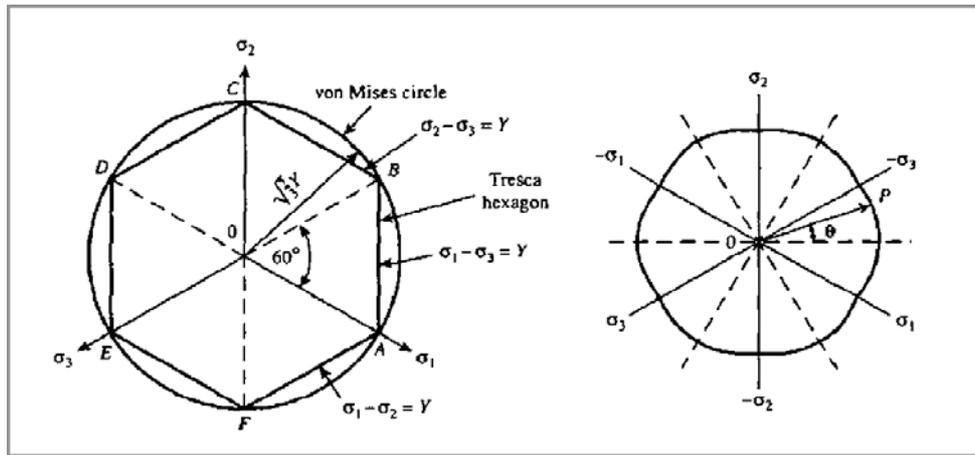


Figura 8 - Superfici di snervamento di Von Mises e Tresca (sinistra). Generica superficie di snervamento (destra), (J. Chakrabarty, [1]).

Dove “ θ ” è proprio l’angolo formato fra il vettore deviatorico e l’asse ortogonale a quello idrostatico che rappresenta lo sforzo di taglio puro (figura 8). Sperimentalmente, sfruttando le qualità di simmetria precedentemente individuate, per determinare la superficie di snervamento sarà sufficiente eseguire delle prove mantenendo i valori di “ μ ” e quindi di “ θ ” compresi fra il taglio puro ($\theta = 0$) e tensione o compressione monoassiale ($\theta = \pm \frac{\pi}{6}$).

La superficie di snervamento viene chiamata “regolare” quando ogni punto è caratterizzato da una sola tangente ed invece, prende il nome di “singolare” quando la tangente non è unica ovvero ci sono degli angoli vivi che uniscono i segmenti (Tresca).

Come sintesi delle parti teoriche introdotte finora, nel 1913 R. von Mises propose un criterio di snervamento, ancora oggi fra i più famosi ed utilizzati. Il criterio, che da lui prende il nome, è caratterizzato da una dipendenza diretta del secondo invariante del deviatore degli sforzi (il terzo viene completamente escluso dall’analisi).

Il criterio può essere scritto nella seguente forma: $J_2 = k^2$

dove k è una costante.

$$s_{ij}s_{ij} = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2k^2 \quad (3.2.10)$$

o anche con

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k^2 \quad (3.2.11)$$

E’ chiaro che la superficie di snervamento di von Mises è un cilindro circolare con l’asse geometrico perpendicolare al piano deviatorico (figura 8).

Un altro criterio molto usato è quello di Tresca (1864) che sulla base di osservazioni sperimentali nei processi di estrusione dei metalli, concluse che lo snervamento avviene al raggiungimento di un valore critico di *shear*. Il criterio può essere scritto come:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (3.2.12)$$

Dove k è il valore di snervamento a taglio del materiale preso in esame.

Come si può notare bene nella figura 8, per un valore generico della tensione di snervamento monoassiale Y la superficie di snervamento di Tresca è un esagono inscritto nel cilindro di base della superficie di von Mises ed è singolare in quanto i vertici dell'esagono non sono caratterizzati da una sola tangente.

3.2.3 Il flusso plastico

Definito il significato della superficie di snervamento è ora possibile indirizzare l'attenzione al caso in cui lo sforzo eccede il limite elastico.

Si consideri un materiale elastico perfettamente plastico definito da un valore di snervamento, che rimane costante durante l'incremento delle deformazioni plastiche.

Trascurando di fatto l'incrudimento del materiale, si sta implicitamente assumendo che la superficie di snervamento resti costante così come che il materiale mantenga le caratteristiche di isotropia iniziali.

Considerando il caso in cui l'analisi sia caratterizzata da piccole deformazioni e spostamenti, è possibile adottare il processo di decomposizione additiva delle deformazioni e descrivere ogni incremento di deformazione totale durante la fase plastica $d\epsilon_{ij}$ come:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (3.2.13)$$

Dove la $d\epsilon_{ij}^e$ può essere calcolata tramite la legge di Hooke generalizzata, mentre l'aliquota plastica $d\epsilon_{ij}^p$ viene governata da quella che viene chiamata legge di flusso plastico o *flow rule*.

Essendo in campo plastico e non avendo ammesso la possibilità di uscire dal dominio elastico (il materiale è considerato perfetto) lo sforzo in esame deve giacere proprio sulla frontiera della superficie di snervamento. Esattamente come lo sforzo, anche l'incremento di deformazione plastica può essere visto come un vettore in uno spazio 9D, e per tutte le ipotesi fatte deve essere diretto lungo la normale alla superficie di snervamento nel punto (definito dallo sforzo agente considerato).

Definendo con n_{ij} il versore della normale è allora possibile definire la *flow rule* come:

$$d\epsilon_{ij}^p = n_{ij} d\lambda \quad (3.2.14)$$

$$\text{con} \quad n_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (3.2.15)$$

Questa espressione è valida per un materiale elastico perfettamente plastico con una superficie di snervamento "regolare" (senza punti critici in cui la tangente non è definita in modo univoco).

Nella relazione (3.2.14) $d\lambda$ è definito come uno scalare positivo e prende il nome di "modulo dell'incremento di deformazione plastica". La relazione (3.2.15) esplicita invece il fatto, già ribadito precedentemente, che lo stress deve restare sul bordo della superficie di snervamento durante ogni incremento di deformazione plastica. Siccome le componenti di n_{ij} sono proporzionali a quelle di $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ dove f è la funzione di snervamento (scritta tramite il

secondo e terzo invariante del deviatore), ne deriva che gli assi principali di n_{ij} siano coincidenti a quelli di σ_{ij} .

Questo, tradotto in modo ancora più esplicito, significa che, per un solido isotropo gli assi del tensore degli sforzi e dell'incremento di deformazione plastica sono coincidenti.

Nel caso sia preso in esame il criterio di von Mises le relazioni assumono la forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}d\lambda \quad \text{con} \quad s_{ij}ds_{ij} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij} \quad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (3.2.18)$$

3.2.4 Plasticità con incrudimento (strain hardening plasticity)

3.2.4.1 Incrudimento isotropo

Una delle ipotesi più comunemente usate per includere l'incrudimento nelle analisi riguardanti la plasticità dei materiali, è assumere che la superficie di snervamento durante la deformazione plastica si espanda in modo costante su tutte le direzioni, senza alcun cambiamento nella sua forma. Questo approccio prende il nome di incrudimento isotropo e per una sua corretta comprensione è subito importante ricordare che:

1. La superficie di snervamento viene definita in modo univoco tramite l'ultimo stato di sforzo (legato alla fase plastica), non è quindi dipendente dal percorso di deformazione seguito
2. il materiale rimane isotropo durante tutta l'analisi e l'effetto Bauschinger non viene considerato, né è possibile un suo inserimento.

Lo stato del materiale ed il suo "incrudimento" vengono espressi tramite l'aumento della sollecitazione di snervamento $\bar{\sigma}$ che, partendo da un valore di riferimento fissato, viene incrementata a causa del flusso plastico (figura 9).

Trascendendo dalla superficie di snervamento utilizzata, è intuitivo vedere come $\bar{\sigma}$ cresca al crescere della deformazione plastica ma per completare il legame costitutivo del materiale è necessario trovare una legge che leghi i due fattori. Questo può essere fatto seguendo due vie: si può innanzitutto assumere che $\bar{\sigma}$ sia una funzione del lavoro plastico speso in un dato volume o in una data porzione di materiale. Ciò equivale a dire:

$$\bar{\sigma} = \phi \left\{ \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \right\} \quad (3.2.18)$$

Una seconda ipotesi mette in relazione lo sforzo equivalente con una misura di deformazione riferita alla deformazione plastica totale. Si introduce quindi una nuova variabile, chiamata "incremento di deformazione plastica equivalente $\overline{d\varepsilon^p}$ ", definita nel seguente modo:

$$\overline{d\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ (d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_z^p)^2 + 2(d\gamma_{xy}^p)^2 + 2(d\gamma_{yz}^p)^2 + 2(d\gamma_{zx}^p)^2 \right\}^{1/2}$$

Il legame fra le due grandezze di interesse è quindi ora del tipo:

$$\bar{\sigma} = F \left\{ \int \overline{d\varepsilon^p} \right\} \quad (3.2.20)$$

3.2.4.2 Incrudimento cinematico

L'incrudimento cinematico rappresenta il modo più semplice per includere l'effetto Bauschinger ed alcune anisotropie legate al percorso di deformazione ed alla plasticizzazione del materiale. La formulazione originale si deve a Ishlinsky (1954) [63] e Prager (1956) [62]; la novità rispetto agli altri approcci teorici presentati precedentemente è che in questo caso l'incrudimento viene legato da una traslazione rigida della superficie di snervamento nello spazio delle tensioni principali, senza alcun cambio di forma o dimensione. Questo è esprimibile matematicamente introducendo un tensore “ α ” chiamato *backstress* che tiene conto della traslazione totale del centro della superficie di snervamento.

Se la superficie di snervamento all'iniziale è esprimibile come una $f(\sigma_{ij}) = k^2$, in un istante generico durante la plasticizzazione si può scrivere come:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k^2 \quad (3.2.21)$$

La superficie di snervamento trasla seguendo le componenti di “ α ”; per quando riguarda la direzione dello spostamento si può asserire che la *yielding surface* si muove lungo la normale esterna alla superficie di snervamento, partendo dal punto della frontiera che rappresenta lo stato di sollecitazione considerato.

L'incremento del *backstress* “ α ” è legato all'incremento di deformazione plastica:

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.2.22)$$

Dove c è un parametro legato alla pendenza della curva complessiva sforzo vero-deformazione vera ottenuta da prove sperimentali di trazione monoassiale. Quando c è costante ed è valida l'ipotesi di *small deformation* il tutto si riduce alla forma integrata dell'equazione:

$$\alpha_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p \quad (3.2.23)$$

Nella figura 9 è riportata una analisi grafica comparativa (per il caso della superficie di von Mises) dei due diversi approcci.

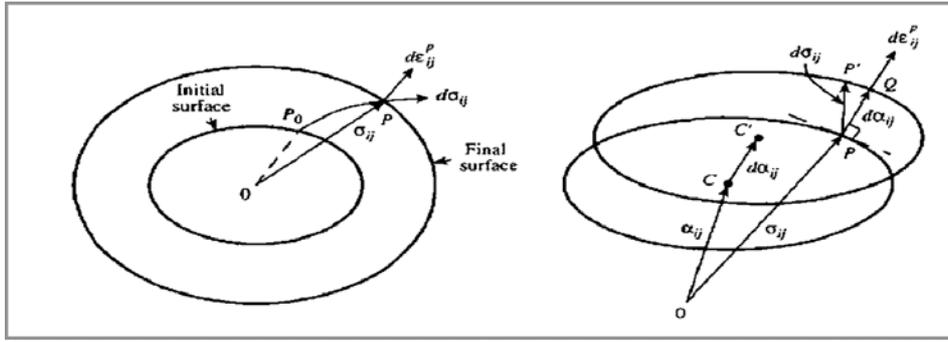


Figura 9 - Rappresentazione geometrica dell'incrudimento isotropo (destra) e cinematico (sinistra) per la superficie di snervamento di von Mises nello spazio delle tensioni principali, (J. Chakrabarty, [1]).

Come anticipato all'inizio del paragrafo, il materiale durante il processo di plasticizzazione può acquistare alcuni gradi di anisotropia. Questo, da un punto di vista analitico, è molto importante perché significa che nella scrittura delle relazioni non si ha più la coincidenza fra gli assi principali del tensore degli sforzi e di quello dell'incremento delle deformazioni plastiche (condizione garantita dall'isotropia del materiale). Gli assi principali ovviamente sono vincolati alla porzione di materiale considerata (o di elemento in caso di simulazioni numeriche) durante la deformazione. Vale ancora la condizione che lo sforzo deve restare sulla superficie di snervamento $df = 0$ che per soddisfare questo requisito cambia forma (incrudimento isotropo) o trasla (cinematico). Analiticamente questo si può scrivere come:

$$\left(d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}\right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0 = \left(d\sigma_{ij} - c d\varepsilon_{ij}^p\right) d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.2.24)$$

Se, come nei precedenti casi, si considera come riferimento la superficie di snervamento di von Mises, è possibile esprimere il criterio di snervamento con incrudimento cinematico per ogni fase del processo di deformazione particularizzando la legge di flusso plastico tramite le 3 relazioni:

$$\begin{aligned} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) &= 2k^2 \\ d\varepsilon_{ij}^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = (s_{ij} - \alpha_{ij}) d\lambda \\ d\lambda &= \frac{1}{2ck^2} (s_{kl} - \alpha_{kl}) d\sigma_{kl} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

3.2.4.3 Incrudimento misto

Proposto fra il 1957 ed il 1976 da Kadashevich [64] Mroz [65] ed altri [66, 67], rappresenta l'unione della teoria dell'incrudimento isotropo e di quello cinematico, per consentire alla superficie di snervamento di modificare la sua forma durante la traslazione nello spazio delle tensioni principali.

Analiticamente questo significa che alla teoria "cinematica", in cui il cambiamento di posizione del centro della superficie di snervamento è dato dal backstress, è necessario aggiungere un valore equivalente della tensione di snervamento (funzione dell'incremento di deformazione plastica equivalente) come visto nel caso isotropo. Tutto questo è esprimibile mediante la relazione:

$$\left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) = \frac{2}{3}\bar{\sigma}^2 \quad (3.2.26)$$

Dove i termini in gioco nella (3.2.26) sono stati tutti definiti precedentemente. Alla stessa maniera è possibile definire la legge di flusso plastico:

$$d\epsilon_{ij}^p = \left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) \frac{3d\bar{\epsilon}^p}{2\bar{\sigma}} = \left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) \frac{d\bar{\sigma}}{h\bar{\sigma}} \quad (3.2.27)$$

Dove h è un parametro che indica la parte isotropa dell'incremento nell'incrudimento del materiale. Differenziando l'equazione (3.2.27) si ottiene:

$$\frac{2}{3}\bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \left(s_{kl} - \alpha_{kl}\right)\left(d\sigma_{kl} - cd\epsilon_{kl}^p\right) \quad (3.2.28)$$

Nella (3.2.28) il parametro c , che verrà introdotto a breve, è invece misura della componente anisotropa.

Esplicitate tutte queste relazioni, è possibile scrivere l'incremento totale di una porzione (o elemento) di materiale isotropo che subisce un incrudimento di tipo combinato. La parte elastica può essere ricavata mediante la legge generalizzata di Hooke:

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left\{ ds_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \right) d\sigma_{kk} \delta_{ij} \right\} \quad (3.2.29)$$

Mentre la parte plastica segue la *flow rule*:

$$\left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) d\epsilon_{ij}^e = \left(\frac{c+h}{2G}\right) \overline{\sigma} d\epsilon^p \quad (3.2.30)$$

$$\left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) d\epsilon_{ij}^p = \overline{\sigma} d\epsilon^p \quad (3.2.31)$$

La (3.2.30) e la (3.2.31) possono essere combinate ottenendo infine:

$$\left(s_{ij} - \alpha_{ij}\right) d\epsilon_{ij} = \left(1 + \frac{H}{3G}\right) \overline{\sigma} d\epsilon^p \quad (3.2.32)$$

$$\text{con } H = \frac{3}{2}(c+h) \quad (3.2.33)$$

H indica il modulo plastico corrispondente allo stato corrente di sforzo. Questo valore rappresenta anche la pendenza della curva complessiva *true stress-true strain* nel punto corrispondente al valore equivalente totale di deformazione plastica accumulata.

3.3 Notazione utilizzata ed alcune *Key Variables*

E' opportuno prima di continuare l'analisi per la descrizione dei processi di grandi deformazioni, fare chiarezza sul significato di alcune variabili e sulla notazione con la quale verranno presentate. Un generico solido, sottoposto ad uno stato di sollecitazione, modifica la sua forma. Partendo da una condizione di riferimento (materiale) fino ad una (spaziale) deformata, i punti x appartenenti alla configurazione di riferimento assumono i valori X della configurazione deformata.

In questo caso è possibile affermare dire che:

- Esiste una motion χ che mappa i punti fra la configurazione deformata e quella di riferimento del corpo (figura 10):

$$B_t = \chi(B, t) \rightarrow x = \chi(X, t)$$

- E' possibile associare ad ogni motion un gradiente di deformazione F tale che:

$$F(X) = \nabla \chi(X) \rightarrow F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$J = \det(F) > 0 \rightarrow dv = JdV_R$$

$$dx = F(X)dX$$

- Si può inoltre dimostrare [1, 4, 5] che la decomposizione (figura 11) del gradiente di deformazione è unica e prende il nome di *polar decomposition*:

$$F = RU = VR$$

$$C = F^T F = \text{Right Cauchy-Green Tensor} = U^2$$

$$B = FF^T = \text{Left Cauchy-Green Tensor} = V^2 = RCR^T \quad \text{con} \quad V = RUR^T$$

- E' infine possibile definire un campo di spostamenti $u(X)$ ed il suo gradiente $H(X)$ nella configurazione spaziale del materiale:

$$u(X) = \chi(X) - X$$

$$H(X) = \frac{\partial u(X)}{\partial X} \rightarrow H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \rightarrow H = F - I$$

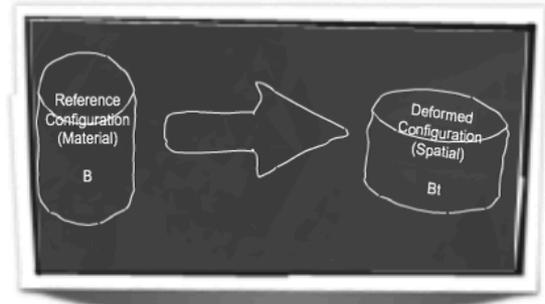


Figura 10 - Configurazione spaziale e di riferimento

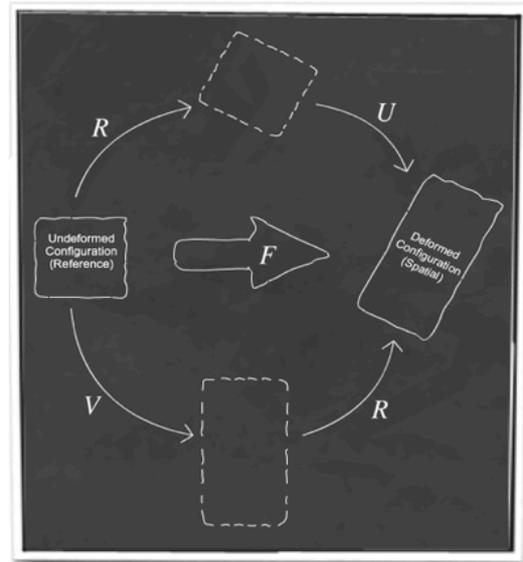


Figura 11 - Polar Decomposition

3.3.1 Descrizione spaziale e materiale dei tensori

Ogni variabile e funzione tensoriale viene descritta ed ha “vita” in un suo preciso spazio vettoriale di riferimento. A causa di questo fatto, per il calcolo del lavoro e delle energie gli spazi devono essere coerenti e le variabili “coniugate”, ovvero, non solo va rispettato il vincolo dello spazio assunto per l’analisi ma anche la descrizione del tensore (o della funzione tensoriale) nelle sue basi. Di conseguenza è spesso necessario trasformare e muovere i tensori o “mapparli” trovando delle relazioni che consentono la descrizione degli stessi in spazi e configurazioni diverse.

Il gradiente di deformazione \underline{F} e la matrice di rotazione \underline{R} essendo tensori definiti “a cavallo” fra le configurazioni spaziale e materiale hanno un ruolo fondamentale in questo compito.

Una funzione o un campo di natura tensoriale \underline{Z} , è definibile in 3 diversi modi:

- Campo tensoriale “spaziale”
(configurazione deformata):
Mappa vettori spaziali su altri vettori spaziali (\underline{V} , \underline{B}).
- Campo tensoriale “materiale”
(configurazione di riferimento):
Mappa vettori materiali su altri vettori materiali (\underline{U} , \underline{C})
- Campo tensoriale “misto”
(configurazione deformata):
Mappa vettori spaziali su vettori materiali e viceversa (\underline{F} , \underline{R}).

Detto questo però nel corso delle analisi sono state introdotte variabili come il gradiente di deformazione (così come il suo inverso ed il suo trasposto) che essendo legato alla motion dei punti del corpo agisce “mappando” tensori fra spazi diversi. In particolare si può dire che:

- ▷ \underline{F} ed \underline{F}^T → Mappano vettori materiali su vettori dello spazio deformato (spaziali)
- ▷ \underline{F}^{-1} ed \underline{F}^{-T} → Mappano vettori (spaziali) su vettori dello spazio di riferimento (materiali)

Combinando ora questi particolari ed importanti funzionali è possibile definire due operatori tensoriali che mappano dei tensori nel loro stesso spazio di provenienza, realizzando delle vere e proprie trasformazioni. Queste operazioni tensoriali assumono una particolare importanza in quanto consentono di ottenere (previa conoscenza del gradiente di deformazione) molteplici misure di stress, coniugate nel lavoro con i diversi tensori di deformazione.

Si definisce **PullBack** del campo tensoriale \underline{Z} , che mappa vettori spaziali su altri vettori spaziali, la combinazione:

$$\underline{P}[\underline{Z}] = \underline{F}^T \underline{Z} \underline{F} \quad 3.3.1$$

Se si considera che il gradiente di deformazione trasposto collega vettori spaziali con vettori materiali e che il gradiente di deformazione semplice fa esattamente il contrario, si capisce che, nella sua globalità, la trasformazione \underline{P} mappa vettori materiali su altri vettori materiali ed è quindi definibile come un *campo tensoriale materiale*. Analogamente, utilizzando opportune combinazioni degli stessi fattori, è possibile definire diversi PullBack di \underline{Z} . E' infatti facile dimostrare che:.

$$\underline{F}^{-1} \underline{Z} \underline{F}^{-T} \quad \text{e} \quad \underline{F}^{-1} \underline{Z} \underline{F} \quad \text{e} \quad \underline{F}^T \underline{Z} \underline{F}^{-T} \quad 3.3.2$$

Siano tutti dei Pullback di \underline{Z} .

Nella 3.3.2 con l'operatore " $(\cdot)^{-T}$ " si indica l'inversa trasposta del gradiente di deformazione.

In modo totalmente analogo è possibile definire un operatore simile che mappa (sempre tramite il gradiente di deformazione) dei campi tensoriali materiali su dei tensori spaziali.

Questa operazione prende il nome di **PushForward** \underline{P}^{-1} .

Considerando un campo tensoriale materiale \underline{M} si può scrivere che:

$$\underline{P}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{M} \underline{F}^{-1} \quad 3.3.3$$

\underline{P}^{-1} mappa tensori materiali su tensori spaziali e per questo può essere visto come un operatore lineare fra tensori (rappresentato da un tensore del quarto ordine).

Le operazioni di pullback e pushforward sono molto importanti nella definizione degli stress ed in molte operazioni di derivazione tensoriale. Infatti è spesso richiesto nell'analisi tensoriale il calcolo di derivate spaziali e materiali di campi spaziali e materiali. Considerando questa varietà di spazi di riferimento e di tensori e le possibili combinazioni fra di essi, è chiaro che le proprietà di mappatura degli operatori appena introdotti risultino avere un ruolo chiave nella corretta descrizione delle variabili in gioco.

3.4 Isotropia

La maggior parte dei concetti introdotti finora e delle relazioni presentate hanno sfruttato l'ipotesi di isotropia, che consente di semplificare notevolmente i legami fra le variabili in gioco e ottenere delle relazioni più maneggevoli.

Per esprimere il concetto in modo sintetico, macroscopicamente si può definire l'isotropia come la capacità intrinseca del materiale di rispondere ad un carico applicato sempre con la stessa deformazione, a prescindere dalla direzione di applicazione o, ancora meglio, che in un solido isotropo le proprietà meccaniche siano costanti per ogni direzione considerata. Questa è ovviamente una ipotesi molto forte che ha trovato grande applicazione ed un ampio campo di validità ma la comprensione nella sua reale essenza è fondamentale per poter analizzare quanto profondamente le relazioni costitutive siano basate su di essa e per poterla superare, affrontando il caso anisotropo.

Si consideri ad esempio una lastra di materiale composito costituito da fibre orientate a 0° e 90° ; è immediato affermare che testando il provino più volte con diverse rotazioni di $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e multipli, le proprietà misurate saranno costanti. Per ogni rotazione/direzione di applicazione del carico le proprietà del provino non cambiano è allora ovvio che il materiale, come sua proprietà intrinseca, debba possedere dei gruppi particolari di rotazioni che garantiscano questo comportamento. Questi particolari insiemi di rotazioni prendono il nome di **gruppi di simmetria** del materiale. Per darne una formulazione matematica rigorosa però conviene ribaltare il problema, ovvero, cercare tutte quelle rotazioni per cui il materiale in esame nella sua configurazione di riferimento non modifica le sue proprietà meccaniche.

Si analizzi ora la figura 12:

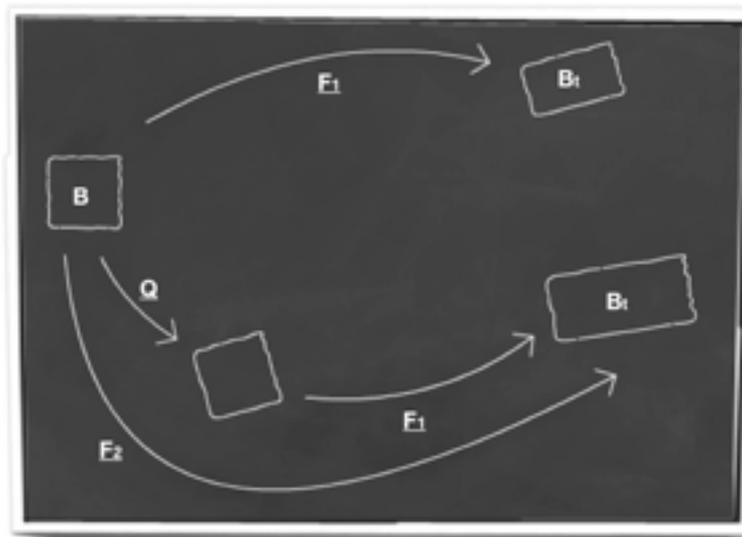


Figura 12 - Diverse trasformazioni del corpo ed i gradienti di deformazione associati ad esse

Si applichi la stessa motion F_1 al corpo due fasi distinte: nella prima si consideri il corpo nella

sua configurazione B di riferimento e poi invece si faccia lo stesso procedimento dopo una rotazione generica Q .

Da un punto di vista complessivo, due trasformazioni si definiscono simmetriche se accade che:

$$\begin{cases} \underline{F}_2 = \underline{F} \underline{Q} \\ \underline{C}_2 = \underline{Q}^T \underline{C} \underline{Q} \end{cases} \rightarrow \bar{\Psi}_2(\underline{Q}^T \underline{C} \underline{Q}) = \bar{\Psi}_1(\underline{C}) \quad (3.4.1)$$

Sia concettualmente, sia da un punto di vista più pratico, considerare singolarmente tutte le possibili rotazioni per le quali il materiale verifichi questa condizione risulterebbe impossibile. Di conseguenza, se l'intento è studiare l'insieme delle simmetrie di un materiale si è costretti ad introdurre il concetto di gruppo.

Il "gruppo" consente di prendere in esame tutte le rotazioni indipendenti dal tempo del corpo nella sua situazione di riferimento, in modo molto selettivo.

Si definisce così un gruppo di rotazione e tutte le singole rotazioni in esame si possono considerare interne al gruppo stesso solo se le operazioni di inversione e di moltiplicazione sono esse stesse interne al gruppo. Considerate quindi due rotazioni generiche \underline{Q}_1 e \underline{Q}_2 :

$$\underline{Q}_1 \& \underline{Q}_2 \in G \quad \text{se} \quad \underline{Q}_1 \cdot \underline{Q}_2 \quad \& \quad \underline{Q}_{1-2}^T \in G \quad (3.4.2)$$

Definito il concetto di gruppo di simmetria, è possibile valutare il comportamento di funzioni e tensori quando vengono applicate al gruppo stesso. Un tensore generico \underline{A} è detto invariante rispetto ad un gruppo di simmetria G , se è invariante rispetto a tutte le rotazioni \underline{Q} contenute in G ovvero:

$$\underline{A} \text{ è invariante rispetto a } G \quad \text{se} \quad \underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T \in G \quad \forall \quad \underline{Q} \in G \quad (3.4.3)$$

Tutto quello appena esposto è stato ricavato per gruppi di simmetria applicati a singoli tensori. Gli stessi passi possono essere ripercorsi per quanto riguarda le funzioni scalari e tensoriali (funzioni a valori tensoriali e a variabile e valori tensoriali).

Una funzione tensoriale (funzione di ed a valori tensoriali) è invariante rispetto ad un gruppo " G " di simmetria se:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{A}) = \varphi(\underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T) \quad \forall \quad \underline{Q} \in G \\ \Phi(\underline{Q} \underline{A} \underline{Q}^T) = \underline{Q} \Phi(\underline{A}) \underline{Q}^T \quad \forall \quad \underline{Q} \in G \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Dove φ è una funzione tensoriale a valori scalari e Φ è una funzione tensoriale a valori tensoriali.

Dalla descrizione matematica al caso fisico-meccanico il salto è breve: si definisce come trasformazione simmetrica una rotazione della configurazione di riferimento che lascia inalterata la risposta della configurazione deformata. Il gruppo di simmetria del materiale è così dato dall'insieme di tutte le trasformazioni simmetriche possedute da un materiale (proprietà intrinseca del solido stesso).

E' allora conveniente richiamare alcuni importanti insiemi notevoli tensoriali:

- $\text{Orth}^+ = \{\text{Tutte le rotazioni}\}$
- $\text{Lin}^+ = \{\text{Tutti i tensori con determinante positivo}\}$
- $\text{Sym} = \{\text{Tutti i tensori simmetrici}\}$
- $\text{Psym} = \{\text{Tutti i tensori simmetrici definiti positivamente}\}$

E' chiaro che gli ultimi 3 gruppi sono tutti sottogruppi di "Orth⁺". Questa definizione consente di definire in maniera univoca un materiale isotropo da uno anisotropo, in quanto è possibile asserire che:

Si definisce isotropo un materiale il quale gruppo di simmetria comprende tutte le rotazioni possibili, anisotropo quando il suo gruppo di simmetria non coincide con quello isotropo.

Formalizzando si ha che:

$$\text{Se } G \equiv \text{Orth}^+ \quad \rightarrow \quad \text{Materiale Isotropo}$$

$$\text{Se } G \neq \text{Orth}^+ \quad \rightarrow \quad \text{Materiale Anisotropo}$$

La conseguenza più importante al verificarsi del caso isotropo è che si può dimostrare [4] che l'energia libera $\bar{\Psi}_R$ è anch'essa una funzione isotropa e per questa categoria di funzioni è possibile usare il teorema di rappresentazione che consente di esprimerla come funzione dei suoi invarianti, conducendo la trattazione verso delle relazioni scalari (in campo elastico lineare). La dimostrazione di questo fatto è abbastanza immediata: se il materiale è isotropo, tutte le rotazioni devono essere contenute nel gruppo di simmetria, allora deve essere sicuramente inclusa anche la rotazione che deriva dalla scomposizione polare del gradiente di una motion generica. In questo modo è possibile mostrare che la free energy $\bar{\Psi}_R$ è funzione solamente dei

tensori di Cauchy-Green (destro e sinistro):

$$\bar{\Psi}_R(\underline{C}) = \bar{\Psi}_R(\underline{Q}^T \underline{C} \underline{Q}) \quad (3.4.5)$$

$$\underline{Q} = \underline{R}^T \quad \text{con} \quad \underline{F} = \underline{R} \underline{U} \quad (3.4.6)$$

$$\bar{\Psi}_R(\underline{C}) = \bar{\Psi}_R(\underline{R}^T \underline{C} \underline{R}) = \bar{\Psi}_R(\underline{B}) \quad (3.4.7)$$

La dipendenza dai soli \underline{C} e \underline{B} di una funzione isotropa, unito al teorema di rappresentazione, consente di scrivere la stessa come una funzione dei suoi soli invarianti.

Derivando la stessa relazione si ottiene invece il tensore di sforzo di Cauchy, come funzione scalare (non più vettoriale o tensoriale) dei soli invarianti del tensore \underline{B} , semplificando notevolmente l'analisi e mostrando in maniera inequivocabile le cause che dall'ipotesi di isotropia si ottengono delle relazioni costitutive scalari.

Nel caso generale di un materiale elastico isotropo si può scrivere la variazione di energia libera come:

$$\dot{\Psi} = \underline{T}_R : \dot{\underline{F}} \quad (3.4.8)$$

Dove si ricorda la definizione dei due tensori:

$$\underline{T}_R = 1^{st} \text{ Piola Stress Tensor} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}_R(\underline{B})}{\partial \underline{B}} \underline{F} \quad (3.4.9)$$

$$\underline{T} = \text{Cauchy Stress Tensor} = J^{-1} \underline{T}_R \underline{F}^T = 2J^{-1} \frac{\partial \bar{\Psi}_R(\underline{B})}{\partial \underline{B}} \underline{B} = \underline{T}(\underline{B}) \quad (3.4.10)$$

Quindi ora è possibile esprimere per il caso elastico lineare la relazione fra sforzi e deformazioni in modo scalare, rispettando tutti i vincoli imposti dalla termodinamica. Il teorema di rappresentazione consente inoltre di scrivere la relazione (3.4.10) come funzione dei soli invarianti del tensore \underline{B} di Cauchy-Green, eliminando la dipendenza direzionale e riconducendo l'analisi verso forme più note e comuni:

$$\bar{\Psi}_R(\underline{B}) = \tilde{\Psi}_R(I_B) = \tilde{\Psi}_R(I_1, I_2, I_3) = \tilde{\Psi}_R(\underline{C}) = \widehat{\Psi}_R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.4.11)$$

Il materiale non dissipa energia in quanto isotropo ed elastico lineare, quindi l'energia libera e lo sforzo, sono solo funzioni della deformazione all'istante corrente e non della storia di carico.

E' allora conveniente esprimere l'energia libera tramite un'espansione di Taylor, come una forma quadratica della deformazione:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = 0 \quad \rightarrow \quad \left[\tilde{\sigma}(\varepsilon) - \frac{\partial \tilde{\Psi}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] : \dot{\varepsilon} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{\partial \tilde{\Psi}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (3.4.12)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C} \varepsilon \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{\partial \tilde{\Psi}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C} \varepsilon \quad (3.4.13)$$

Quindi grazie alle caratteristiche di simmetria che vengono introdotte nel tensore "C" rispetto alle 81 possibili costanti, solamente 21 possono essere indipendenti ed utilizzando il teorema di rappresentazione si arriva all'espressione:

$$\underline{\mathbb{C}} \underline{A} = 2\mu \underline{A} + \lambda (\text{tr} \underline{A}) \underline{I} \quad (3.4.14)$$

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon = 2\mu \varepsilon + \lambda (\text{tr}(\varepsilon)) I \quad (3.4.15)$$

ritornando quindi al caso classico della legge di Hooke formulata con due soli parametri indipendenti, le costanti di Lamè μ e λ .

3.5 Cinematica delle deformazioni

Si consideri la figura 13:

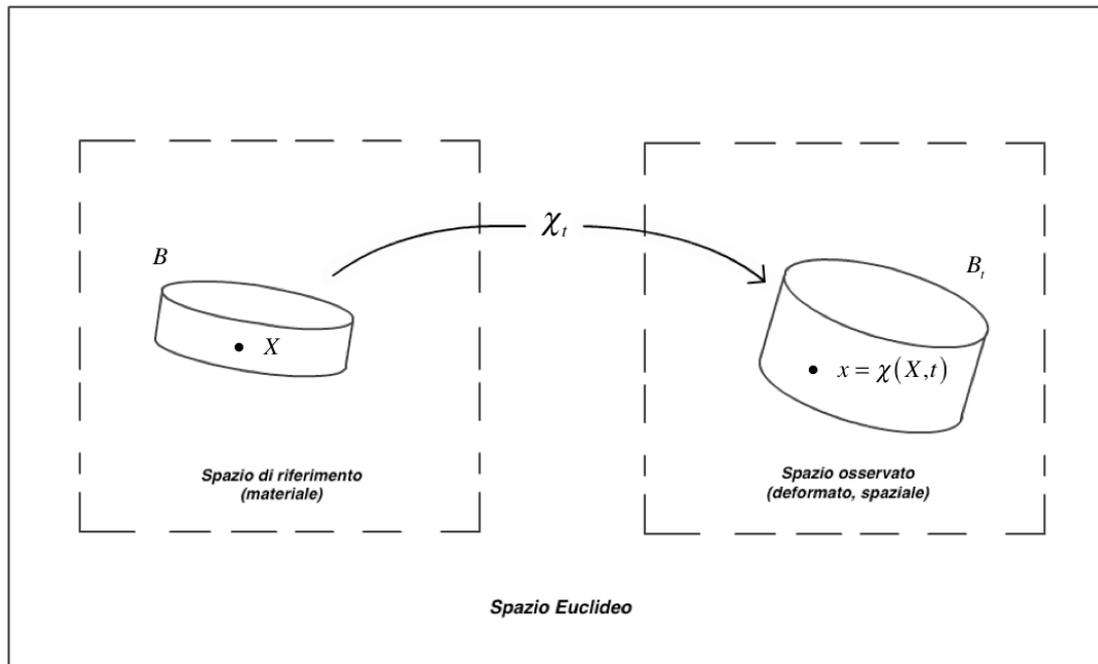


Figura 13 - Configurazione spaziale B_t e di riferimento B in uno spazio euclideo.

Nella configurazione di riferimento si trovano i punti materiali indicati con la lettera X , mentre nella configurazione spaziale si trovano i punti deformati x . Questi ultimi altro non sono che i punti X traslati a causa della deformazione dopo il tempo t . E' possibile definire una **motion** χ ovvero, una funzione che lega in modo biunivoco i punti dei due sistemi:

$$x = \chi(X, t) \quad (3.5.1)$$

$$B_t = \chi(B, t) \quad (3.5.2)$$

Nella (3.5.2), B_t è proprio il corpo deformato all'istante di tempo t . Siccome si è considerata come ipotesi fondamentale il fatto che la motion stabilisca una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due insiemi, è sicuramente invertibile e si può scrivere che:

$$X = \chi^{-1}(x, t) \quad (3.5.3)$$

La motion mappa i punti fra i due insiemi in esame, trasformando i punti materiali in spaziali identificandone in un certo qual senso il loro spostamento e quindi la deformazione del corpo. Per formalizzare in modo più rigoroso tutto questo è possibile, data una particolare trasformazione del corpo ad un tempo t fissato, definire un **gradiente di deformazione** \underline{F} come:

$$F(X) = \nabla \chi(X) \quad \rightarrow \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.5.4)$$

In cui viene assunto per definizione che

$$J = \det F > 0$$

Se per esempio si considera dX come un segmento infinitesimo, definito nella situazione di riferimento, dopo un tempo t questo segmento nella configurazione spaziale sarà definito come:

$$dx = F(X)dX \quad (3.5.5)$$

Quindi si può affermare che: il gradiente di deformazione mappa segmenti infinitesimi fra la configurazione di riferimento e quella deformata.

Il gradiente di deformazione è scomponibile (figura 11) tramite quella che viene chiamata la **decomposizione polare** (dall'inglese polar decomposition) che permette di scrivere il tensore tramite il prodotto altri due tensori uno di stretch ed uno di rotazione.

$$F = RU \quad \rightarrow \quad U = \text{Stretch Destro}$$

$$F = VR \quad \rightarrow \quad V = \text{Stretch Sinistro}$$

I tensori di stretch U e V sono simmetrici e definiti positivamente mentre R è un tensore di rotazione ortogonale. Da queste grandezze appena introdotte è facile definire i **tensori di Cauchy-Green**, anch'essi simmetrici e definiti positivamente, che rappresentano una importante misura di deformazione:

$$C = F^T F = \text{Tensore destro di Cauchy-Green} \quad (3.5.6)$$

$$B = FF^T = \text{Tensore sinistro di Cauchy-Green} \quad (3.5.7)$$

Dalla decomposizione polare risulta evidente che:

$$\begin{aligned}
 C = U^2 &= \sum_{i=1}^3 \omega_i r_i \otimes r_i \\
 B = V^2 &= RCR^T = \sum_{i=1}^3 \omega_i l_i \otimes l_i \\
 V &= RUR^T
 \end{aligned}
 \tag{3.5.8}$$

La decomposizione spettrale mostrata nelle relazioni (3.5.8) mette in evidenza la differenza del sistema di basi con il quale vengono descritti i due tensori di Cauchy-Green. Infatti \underline{C} e \underline{B} hanno gli stessi autovalori ma autovettori diversi, in modo del tutto analogo a U e V :

$\{r_i\}$ = Base principale destra, Autovalori di U

$\{l_i\}$ = Base principale sinistra, Autovalori di V

Ora è possibile ricapitolare in modo esaustivo il legame fra le grandezze messe in relazione dalla decomposizione polare e la loro rappresentazione spettrale, esplicitando le rispettive basi:

$$U = \sum_i \lambda_i r_i \otimes r_i \quad ; \quad R = \sum_i l_i \otimes r_i \tag{3.5.9}$$

$$V = \sum_i \lambda_i l_i \otimes l_i \quad \text{con} \quad \lambda_i > 0 \quad \& \quad l_i = Rr_i \tag{3.5.10}$$

$$C = \sum_i \lambda_i^2 r_i \otimes r_i \quad ; \quad B = \sum_i \lambda_i^2 l_i \otimes l_i \tag{3.5.11}$$

$$F = \sum_i \lambda_i l_i \otimes r_i \tag{3.5.12}$$

Fatta chiarezza su tutte le grandezze in gioco, è ora possibile formulare le definizioni delle trasformazioni di volumi e aree fra la configurazione di riferimento e quella deformata.

Si prenda in esame la figura 14:

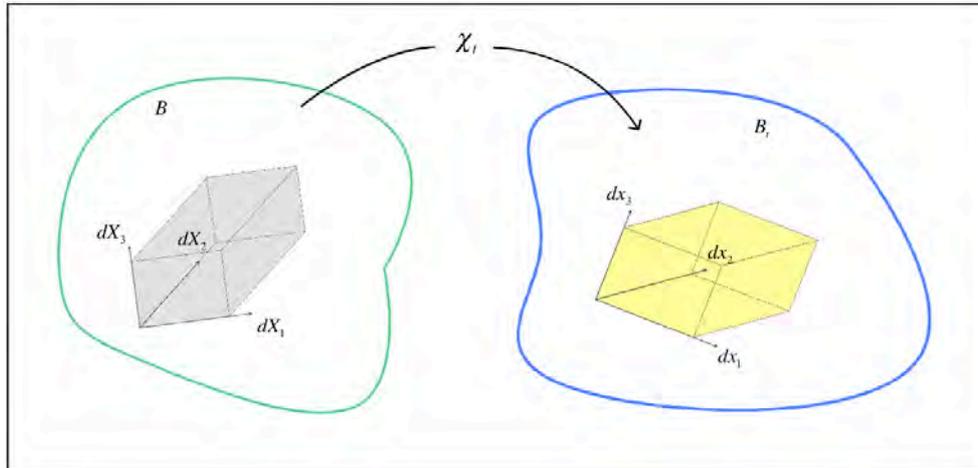


Figura 14 - Variazione di un volume elementare fra la configurazione di riferimento e quella spaziale

E' possibile descrivere un elemento di volume nella configurazione di riferimento ed in quella spaziale, utilizzando il prodotto misto fra tre segmenti infinitesimi linearmente indipendenti appartenenti ai rispettivi spazi:

$$dv_R = (dX_1 \times dX_2) \cdot dX_3 > 0 \quad (3.5.13)$$

$$dv = (dx_1 \times dx_2) \cdot dx_3 > 0 \quad (3.5.14)$$

Ovviamente le due espressioni rappresentano lo stesso volume che viene modificato tramite la motion χ . Introducendo il gradiente di deformazione associato a questa trasformazione è possibile mappare tutti e tre gli elementi lineari ed esplicitare la relazione che guida il **cambio di volume fra le due configurazioni**.

$$dx_1 = F(X)dX_1 \quad dx_2 = F(X)dX_2 \quad dx_3 = F(X)dX_3$$

$$dv = (F(X)dX_1 \times F(X)dX_2) \cdot F(X)dX_3 = (\det F(X))((dX_1 \times dX_2) \cdot dX_3) \quad (3.5.15)$$

$$\boxed{dv = Jdv_R}$$

Oltre alla variazione di volume è fondamentale introdurre un'altra grandezza, chiamata elongazione o *stretch*, definita dalla variazione di un segmento infinitesimo fra B_t e B .

Un modo sicuramente efficace per esprimere i segmenti lineari infinitesimi nelle le due configurazioni è quello di scriverli come il prodotto della loro lunghezza infinitesima in modulo per il vettore unitario che li orienta:

$$\underline{dX} = dS \underline{e} \quad \underline{dx} = \underline{F} \underline{dX} = ds \tilde{\underline{e}} \quad (3.5.16)$$

Dove dS e ds sono i moduli infinitesimi dei segmenti considerati. Il rapporto fra queste due grandezze è chiamato **elongazione o stretch** ed esprime l'accorciamento/allungamento di una porzione lineare di materiale durante la deformazione, avvenuta fino al tempo t

$$\lambda = \text{Stretch} = \frac{ds}{dS} = | \underline{U} \underline{e} | > 0 \quad (3.5.17)$$

Lo *stretch* è sempre positivo e quando è maggiore di 1 si ha parla di una trazione (o allungamento) mentre se è compreso fra 0 ed 1 si ha una compressione.

Utilizzando tutte le grandezze introdotte fino a questo punto, si può definire un importante campo vettoriale che descrive lo spostamento di tutti i punti appartenenti alla configurazione materiale del solido. Per un singolo punto appartenente a \mathbf{B} si può scrivere:

$$\underline{u}(\underline{X}) = \underline{\chi}(\underline{X}) - \underline{X} \quad (3.5.18)$$

Il campo vettoriale $\underline{u}(\underline{X})$ vive sempre nella configurazione di riferimento del solido e prende il nome di campo di spostamento del punto/corpo.

Alla stessa identica maniera di come fatto precedentemente con le deformazioni, anche per gli spostamenti è possibile definire un **gradiente di spostamento** $\underline{H}(\underline{X})$ e legarlo al gradiente di deformazione precedentemente introdotto:

$$\underline{H}(\underline{X}) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{X})}{\partial \underline{X}} = \underline{F} - \underline{I} \quad \rightarrow \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij}$$

Un altro importante campo tensoriale definito nella configurazione deformata è il **gradiente di velocità** (*velocity gradient*) definito come:

$$\underline{L}(x,t) = \text{grad } v(x,t) \quad (3.5.19)$$

Per esprimere \underline{L} in funzione del gradiente di deformazione è indispensabile introdurre la derivata materiale rispetto al tempo del gradiente di deformazione:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{F}}(X,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \chi(X,t)) = \nabla(\dot{\chi}(X,t)) = \nabla(v(\chi(X,t),t)) \\ &= (\text{grad } v(\chi(X,t),t))F(X,t) = L_m(X,t)F(X,t) \end{aligned}$$

$$\underline{L} = \dot{\underline{F}}\underline{F}^{-1} \quad (3.5.20)$$

Il gradiente di velocità, avendo una connessione con la derivata del gradiente di deformazione, ha un ruolo chiave per scrivere le **equazioni di evoluzione del gradiente di deformazione** stesso:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{F}} &= \underline{L}\underline{F} \\ \dot{\underline{F}}^T &= \underline{F}^T \underline{L}^T \\ \dot{\underline{F}}^{-1} &= -\underline{F}^{-1} \underline{L} \\ \dot{\underline{F}}^{-T} &= -\underline{L}^T \underline{F}^{-T} \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Tramite la parte simmetrica ed antisimmetrica di " \underline{L} " si definiscono due importanti tensori:

$$D(x,t) = \frac{1}{2}(\underline{L}(x,t) + \underline{L}(x,t)^T) \quad \rightarrow \quad \underline{D} = \text{Stretching tensor} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T) \quad (3.5.22)$$

$$W(x,t) = \frac{1}{2}(\underline{L}(x,t) - \underline{L}(x,t)^T) \quad \rightarrow \quad \underline{W} = \text{Spin tensor} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (3.5.23)$$

Il significato fisico di \underline{D} e \underline{W} non è banale; entrambi rappresentano infatti delle variazioni della configurazione materiale del corpo.

Il primo, noto come tensore di stretching \underline{D} , è legato all'incremento di allungamento per unità di lunghezza di un elemento materiale nella configurazione spaziale

L'altro, il tensore di spin \underline{W} , è legato alla decomposizione spettrale di \underline{D} che risulta essere

definito in un particolare sistema di riferimento (assi principali di stretching). \underline{W} indica proprio l'evoluzione degli assi principali di stretching.

Quindi sia \underline{D} , sia \underline{W} , non sono un reale incremento di stretch o di deformazione. In particolare modo lo *spin tensor* \underline{W} è formato da due contributi di rotazione, uno, chiamato \underline{W}_{rot} , dato dal tensore \underline{R} , derivato dalla decomposizione polare del gradiente, che esprime la rotazione vera e propria ed uno legato allo stretch indotto dalla \underline{U} , indicato con \underline{W}_{str} .

$$\underline{W} = \underline{W}_{rot} + \underline{W}_{str} \quad (3.5.24)$$

$$\underline{W}_{rot} = \dot{\underline{R}}\underline{R}^T$$

$$\underline{W}_{str} = \underline{R} \left[\text{skw}(\dot{\underline{U}}\underline{U}^{-1}) \right] \underline{R}^T$$

Spesso inoltre il tensore \underline{D} viene confuso e preso come un incremento del tensore materiale di deformazione lagrangiano (Lagrangian o Green material strain tensor). Questo non è corretto in quanto, si può dimostrare che la derivata materiale rispetto al tempo del tensore materiale di deformazione lagrangiano non è uguale al tensore di stretching \underline{D} :

$$\dot{\underline{E}}^{(G)} = \frac{1}{2}(\dot{\underline{F}}^T \underline{F} + \underline{F}^T \dot{\underline{F}}) = \underline{F}^T \left[\frac{1}{2}(\underline{F}^{-T} \dot{\underline{F}}^T + \dot{\underline{F}}\underline{F}^{-1}) \right] \underline{F} = \underline{F}^T \left[\frac{1}{2}(\underline{L}^T + \underline{L}) \right] \underline{F} = \underline{F}^T \underline{D}\underline{F} \quad (3.5.25)$$

3.5.1 Deformazioni Infinitesime

Quando la motion applicata al corpo è molto ridotta, ovvero lo spostamento dei punti materiali è minimo, o nel caso limite infinitesimo, si verificano le condizioni che permettono di applicare l'approccio di piccole deformazioni o *small strain*. Quando questo si verifica il tutto si traduce in notevoli vantaggi e semplificazioni nella teoria di descrittiva.

Si ricade nel caso di deformazioni piccole o infinitesime quando risulta essere verificato che:

$$|\underline{H}| = |\underline{F} - \underline{I}| \ll 1 \quad (3.5.26)$$

Allora tramite \underline{H} è possibile anche definire una grandezza \underline{E} chiamata tensore di deformazione infinitesimo (*infinitesimal strain tensor*):

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{H} + \underline{H}^T);$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right);$$

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{e}_i \otimes \hat{e}_i$$

Le basi con cui è stato definito \underline{E} nella sua decomposizione spettrale si possono considerare uguali e coincidenti alla base principale destra $\{r_i\}$. Gli autovalori ε_i introdotti nella stessa decomposizione spettrale (***) sono invece facilmente definibili utilizzando gli *stretch* principali λ_i :

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \quad (3.5.27)$$

Ripercorrendo tutto quello mostrato in questo capitolo e nel presente paragrafo, risulta essere semplice mettere in relazione l'*infinitesimal strain tensor* con le altre grandezze di deformazione che sono state introdotte: Considerando i tensori sinistro e destro di Cauchy-Green si vede infatti che risultano valide le seguenti relazioni:

$$\underline{C} = \underline{1} + \underline{H} + \underline{H}^T + \underline{H}^T \underline{H} \quad \underline{B} = \underline{1} + \underline{H} + \underline{H}^T + \underline{H} \underline{H}^T$$

Di conseguenza quando $|H|$ è piccolo si ha che:

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) + o(|\underline{H}|) = \frac{1}{2}(\underline{B} - \underline{I}) + o(|\underline{H}|) \quad (3.5.28)$$

ed infine se il gradiente di spostamento è piccolo e prossimo a $o(|H|)$ vale che:

$$\underline{E} \approx \frac{1}{2}(\underline{U}^2 - \underline{I}) \approx \frac{1}{2}(\underline{V}^2 - \underline{I}) \quad (3.5.29)$$

per cui è possibile riformulare la decomposizione spettrale e, ricordando che con gradienti di spostamento molto piccoli, gli stretch principali sono molto vicini ad un valore unitario, riscrivere la formulazione di “ E ” verificando la definizione iniziale.

$$\underline{E} \approx \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) r_i \otimes r_i \approx \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) l_i \otimes l_i = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i r_i \otimes r_i \quad (3.5.30)$$

3.5.2 Deformazioni Finite

Nel caso di grandi deformazioni, la descrizione dei tensori è analiticamente più complessa rispetto al caso affrontato nella sezione precedente. Questo avviene perché esistono due diverse configurazioni in cui definire le grandezze (non si ha più la coincidenza fra il caso materiale e quello spaziale) e perché l'intento di fondo è legare tramite questi tensori le variazioni di lunghezza e quelle angolari della configurazione di riferimento.

La necessità di utilizzare molteplici grandezze per definire la deformazione finita è collegata al fatto che il gradiente agisce mappando i punti appartenenti a due configurazioni che non sono prossime; questo fatto ovviamente genera significative variazioni fra le distanze, gli spostamenti, gli angoli e le basi in cui vengono descritti tutti i tensori. Creandosi una differenza notevole fra le basi e le componenti indipendenti dei tensori in gioco, per la corretta definizione delle misure di deformazione legate ai tensori di *stretch* e di Cauchy-Green, è necessario dare attenzione ai diversi sistemi di riferimento (destrorso e sinistrorso) che sono stati usati nello spazio materiale ed in quello spaziale. In questo modo è possibile definire il tensore di deformazione di Green-St.Venant \underline{E}^G , nella configurazione di riferimento e quello di Almansi-Hamel \bar{E}^A , che "vive" invece nella configurazione spaziale.

$$\underline{E}^G = \frac{1}{2}(\underline{U}^2 - I) = \frac{1}{2}(\underline{C} - I) \quad (3.5.31)$$

$$\bar{E}^A = \frac{1}{2}(I - \underline{V}^{-2}) = \frac{1}{2}(I - \underline{B}^{-1}) \quad (3.5.32)$$

Questo approccio, sebbene molto efficace, non è stato però utilizzato in modo esteso poiché seguendo gli studi di Hill pubblicati nel 1978 [68-70], il modo più completo per definire delle grandezze di deformazione finita è formulare due classi di tensori, tramite una funzione di scala "g" ottenendo:

$$\underline{E}^G = \text{Generalized Symmetric Material Strain Tensor} = \sum_{i=1}^3 g(\lambda_i) r_i \otimes r_i$$

$$\bar{E}^G = \text{Generalized Symmetric Spatial Strain Tensor} = \sum_{i=1}^3 g(\lambda_i) l_i \otimes l_i$$

Ovviamente il primo gruppo di funzioni è definito nella configurazione materiale del corpo ed il secondo nella configurazione spaziale. La funzione di scala può assumere diverse forme ma quella più conosciuta è la seguente:

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2n}(\lambda^{2n} - 1) & \text{se } n \neq 0 \\ \ln \lambda & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (3.5.33)$$

Dove $2n$ è un intero. Il vantaggio principale nell'utilizzo di questa funzione di scala è che, per alcuni particolari valori di n , si ottengono dei tensori di deformazione spaziali e materiali molto famosi ed utilizzati in diverse teorie della continuum mechanics.

Si possono introdurre due famiglie di tensori:

- La classe di **tensori materiali di deformazione finita** risulta essere:

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2n} (\lambda_i^{(2n)} - 1) r_i \otimes r_i = \frac{1}{2} (U^{(2n)} - I) & \text{se } n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^3 (\lambda_i) r_i \otimes r_i & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Una volta definita la classe, al variare n è possibile definire alcuni tensori “notevoli”

→ $n = 1$:

Green strain tensor (anche chiamato Lagrangian strain tensor):

$$\underline{\underline{E}}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) r_i \otimes r_i = \frac{1}{2} (U^2 - I) \equiv \underline{\underline{E}}^{(G)}$$

→ $n = 1/2$:

Biot material strain tensor

$$\underline{\underline{E}}^{(1/2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_i - 1) r_i \otimes r_i = (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}})$$

→ $n = 0$:

Logaritmica strain tensor (anche noto come Hencky material strain tensor)

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i r_i \otimes r_i \equiv \underline{\underline{E}}^{(H)}$$

- La classe di **tensori spaziali di deformazione finita** risulta essere:

$$\bar{\underline{E}}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2n} (\lambda_i^{2n} - 1) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \frac{1}{2} (\underline{V}^{(2n)} - \underline{I}) & \text{se } n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^3 (\lambda_i) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \ln(\underline{V}) & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Una volta definita la classe, al variare “ n ” è possibile definire alcuni tensori “notevoli”

→ $n = 1$:

Finger spatial strain tensor:

$$\bar{\underline{E}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \frac{1}{2} (\underline{V}^2 - \underline{I}) = \frac{1}{2} (\underline{B} - \underline{I}) \equiv \bar{\underline{E}}^F$$

→ $n = -1$:

Eulerian strain tensor (noto come *Almansi* o *Hamel spatial strain tensor*)

$$\bar{\underline{E}}^{(-1)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{V}^{-2}) = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{B}^{-1}) \equiv \bar{\underline{E}}^A$$

→ $n = -1/2$:

Biot spatial strain tensor

$$\bar{\underline{E}}^{(-1/2)} = \sum_{i=1}^3 (1 - \lambda_i^{-1}) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = (\underline{I} - \underline{V}^{-1})$$

→ $n = 0$:

Spatial logarithmic strain tensor

$$\bar{\underline{E}}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i = \ln(\underline{V})$$

3.5.3 Coniugazione nel senso del lavoro: Stress tensors

Tutte le formulazioni agli elementi finiti e gran parte della teoria della meccanica dei solidi si basano sui concetti di lavoro interno e di lavoro virtuale, entrambi calcolabili conoscendo lo stato di deformazione e di sforzo del solido in esame. Dal paragrafo precedente è però chiaro che non esiste una sola misura della deformazione, e conseguentemente per il corretto calcolo del lavoro è necessario introdurre varie misure dello stato di sollecitazione, che consentono di dare definizioni corrette e coerenti (ovvero rispettando gli spazi di riferimento). Queste misure di sforzo, che vengono accoppiate ai tensori di deformazione, vengono dette *coniugate nel senso del lavoro* ed hanno una importanza cruciale nella formulazione nel caso si considerino grandi deformazioni.

Si considerino ora due diverse configurazioni di una porzione di solido, una materiale ed una spaziale. Su un elemento infinitesimo di superficie ds sotto l'azione di una forza df , che agisce sulla superficie stessa, si genera uno stato di sforzo che si può scrivere come:

$$\underline{df} = \underline{\sigma} \underline{nds} \rightarrow \text{Configurazione spaziale}$$

$$\underline{df} = \underline{P} \underline{NdS} \rightarrow \text{Configurazione materiale}$$

Dove $\underline{\sigma}$ è ovviamente il tensore degli sforzi di Cauchy. La sua controparte \underline{P} definita nella configurazione di riferimento prende il nome di **primo tensore degli stress di Piola-Kirchhoff**. Risulta inoltre chiaro immediatamente dalla loro scrittura che, il tensore di Cauchy è proprio quello che precedentemente è stato battezzato con il nome di *true stress*, in quanto, è definito dal rapporto fra la forza applicata sul corpo e l'area/superficie della configurazione deformata. Al contrario il primo tensore di stress di Piola-Kirchhoff è una quantità fittizia poiché mette in relazione la forza "reale" con l'area relativa alla configurazione indeformata del corpo (che tradotto nel caso monoassiale riconduce esattamente alla definizione della deformazione nominale o ingegneristica).

E' possibile scrivere delle relazioni di passaggio fra questi due tensori, impiegando il gradiente di deformazione per identificare la variazione fra le areole infinitesime delle due configurazioni. Si ha infatti che:

$$\underline{nds} = \underline{J} \underline{F}^{-T} \underline{NdS} \tag{3.5.34}$$

$$\underline{\sigma} \underline{nds} = \underline{P} \underline{NdS} \tag{3.5.35}$$

Dove J è il determinante del gradiente di deformazione

Il legame fra il tensore di Cauchy ed il primo di Piola-Kirchhoff risulta essere:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{J} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \\ \underline{\sigma} &= \underline{J}^{-1} \underline{P} \underline{F}^T \end{aligned}} \tag{3.5.36}$$

Dalla (3.5.36) si ottiene l'importante informazione che il primo tensore di Piola-Kirchhoff non è un tensore simmetrico; questo fatto rende l'utilizzo di questa particolare misura dello stato di sforzo molto marginale (anche per motivazioni legate al fatto della sua definizione "a cavallo" fra diverse configurazioni del corpo) ma imprescindibile in alcuni casi che verranno esposti in seguito.

E' inoltre possibile definire un **secondo tensore degli stress di Piola-Kirchhoff** \underline{S} che, sebbene non abbia una definizione fisica univoca e chiara, "vive" nello spazio di riferimento del corpo ed è coniugato nel senso del lavoro con il tensore materiale lagrangiano di deformazione finita " $\underline{E}^{(1)}$ ". Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff è definito dalla:

$$\underline{S} = \underline{JF}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (3.5.37)$$

Il legame fra i due tensori di Piola-Kirchhoff risulta essere:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{F} \underline{S} \\ \underline{S} &= \underline{F}^{-1} \underline{P} \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

La rappresentazione fisica non è chiara come nei due casi precedenti ma il secondo tensore di Piola-Kirchhoff può essere visto come il rapporto fra la forza fittizia (o spaziale, applicata al corpo deformato) e la corrispondente area della configurazione di riferimento del corpo.

Avendo introdotto nel capitolo 3 delle molteplici misure di deformazione, è necessario definire altri tensori per rappresentare lo stato di sforzo:

Il **tensore degli sforzi di Kirchhoff** $\underline{\tau}$ definito come:

$$\underline{\tau} = \underline{j} \underline{\sigma} \quad (3.5.39)$$

Il tensore di Kirchhoff è uno *spatial tensor field* ed è ovviamente simmetrico in quanto il tensore di Cauchy è simmetrico. Viene spesso utilizzato per semplificare le relazioni che includono il tensore di Cauchy e lo Jacobiano.

Per tutto quello definito nella sezione 3.3.1 il tensore di Kirchhoff è il pushforward del secondo tensore di Piola-Kirchhoff \underline{S} ed è coniugato del tensore di stretching \underline{D} :

$$\underline{\tau} = \chi_* (\underline{S}) = \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T ; \quad \underline{S} = \chi_*^{-1} (\underline{\tau}) = \underline{F}^{-1} \underline{\tau} \underline{F}^{-T}$$

La seconda misura è invece il **tensore degli sforzi di Biot** (chiamato anche *Jaumann stress tensor*) \underline{T}_B , simile al primo tensore di Piola-Kirchhoff, dove però compare il tensore di deformazione \underline{U} (proveniente dalla polar decomposition) in sostituzione del gradiente di deformazione \underline{F} .

$$\underline{T}_B = \underline{R}^T \underline{P} = \underline{U} \underline{S} \quad (3.5.40)$$

E' possibile anche definire un altro tensore, chiamato **tensore di stress nominale** \underline{S}^N , particolarmente utile in quanto coniugato con il gradiente di deformazione:

$$\underline{S}^N = \underline{F}^{-1} \underline{\tau} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \quad (3.5.41)$$

Per non generare confusione fra le molteplici possibilità nella misura dello stato di sforzo e di deformazione così come per gli accoppiamenti per rispettare la coniugazione nel senso del lavoro, le relazioni fra i vari stress ed i legami con gli strain sono riportati nella tabella 1.

Tabella 1 - Relazioni di passaggio fra le diverse misure di sforzo

Nome/notazione	$\underline{\sigma}$	$\underline{\tau}$	\underline{S}^N	\underline{P}	\underline{S}
Cauchy $\underline{\sigma}$	$\underline{\sigma}$	$\frac{1}{J} \underline{\tau}$	$\frac{1}{J} \underline{F} \underline{S}^N$	$\frac{1}{J} \underline{P} \underline{F}^T$	$\frac{1}{J} \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T$
Kirchhoff $\underline{\tau}$	$J \underline{\sigma}$	$\underline{\tau}$	$\underline{F} \underline{S}^N$	$\underline{P} \underline{F}^T$	$\underline{F} \underline{S} \underline{F}^T$
Nominale \underline{S}^N	$J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}$	$\underline{F}^{-1} \underline{\tau}$	\underline{S}^N	$(\underline{P})^T$	$\underline{S} \underline{F}^T$
1° Piola-Kirchhoff \underline{P}	$J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}$	$\underline{\tau} \underline{F}^{-T}$	$(\underline{S}^N)^{-T}$	\underline{P}	$\underline{S} \underline{F}^T$
2° Piola-Kirchhoff \underline{S}	$J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}$	$\underline{F}^{-1} \underline{\tau} \underline{F}^{-T}$	$\underline{S}^N \underline{F}^{-T}$	$\underline{F}^{-1} \underline{P}$	\underline{S}

Si ricorda inoltre che il tensore:

$$\hat{\underline{\tau}} = \underline{R}^T \underline{\tau} \underline{R} \quad (3.5.42)$$

Viene chiamato tensore di Kirchhoff ruotato ed, in particolare, la trasformazione $\underline{R}^T (\cdot) \underline{R}$ si utilizza per riportare l'analisi alle basi lagrangiane (materiali).

3.6 Anisotropia elasto-plastica

La parola isotropia deriva dalla lingua greca ed è composta dall'unione delle due parole *iso* (uguale) e *tropos* (direzione), è quindi un aggettivo che descrive un *unicum* il cui comportamento è uguale in tutte le direzioni considerate. Nella stessa lingua greca con i prefissi privativi *a* ed *an* si intende indicare la qualità opposta ed è proprio da qui che la parola anisotropia viene formata.

Nel senso più generale possibile, l'anisotropia è quella proprietà per il quale un determinato oggetto, materiale o proprietà fisica ha delle qualità, intrinseche o generate, variabili in funzione della direzione lungo la quale vengono considerate. Il mondo della fisica e della matematica è pieno di esempi significativi di anisotropie (radiazione delle antenne, fenomeni di polarizzazione, fluorescenza anisotropa, comportamento elettrico e magnetico di alcuni materiali, radiazioni di fondo cosmiche) e questo è ancora messo meglio in evidenza se si considera il campo della meccanica dei solidi.

Nei materiali questa qualità può essere legata a due fattori molto distinti fra loro: una delle cause più comuni è che l'anisotropia rifletta le caratteristiche atomiche/cristallografiche del materiale stesso a causa delle proprietà fisiche variabili nelle diverse direzioni di propagazione dei campi elastici/plastici (come spesso avviene nei cristalli e nelle rocce).

Da un punto di vista macro-strutturale, invece, l'anisotropia si riscontra in maniera molto frequente nei materiali non omogenei (legno su tutti) e nei compositi, nei quali queste caratteristiche e quelle ortotrope stanno alla base del loro successo, consentendo di "concentrare" su alcune direzioni di carico preferite le qualità del materiale tralasciando le altre e guadagnando molto in termini di peso e resistenza della struttura.

Nei materiali omogenei il discorso è diverso: la configurazione micro-strutturale di partenza garantisce infatti caratteristiche isotrope. Durante i processi di produzione e lavorazione si possono però generare vari tipi di simmetrie che esulano dell'isotropia. Questa particolare anisotropia, detta "indotta", è solitamente legata ai processi di plasticità che vengono generati da molte pratiche industriali come: estrusione, formatura, vari tipi di stampaggio e altre lavorazioni meccaniche abbastanza comuni. Infatti, durante i processi di grande deformazione plastica effettuati su materiali metallici policristallini, alcuni piani cristallografici delle zone più critiche tendono a ruotare in funzione della direzione in cui sta avvenendo la parte più ingente della deformazione. Questo è verificabile anche dall'osservazione della tessitura del materiale, che assume un aspetto fibroso disponendosi secondo direzioni preferenziali. Questo fenomeno, che viene mediato nella macro-scala, è molto simile a quello che avviene a livello atomico su un singolo cristallo quando la deformazione supera il campo elastico: i piani di scorrimento tendono infatti a ruotare per diventare paralleli alla direzione della massima deformazione principale.

In maniera semplificativa si può dire che come risultato di successive plasticizzazioni un metallo inizialmente isotropo acquisisce alcuni gradi di anisotropia. Le sollecitazioni di snervamento nelle diverse direzioni, ad esempio, vengono modificate e possono essere considerabilmente diverse se vengono considerate nelle direzioni ortogonali a quella in cui è avvenuta la plasticizzazione.

Spesso nelle lastre di alluminio laminate a freddo il valore di snervamento nella direzione trasversale a quella in cui avviene la laminazione è abbastanza diverso rispetto a quello riscontrato nella direzione di laminazione stessa.

Essendo questa una caratteristica non posseduta ma indotta nel materiale, esistono anche dei trattamenti termici che consentono di “rilassare” il materiale e di recuperare, anche se solitamente in modo parziale, le caratteristiche isotrope o di limitare le differenze della risposta del materiale al variare della direzione considerata.

Finora tutto è stato affrontato da un punto di vista strettamente qualitativo. Quando si vuole passare ad una analisi quantitativa dell’anisotropia, indicando quindi quali relazioni costitutive descrivono il comportamento elastico e plastico di diversi materiali da un punto di vista analitico, il tutto si complica.

L’introduzione della direzionalità nelle equazioni e nella trattazione tensoriale del problema rende impossibile effettuare quelle semplificazioni che conferivano le caratteristiche di eleganza e semplicità tipiche della trattazione isotropa.

A questo si aggiunge anche il fatto che è necessario riformulare delle nuove superfici e criteri di snervamento e che il legame fra sforzi e deformazioni anche nel caso elastico lineare non è più di natura scalare (legge di Hooke generalizzata) coinvolgendo molte più costanti e parametri del materiale da determinare.

E’ noto che (figura 15) lo stato di sforzo di un elemento infinitesimo è identificato da 9 diverse componenti.

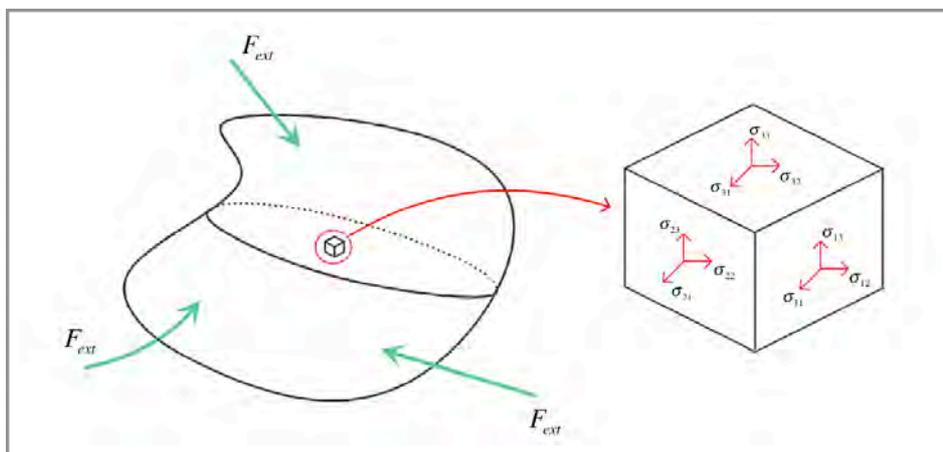


Figura 15 - Stato di sforzo per un volume elementare generico estratto da un solido anisotropo

Considerando valida la rappresentazione quaternionica per descrivere lo stato di sforzo (in modo da rappresentare tutte e 9 le componenti in un solo vettore), la matrice anisotropa elastica che lega sforzi e deformazioni si può scrivere in modo esteso come:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.6.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \mathbb{S}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.6.2)$$

Dove \mathbb{C}_{ijkl} e \mathbb{S}_{ijkl} sono tensori del quarto ordine (81 componenti) e rappresentano rispettivamente il tensore di rigidità (*stiffness tensor*) e di cedevolezza (*compliance tensor*). In forma quaternionica si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

L'utilizzo dei quaternioni è utile ai fini descrittivi perché permette di rappresentare tramite matrici i tensori di cedevolezza e rigidità che sono invece dei tensori del quarto ordine. Nello schema riportato nella figura 16 sono descritte alcune delle possibili schematizzazioni utilizzate in questo campo per la rappresentazione delle funzioni tensoriali:

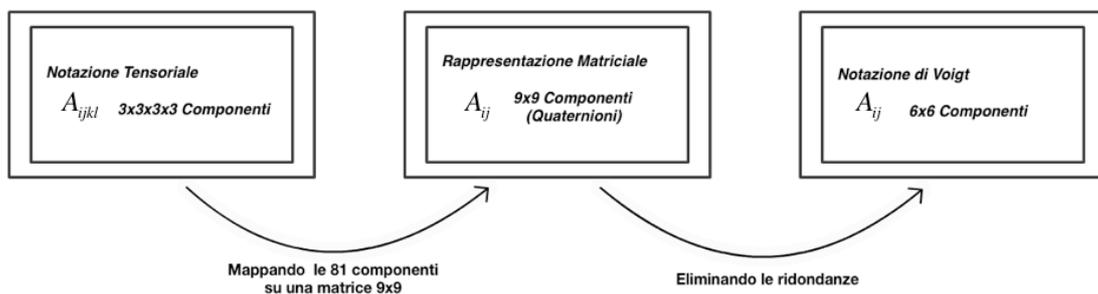


Figura 16 - Schema mostrante alcune possibilità di rappresentazione delle funzioni tensoriali del quarto ordine

Considerando quindi la notazione di Voigt, ovvero assumendo l'esistenza di 3 assi principali mutualmente ortogonali, si possono eliminare delle ridondanze ed il legame fra sforzi e deformazioni si può scrivere come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix}$$

Dove delle 36 componenti non tutte sono indipendenti e molte risultano essere (in funzione dell'analisi e del tipo di materiale e processo considerato) nulle o legate da vincoli di simmetria all'interno della matrice.

Oltre alla ridefinizione della legge di Hooke che regola il campo elastico, se si vuole affrontare la plasticità anisotropa è fondamentale ridefinire il concetto di dominio elastico ed il criterio di snervamento.

Il più frequente ed efficace è il criterio di snervamento anisotropo di R. Hill [68] che si riduce ad essere equivalente al criterio di von Mises quando il grado di anisotropia è basso (le costanti elastiche del materiale tendono all'uguaglianza lungo i tre assi principali)

Si consideri un materiale anisotropo con tre assi principali x, y, z , coincidenti con i piani di simmetria ed il sistema di riferimento globale. Per ogni porzione del suddetto materiale inoltre si prenda un sistema di riferimento rettangolare, avente gli assi coincidenti allo stesso sistema globale di anisotropia.

Sotto queste condizioni è possibile scrivere una funzione di snervamento quadratica nello stress della forma:

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L \cdot \tau_{yz}^2 + 2M \cdot \tau_{zx}^2 + 2N \cdot \tau_{xy}^2 = 1 \quad (3.6.3)$$

Dove F, G, H, L, M, N sono dei parametri da determinare in modo sperimentale che definiscono il grado di anisotropia. Queste sei costanti sono tutte essenzialmente funzione delle sollecitazioni di snervamento longitudinali e trasversali, scritte nelle tre direzioni principali del materiale. Se con $\sigma_{1,2,3}^y$ si indicano i tre valori di snervamento sui tre assi di riferimento e con $\tau_{12,23,31}^y$ quelli di snervamento a taglio, i coefficienti del criterio di snervamento di Hill si possono esprimere in questa forma:

$$F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\sigma_2^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_3^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_1^y)^2} \right]$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\sigma_3^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_1^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_2^y)^2} \right]$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\sigma_1^y)^2} + \frac{1}{(\sigma_2^y)^2} - \frac{1}{(\sigma_3^y)^2} \right]$$

$$L = \frac{1}{2(\tau_{23}^y)^2}; \quad M = \frac{1}{2(\tau_{31}^y)^2}; \quad N = \frac{1}{2(\tau_{12}^y)^2}$$

L'assenza di un termine lineare nel criterio mette in evidenza il fatto che l'effetto Bauschinger non venga preso in considerazione, così come non ci sia dipendenza dello snervamento dalla pressione, in quanto i valori di stress normali compaiono tutti tramite delle differenze.

Risulta anche immediato vedere che la relazione (3.6.3) "ricade" nel criterio di snervamento di von Mises quando:

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H = \frac{3}{2} (\sigma_{isotropic}^y)^2 \quad (3.6.4)$$

Lo stato di anisotropia è quindi specificato dalla direzione dei tre assi principali di anisotropia e dal valore di 6 costanti (sollecitazioni di snervamento)

Una volta noto il criterio di snervamento è possibile anche dare una definizione della **flow rule**, che adesso deve essere formulata per tutti gli incrementi della deformazione. Sfruttando il criterio generale che vincola il flusso plastico ad essere normale alla tangente esterna della superficie di snervamento e l'importante assunzione che il potenziale plastico sia equivalente alla superficie di snervamento, si può scrivere il tensore di deformazione incrementale per un materiale ortotropo come:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.6.5)$$

Considerando tutte le nove le componenti del tensore degli sforzi indipendenti, si ottengono le seguenti relazioni chiamate leggi generalizzate di flusso di Levy-Mises:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)] d\lambda ; \\ d\varepsilon_y &= [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)] d\lambda ; \\ d\varepsilon_z &= [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)] d\lambda ; \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

$$d\gamma_{xy} = N\tau_{xy} d\lambda$$

$$d\gamma_{yz} = L\tau_{yz} d\lambda ;$$

$$d\gamma_{zx} = M\tau_{zx} d\lambda$$

Si può facilmente verificare la condizione di incompressibilità del flusso plastico ed è opportuno sottolineare che quando gli assi principali dello stress coincidono con quelli di anisotropia anche gli incrementi di deformazione seguono le stesse direzioni.

3.7 Teoria delle grandi deformazioni

La corretta valutazione del problema delle grandi deformazioni è fondamentale quando si vuole trattare correttamente l'anisotropia. Questo poiché, specialmente nei materiali metallici policristallini, i processi con il quale questa viene indotta sono tutti legati ad alti gradi di deformazione e plasticizzazione.

In questo paragrafo si vogliono richiamare le relazioni cinematiche di base per la trattazione del problema, mentre nei paragrafi successivi verranno descritti i modelli numerici per risolvere ed implementare le analisi di grandi deformazioni.

Sebbene tramite la teoria delle *small strain* molti problemi ingegneristici comuni vengano risolti brillantemente, questa analisi è completamente inefficace per la descrizione del buckling, delle instabilità elastiche dei materiali e di particolari processi in cui, anche con deformazioni piccole, avvengono delle rotazioni considerevoli.

Se a questi fatti si aggiunge che spesso i metalli vengono prodotti e lavorati (formatura, estrusione, lavorazioni a macchina, estrazione e altro) con metodologie che sfruttano elevate deformazioni plastiche o ancora, progettati per avere nella vita utile grandi cambiamenti di forma con elevate pressioni o velocità (impatti e proiettili) si può capire ancora meglio l'importanza di una corretta definizione dei processi di *large strain*.

La differenza principale fra la teoria delle piccole e delle grandi deformazioni risiede nella scomposizione della deformazione:

- **Small Strain:** Decomposizione additiva della deformazione $\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{tot} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
- **Large Strain:** Decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione $\rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \boldsymbol{F}^p$

La decomposizione additiva nel caso delle small strain era basata sul fatto che considerando deformazioni e spostamenti infinitesime anche il gradiente di spostamento " \boldsymbol{H} " risulta essere di conseguenza molto piccolo. Questo fatto consente una decomposizione additiva, scorporando la parte elastica da quella plastica, sia nelle deformazioni infinitesime, sia per quanto riguarda le rotazioni:

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \text{Displacement Gradient} = \underline{\boldsymbol{H}}^e + \underline{\boldsymbol{H}}^p \rightarrow \begin{cases} \underline{\boldsymbol{H}}^e = \text{Distorsione elastica} = \underline{\boldsymbol{E}}^e + \underline{\boldsymbol{W}}^e \\ \underline{\boldsymbol{H}}^p = \text{Distorsione plastica} = \underline{\boldsymbol{E}}^p + \underline{\boldsymbol{W}}^p \end{cases}$$

Dove le $\underline{\boldsymbol{E}}^{e,p}$ e le $\underline{\boldsymbol{W}}^{e,p}$ rappresentano la parte simmetrica e antisimmetrica della parte plastica e di quella elastica del gradiente.

Quando le deformazioni non si possono più considerare piccole o infinitesime la decomposizione additiva non è applicabile e deve essere sostituita con la decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione $\underline{\boldsymbol{F}}$, introdotta da Kroner intorno al 1960 e per

questo anche chiamata **Kroner (o Lee) decomposition**. Kroner infatti, studiando le dislocazioni su singoli cristalli e materiali policristallini, ha suggerito questa tecnica di scomposizione che si è dimostrata estremamente efficace per trattare il problema. La paternità di questa decomposizione è contesa fra Kroner e Lee, ma quest'ultimo, anche se è stato il primo ad inquadrarlo sotto la tematica meccanica, ha sfruttato l'idea di Kroner nota da 7 8 anni prima. Inoltre, la versione di Lee utilizza l'ipotesi molto forte che la parte elastica del gradiente sia sempre simmetrica, cosa che non sempre è corretta e verificabile.

Si prenda in esame ora la figura 17:

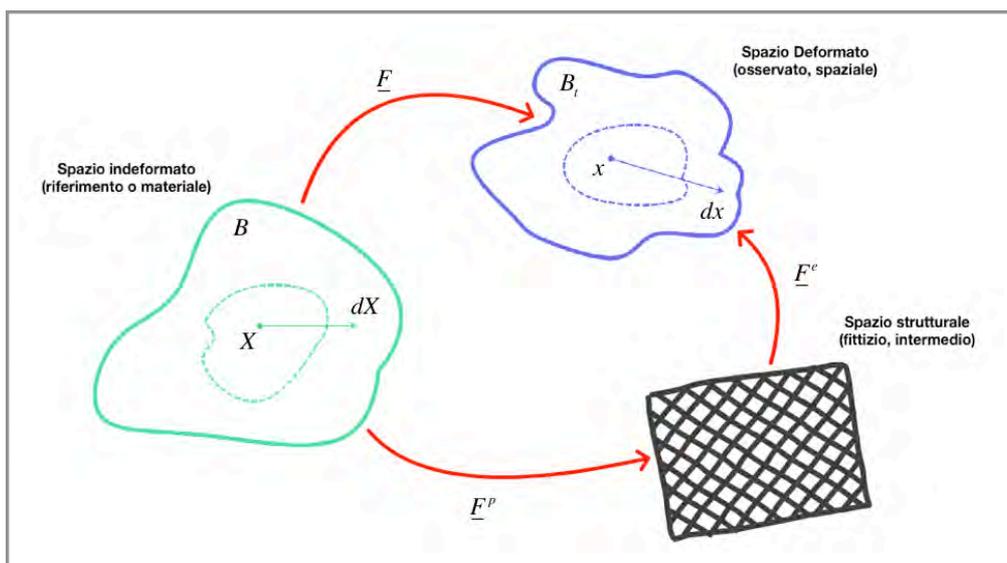


Figura 17 - Kroner decomposition. Il gradiente di deformazione può essere visto scomposto in tre diversi spazi di riferimento (indeformato, deformato e strutturale)

La decomposizione moltiplicativa dice che:

$$\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p \quad (3.7.1)$$

Quindi ora la deformazione va considerata separatamente nella sua parte elastica ed in quella plastica: la parte plastica è permanente quindi lo scopo dello spazio strutturale è avere uno spazio in cui il corpo giace dopo lo scarico elastico e che è possibile usare per riportarlo in B_t (spazio deformato), ricaricandolo con la parte elastica della deformazione. Dalla cinematica delle deformazioni è già stato esplicitato il legame fra i diversi gradienti di deformazione e la motion:

$$\underline{F} = \nabla \underline{\chi} \quad (3.7.2)$$

Sebbene valga la scomposizione matematica, fisicamente non è consentito trovare un raffronto:

la decomposizione di Kroner permette di scorporare il gradiente ma da un punto di vista fisico non esistono delle motion singole di cui $\underline{F}^{e,p}$ siano i gradienti associati:

$$\cancel{\underline{F}^e = \nabla \chi^e}; \quad \cancel{\underline{F}^p = \nabla \chi^p}$$

Infatti $\underline{F}^{e,p}$ sono solo dei tensori locali che mappano segmenti infinitesimi fra tre spazi diversi. Se si considera un segmento infinitesimo $d\ell$, descritto nello spazio strutturale, si può allora scrivere:

$$dx = \underline{F}dX = \underline{F}^e \underbrace{\underline{F}^p dX}_{d\ell} = \underline{F}^e d\ell \quad (3.7.3)$$

Da queste relazioni si capisce meglio il ruolo dei due gradienti locali e delle loro proprietà di mappatura: \underline{F}^p mappa vettori fra lo spazio materiale e quello strutturale, \underline{F}^e mappa vettori fra lo spazio strutturale e quello spaziale (deformato).

Nel caso delle large strain valgono ancora tutte le grandezze definite nel paragrafo 5 di questo capitolo ma è necessario rivedere i postulati tenendo conto della *Kroner decomposition*:

Si consideri il gradiente di velocità \underline{L} :

$$\underline{L} = \text{grad}(\dot{\chi}) = \dot{\underline{F}}\underline{F}^{-1} \quad \text{poiché} \quad \dot{\underline{F}} = \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^p + \underline{F}^p \dot{\underline{F}}^p; \quad \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{p-1} \underline{F}^{e-1}$$

allora si può riscrivere \underline{L} come:

$$\underline{L} = \underline{L}^e + \underline{F}^e \underline{L}^p \underline{F}^{e-1}; \quad \text{con} \quad \underline{L}^e = \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^{e-1}; \quad \underline{L}^p = \dot{\underline{F}}^p \underline{F}^{p-1}$$

Ancora una volta è possibile da qui definire i tensori di *stretching* e di *spin* per il caso plastico ed elastico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{D}^e = \text{Stretching Elastico} = \frac{1}{2}(\underline{L}^e + \underline{L}^{eT}) \\ \underline{W}^e = \text{Spin Elastico} = \frac{1}{2}(\underline{L}^e - \underline{L}^{eT}) \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{D}^p = \text{Stretching Plastico} = \frac{1}{2}(\underline{L}^p + \underline{L}^{pT}) \\ \underline{W}^p = \text{Spin Plastico} = \frac{1}{2}(\underline{L}^p - \underline{L}^{pT}) \end{array} \right.$$

Dove le parti “elastiche” sono dei campi tensoriali spaziali (definiti nello spazio deformato) e tutti i contributi “plastici” sono invece dei campi tensoriali strutturali (vivono quindi nello spazio strutturale).

Alla stessa maniera dei casi precedenti, per i tensori elastici è possibile formulare la decomposizione polare:

$$\underline{F}^e = \underline{R}^e \underline{U}^e = \underline{V}^e \underline{R}^e ; \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{U}^e = \sqrt{\underline{F}^{eT} \underline{F}^e} \\ \underline{V}^e = \sqrt{\underline{F}^e \underline{F}^{eT}} \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{C}^e = (\underline{U}^e)^2 = \underline{F}^{eT} \underline{F}^e \\ \underline{B}^e = (\underline{V}^e)^2 = \underline{F}^e \underline{F}^{eT} \end{array} \right.$$

Definendo così quelli che vengono chiamati tensori di *stretch* elastici \underline{U}^e , \underline{V}^e e tensori elastici di Cauchy-Green \underline{C}^e , \underline{B}^e . Tramite questi si può mettere in relazione l'evoluzione di $\dot{\underline{C}}^e$ con lo *stretch* \underline{D} :

$$\underline{D}^e = \frac{1}{2} \underline{F}^{eT} \dot{\underline{C}}^e \underline{F}^{e-1} \quad (3.7.4)$$

3.8 Modellazione dell'anisotropia: Il modello Bathe-Montans

Per ridurre le difficoltà riscontrate nelle simulazioni e nei calcoli, nelle ultime decadi molti modelli e relazioni costitutive sono stati presentati alla comunità scientifica del settore, descrivendo il comportamento di questa categoria di solidi in varie tipologie di analisi fra cui: termoelasticità [4, 61], accoppiamenti fra elasticità anisotropa e plasticità isotropa [72, 73], viscoplasticità, termo-viscoplasticità [4] e altro ancora. Sebbene le proposte siano state numerose e molto varie negli approcci analitici e teorie fisico/cinetiche di riferimento, non molti modelli matematici si sono poi rivelati efficaci per un'ampia casistica e, ancora meno, di facile implementazione numerica, in particolar modo su prodotti commerciali che sfruttano il metodo agli elementi finiti. Fra tutte le proposte il presente lavoro si è concentrato su un modello introdotto recentemente [74] dal Prof. Klaus Jurgen Bathe del Massachusetts Institute of Technology e dal prof. Francisco Montans dell'università "Castilla-La Mancha, E.T.S." di Madrid. Questo modello, oltre ad avere delle basi teoriche molto solide e legate strettamente alla cinematica ed alla termodinamica dei processi irreversibili, presenta grandi vantaggi dal punto di vista implementativo; vantaggi che verranno introdotti e discussi nel capitolo seguente. Lo scopo di questa sezione è invece di illustrare una *review* della teoria di base del modello ed evidenziare i punti salienti, in modo da rappresentare una chiusura di tutti gli argomenti teorici presentati durante tutto il capitolo. Affinché un modello matematico sia capace di tenere conto dell'anisotropia elasto-plastica alcune caratteristiche devono essere presenti: la risposta elastica del solido deve poter essere anisotropa, lo snervamento a sua volta deve essere governato da una funzione anisotropa, l'incrudimento deve essere tenuto conto in modo direzionale e soprattutto, le direzioni principali elastiche del materiale e della funzione di snervamento devono allinearsi nella direzione di maggior deformazione durante la plasticizzazione. Tenendo conto di tutte queste necessità Bathe e Montans nel 2007 [77-80], hanno proposto un modello basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, utilizzando il tensore delle deformazioni logaritmico, con uno schema di mappatura esponenziale per l'*update* del gradiente e considerando infine il *plastic spin* come una variabile di stato interna del processo.

Per mostrare in modo più chiaro lo schema dell'implementazione e dell'algoritmo di calcolo, è necessario fare una piccola modifica alla notazione usata fino a questo momento, inserendo due pedici extra per identificare il tempo in cui una variabile/tensore viene calcolato/considerato. Quindi ${}^t\underline{\mathbf{X}}^e$, ad esempio, rappresenta una grandezza tensoriale (il gradiente di deformazione per esempio) calcolato fra l'istante 0 ed un tempo t , nella sua componente elastica. Le grandezze invece contraddistinte da un asterisco in basso a destra ${}^t\underline{\mathbf{X}}_*^e$ saranno invece dei valori *trial*, ovvero dei valori di tentativo, che seguiranno un classico schema numerico del tipo *predictor-corrector* per realizzare il metodo del ritorno radiale, che verrà discusso in seguito nella fase di aggiornamento della superficie di snervamento.

3.8.1 Basi teoriche del modello: Cinematica

Il modello Bathe-Montans [74] segue fedelmente la teoria delle grandi deformazioni presentata nel punto 3.5 e 3.7. Considerando gli istanti temporali di riferimento si può quindi scrivere:

$${}^t\underline{\underline{F}} = {}^t\underline{\underline{F}}_p(t) {}^t\underline{\underline{F}}_0^{p(t)} = {}^t\underline{\underline{F}}_0^e {}^t\underline{\underline{F}}_0^p \quad (3.8.1)$$

La decomposizione dell'equazione (3.8.1) è ovviamente unica se la parte plastica ${}^t\underline{\underline{F}}_0^p$ è nota (per esempio dal passo precedente di integrazione temporale).

Alla stessa maniera si possono definire campi tensoriali spaziali (come il gradiente di velocità) di cui, utilizzando dei valori "modificati", è possibile dare una decomposizione additiva:

$$\underline{\underline{L}} = \text{grad}(\underline{\underline{\dot{\chi}}}) = {}^t\underline{\underline{\dot{F}}}_0 {}^t\underline{\underline{F}}_0^{-1} \quad (3.8.2)$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^e + \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{L}}^p; \quad \text{con} \quad \underline{\underline{L}}^e = \underline{\underline{\dot{F}}}_0^e \left(\underline{\underline{F}}_0^e \right)^{-1}; \quad \underline{\underline{L}}^p = \underline{\underline{\dot{F}}}_0^p \left(\underline{\underline{F}}_0^p \right)^{-1};$$

$\underline{\underline{L}}^p$ prende il nome di gradiente di velocità plastico modificato e scomponendolo nella sua parte simmetrica e antisimmetrica si ottengono il *modified plastic deformation rate tensor* $\underline{\underline{D}}^p$ ed il *modified plastic spin tensor* $\underline{\underline{W}}^p$. In sostanza, tutti i valori modificati del gradiente di velocità altro non fanno che mappare (*pullback*) i tensori fra la configurazione e quella intermedia (spazio strutturale). $\underline{\underline{C}}^e$ è ancora una volta il tensore destro di Cauchy-Green e vive nello spazio strutturale (anche detto *stress free configuration*).

Fino a questo momento tutte le relazioni sono state riferite al tempo t , ma ora è fondamentale integrarle seguendo l'avanzamento temporale e la storia di carico; per fare questo il modello Bathe-Montans usa il metodo esponenziale di Eulero di tipo *backward*:

$${}^t\underline{\underline{\dot{F}}}_0^p = {}^t\underline{\underline{L}}_0^p {}^t\underline{\underline{F}}_0^p \quad \rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{F}}_0^p = \exp\left(\Delta t \quad {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{L}}_0^p\right) {}^t\underline{\underline{F}}_0^p \quad (3.8.3)$$

La funzione esponenziale, a patto di considerare dei passi di avanzamento temporali molto piccoli, può essere linearizzata, ottenendo:

$$\exp\left(\Delta t \quad {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{L}}_0^p\right) \approx \underline{\underline{I}} + \Delta t \quad {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{L}}_0^p \quad \text{se} \quad \left\| \Delta t \quad {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{L}}_0^p \right\| \ll 1 \quad (3.8.4)$$

in questo modo si può scomporre di nuovo il gradiente di velocità ed ottenere:

$$\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{L}^p = \Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{D}^p + \Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{W}^p$$

$$\exp\left(\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{L}^p\right) \simeq \exp\left(\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{D}^p\right) \exp\left(\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{W}^p\right) \quad (3.8.5)$$

Utilizzando queste due relazioni è possibile formulare le seguenti equazioni di evoluzione:

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}^{p-1} = {}^t\underline{F}^{p-1} \exp\left(-\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{W}^p\right) \exp\left(-\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{D}^p\right)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}^e = \underline{F}_*^e \exp\left(-\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{W}^p\right) \exp\left(-\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{D}^p\right)$$

$$\underline{F}_*^e = {}^{t+\Delta t}\underline{F}_0 \text{ } {}^t\underline{F}_0^e \quad (3.8.6)$$

Dove \underline{F}_*^e è il gradiente di deformazione *trial* che considera lo stato plastico come se questo fosse bloccato.

E' anche possibile usare la decomposizione polare del gradiente *trial* per definire un tensore di rotazione incrementale plastico ${}^{t+\Delta t}\underline{R}^w$, fondamentale per muoversi nelle configurazioni mantenendo le rotazioni "bloccate"; queste particolari configurazioni verranno ora indicate con una freccia rivolta verso sinistra posizionata sotto la variabile " $\underline{\quad}$ "

$$\underline{F}_*^e = \underline{R}_*^e \underline{U}_*^e ; \quad \underline{C}_*^e = \underline{F}_*^{eT} \underline{F}_*^e$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{R}_*^w = \exp\left(\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t}\underline{W}^p\right) \quad (3.8.7)$$

I valori *trial* ed il tensore di Cauchy Green, come già sottolineato precedentemente, vivono nello spazio strutturale. E' quindi fondamentale la definizione di una situazione in cui la rotazione plastica venga considerata costante, trascurando l'aliquota di rotazione data nelle equazioni dalla parte plastica del gradiente di velocità.

Questo è un passo necessario in quanto, calcolando i valori *trial* del gradiente di deformazione non è possibile conoscere a priori la rotazione plastica incrementale finale, nota solo al termine del passo di calcolo, vi è quindi la necessità di considerare particolari spazi in cui le grandezze siano coerenti e valutate a parità di condizioni. Per questo motivo ha particolare senso definire il seguente operatore che consente il passaggio alla situazione reale di corpo scarico (spazio strutturale)

$$\left(\underline{\quad}\right) = {}^{t+\Delta t}\underline{R}_*^w T \left(\underline{\quad}\right) {}^{t+\Delta t}\underline{R}_*^w \quad (3.8.8)$$

Tramite questa relazione di passaggio è allora possibile scrivere il tensore di Cauchy-Green e quello di deformazione logaritmica \underline{E}^e , esprimendoli in funzione dello stato *stress-free* del corpo:

$$\underline{C}_*^e = {}^{t+\Delta t}\underline{R}^w \underline{C}_*^e {}^{t+\Delta t}\underline{R}^{w T} \quad (3.8.9)$$

$$\underline{E}_*^e = {}^{t+\Delta t}\underline{R}^w \underline{E}_*^e {}^{t+\Delta t}\underline{R}^{w T} \quad (3.8.10)$$

Utilizzando queste relazioni è semplice formulare una equazione per calcolare il valore corretto della deformazione logaritmica al passo successivo ${}^{t+\Delta t}\underline{E}_0^e$:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}\underline{E}_0^e = \underline{E}_*^e - \Delta t \quad {}^{t+\Delta t}\underline{D}^p} \quad (3.8.11)$$

3.8.2 Basi teoriche del modello: Termodinamica

Dopo aver passato in rassegna la cinematica del modello è importante analizzare la parte energetica e la consistenza termodinamica delle relazioni costitutive. Per un approfondimento teorico sulle singole parti è possibile consultare [75, 76]

L'energia libera globale (*global free energy*) è indicata con la lettera ψ ed è ammessa la sua decomposizione additiva in una parte w , legata all'energia elastica immagazzinata, ed una seconda parte h , funzione del potenziale di incrudimento. Queste due parti e, di conseguenza, la *free energy* sono funzione di alcune variabili di stato interne che possono essere definite (in modo generico) come delle grandezze legate al gradiente di spostamento interno locale indicate con \underline{F}^i . In forma analitica si può quindi dire che:

$$\psi(\underline{F}^e, \underline{F}^i, \underline{F}_{time}^i) = w(\underline{F}^i, \underline{F}_{time}^i) + h(\underline{F}^i, \underline{F}_{time}^i) \quad (3.8.12)$$

E' quindi indispensabile formulare delle relazioni costitutive per le due parti che compongono la *free energy* in modo separato. Per far questo alcune ipotesi sono state adottate:

- Il corpo si deforma in modo da minimizzare l'energia potenziale totale.
- La deformazione plastica è legata all'energia potenziale di dissipazione, che è massima durante la plasticità ed include gli effetti dello spin plastico.
- La rotazione delle direzioni di anisotropia modifica l'energia potenziale.

3.8.2.1 Stored Energy Function

Il caso elastico isotropo è caratterizzato principalmente dal fatto che le misure di deformazione (tensore destro di Cauchy-Green) e quella di stress (secondo tensore di sforzo di Piola-Kirchhoff \underline{S}) hanno le stesse direzioni principali e sono commutabili. Di conseguenza il loro prodotto, che prende il nome di tensore di Mandel $\underline{\Xi}$ è equivalente alla sua parte simmetrica:

$$\underline{\Xi} = \underline{\Xi}_{symm} = \frac{1}{2}(\underline{C}^e \underline{S} + \underline{S} \underline{C}^e) = \underline{U}^e \underline{S} \underline{U}^e \quad (3.8.13)$$

Esistendo un legame diretto fra il 2° tensore di sforzo di Piola e quello di Kirchhoff (definito nella configurazione spaziale) è facile scrivere la relazione fra queste due variabili:

$$\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{\Xi}}_{symm} = \underline{U}^e \underbrace{\left(\underline{F}^{e^{-1}} \underline{\tau} \underline{F}^{e^{-T}} \right)}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \underline{U}^e = \overbrace{\underline{R}^{eT} \underline{\tau} \underline{R}^e}^{Rotazione} = \underline{\underline{\bar{\tau}}} \quad (3.8.14)$$

Dove con “ $\underline{\underline{\bar{\tau}}}$ ” si indica il tensore degli sforzi di Kirchhoff ruotato. A questo punto, sempre per il caso isotropo, la *stored energy function* assume una forma del tipo:

$$w = \underbrace{U(J)}_{Volumetrica} + \mu \underbrace{\underline{E}^e : \underline{\underline{P}} : \underline{E}^e}_{Deviatorica} \quad (3.8.15)$$

con $\underline{\underline{P}} =$ Proiettore deviatorico $= \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}$

Nota la formulazione dell’energia interna è possibile trovare il tensore di sforzo (Kirchhoff ruotato), differenziando la “ w ” rispetto alla deformazione logaritmica:

- Caso Isotropo: $\underline{\underline{\Xi}} \equiv \underline{\underline{\Xi}}_{symm} \equiv \underline{\underline{\bar{\tau}}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{E}^e} = JU'(J) + 2\mu \underline{\underline{P}} : \underline{E}^e$

Quindi nella relazione complessiva sparisce il termine antisimmetrico del tensore di Mandel $\underline{\underline{\Xi}}_{skew}$. Questa ricapitolazione del caso isotropo è stata fatta perché nel modello, ma spesso anche in altri tipi di analisi, la plasticità anisotropa viene affrontata considerando la fase elastica come isotropa. Questo approccio è appoggiato da numerose evidenze sperimentali in cui si è potuto osservare come le deviazioni dal comportamento isotropo elastico, anche durante delle plasticizzazione estreme, siano molto lievi.

In questo lavoro però si vuole considerare anche il caso elastico anisotropo, quindi nella *stored energy function* è indispensabile inserire un legame costitutivo nella parte deviatorica che tenga conto della direzionalità. Ad un determinato tempo t si può scrivere la $w_{anisotropic}$ come:

$${}^t w = \underbrace{U({}^t J)}_{Volumetrica} + \mu \underbrace{{}^t \underline{E}^e : {}^t \underline{\underline{A}}^d : {}^t \underline{E}^e}_{Deviatorica} \quad (3.8.16)$$

Dove è stato introdotto un nuovo tensore ${}^t \underline{\underline{A}}^d$ avente le stesse direzioni principali di $\underline{\underline{P}}$, mentre la componente volumetrica della “ $w_{anisotropic}$ ” è stata nuovamente assunta isotropa.

Si può così scrivere la *stored energy function* nella forma:

$${}^t w = \frac{1}{2} {}^t \underline{\underline{E}}^e : {}^t \underline{\underline{A}} : {}^t \underline{\underline{E}}^e \quad (3.8.17)$$

E' possibile rappresentare il tensore ${}^t \underline{\underline{A}}$ nel sistema degli assi di ortotropia del materiale come:

$${}^t \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_a & -\nu_{ba}/E_b & -\nu_{ca}/E_c & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{ab}/E_a & 1/E_b & -\nu_{cb}/E_c & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{ac}/E_a & -\nu_{bc}/E_b & 1/E_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{ca} \end{bmatrix}$$

Dove con $E_{a,b,c}$ si indicano i moduli di Young nelle direzioni principali, con $\nu_{ij,ji}$ i moduli di Poisson ed infine con G_{ij} i moduli di elasticità trasversale per un totale di 9 costanti indipendenti.

Come diretta conseguenza (e considerando analiticamente le rotazioni plastiche e degli assi qui non riportate per brevità espositiva), è possibile ottenere il tensore simmetrico degli sforzi logaritmico (Kirchhoff generalizzato) nella configurazione non ruotata, derivando la $w_{anisotropic}$ rispetto al tensore di deformazione logaritmico:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{E}}^e} = \underline{\underline{A}}^d : \underline{\underline{E}}^e \Big|_{\text{Config. non ruotata}} \quad (3.8.18)$$

Per un dettaglio delle rotazioni in esame e delle configurazioni usate si può usare la figura 18 riportata nello spazio sottostante.

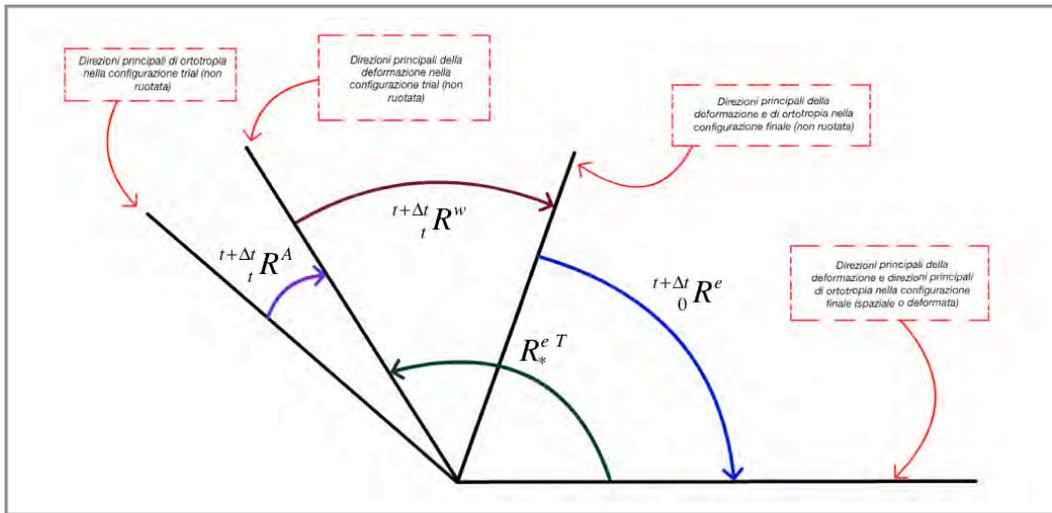


Figura 18 - Schemi delle rotazioni e delle configurazioni utilizzate delle configurazioni spaziali e materiali

Da qui è poi possibile formulare la legge di evoluzione della *stored energy* nella configurazione non ruotata:

$$\dot{w}|_{\text{Configurazione non ruotata}} = \underline{\underline{T}} : \dot{\underline{\underline{E}}}^e + \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^e : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}}^e \quad (3.8.19)$$

e considerando due nuovi *skew tensor* per tenere conto dello spin strutturale $\underline{\underline{W}}^A$ e della parte antisimmetrica dello sforzo $\underline{\underline{T}}_w$

$$\underline{\underline{W}}^A = \dot{\underline{\underline{R}}}^A \underline{\underline{R}}^{A T} ; \quad \underline{\underline{T}}_w = \underline{\underline{E}}^e \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}} \underline{\underline{E}}^e$$

Il risultato finale è:

$$\dot{w} = \underline{\underline{T}} : \dot{\underline{\underline{E}}}^e + \underline{\underline{T}}_w : \underline{\underline{W}}^A \quad (3.8.20)$$

Il valore di $\underline{\underline{T}}_w$ è noto una volta che si conoscono $\underline{\underline{T}}$ ed $\underline{\underline{E}}^e$ e di conseguenza non è una variabile interna del processo. $\underline{\underline{T}}_w$ mette in relazione il secondo termine della w con la rotazione degli assi di simmetria ed, in particolar modo, nella non coincidenza delle direzioni principali degli sforzi con quelle delle deformazioni.

3.8.2.2 Potenziale di incrudimento

La forma analitica scelta per scrivere il potenziale di incrudimento (o *hardening potential*) ha una forma molto simile a quella utilizzata per la parte energetica elastica:

$$h = h^{kin} + h^{iso} + h^w = \frac{1}{2} \bar{h} \left[(1-M) \frac{3}{2} \underline{\underline{E}}^i : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{E}}^i + M \zeta^2 \right] + \frac{1}{2} K_w \xi^2 \quad (3.8.21)$$

Dove M è il parametro che regola l'incrudimento misto con

- $\frac{2}{3} \hat{H} = \bar{h} (1-M) =$ Effective hardening kinematics modulus
- $K = \bar{h} M =$ Isotropic Hardening Modulus

Fatto questo, è possibile definire altre variabili ausiliarie legate agli *stress* ed alla funzione di snervamento: l'*internal overstress* $\underline{\underline{\alpha}}$ e $\underline{\underline{\alpha}}_w$ e l'*internal backstress* $\underline{\underline{\beta}}_s$,

$$\underline{\underline{\alpha}} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{\partial h}{\partial \zeta} = K \underline{\underline{\zeta}} ; \quad \underline{\underline{\alpha}}_w = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial h}{\partial \xi} = K_w \underline{\underline{\xi}} \quad (3.8.22)$$

La loro evoluzione è governata dalla legge:

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \dot{\underline{\underline{\zeta}}} = \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \dot{\underline{\underline{\zeta}}} = K \dot{\underline{\underline{\zeta}}} ; \quad \dot{\underline{\underline{\alpha}}}_w = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \dot{\underline{\underline{\xi}}} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \dot{\underline{\underline{\xi}}} = K \dot{\underline{\underline{\xi}}} \quad (3.8.23)$$

Per il *backstress* invece si può usare la seguente relazione:

$$\underline{\underline{\beta}}_s = \left. \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}^i} \right|_{\text{Config. non ruotata}} = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{E}}^i} \right|_{\text{Config. non ruotata}} = \hat{H} \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{E}}^i \quad (3.8.24)$$

Riportando tutte queste forme analitiche trovate nella equazione (3.8.21) si può scrivere:

$$\dot{h} = \underline{\underline{\beta}}_s : \underline{\underline{E}}^i + \frac{1}{2} \hat{H} \left(\underline{\underline{E}}^i : \underline{\underline{\dot{H}}} : \underline{\underline{E}}^i \right) + \underline{\underline{\alpha}} \dot{\underline{\underline{\zeta}}} + \underline{\underline{\alpha}}_w \dot{\underline{\underline{\xi}}} \quad (3.8.25)$$

Si ricorda inoltre che:

$$\frac{1}{2} \widehat{H} \left(\underline{\underline{E}}^i : \underline{\underline{\dot{H}}} : \underline{\underline{E}}^i \right) = \underline{\underline{\beta}}_w : \underline{\underline{W}}^H$$

$$\underline{\underline{\beta}}_w = \underline{\underline{E}}^i \underline{\underline{\beta}}_s - \underline{\underline{\beta}}_s \underline{\underline{E}}^i$$

Sostituendo nuovamente nella (3.8.25) si ricade nella seguente espressione:

$$\boxed{\dot{h} = \underline{\underline{\beta}}_s : \underline{\underline{E}}^i + \underline{\underline{\beta}}_w : \underline{\underline{W}}^H + \alpha \dot{\zeta} + \alpha_w \dot{\xi}} \quad (3.8.26)$$

3.8.2.3 Termodinamica dei processi irreversibili

Sviscerati tutti i processi che guidano da un punto di vista energetico la fase elastica e la modifica delle sue caratteristiche (incrudimento del materiale), è importante affrontare anche il discorso dissipativo che caratterizza il flusso plastico. Una volta innescato il processo di deformazione permanente esiste un contributo di lavoro, compiuto dallo stress, dissipato nel volume di riferimento. E' possibile esprimere questa potenza nella configurazione intermedia del materiale tramite la seguente espressione:

$$P = \underline{S} : \underline{L} = \underline{S} : (\underline{L}^e + \underline{C}^e \underline{L}^p) = \underline{S} : (\underline{D}^e + \underline{W}^e) + \underline{S} : \underline{C}^e (\underline{D}^p + \underline{W}^p) \quad (3.8.27)$$

\underline{S} è il pullback del tensore degli sforzi di Kirchhoff nella configurazione scarica ed è

simmetrico. Il termine $\underline{S} : \underline{W}^e$ è nullo in quanto prodotto fra un tensore simmetrico ed uno skew.

Scrivendo questa relazione nella configurazione trial non ruotata si ottiene la seguente espressione:

$$P = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) \quad (3.8.28)$$

Introducendo ora il tensore degli sforzi di Mandel, definito come $\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}$, la potenza dissipata si può riscrivere come:

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{E}} + (\underline{\underline{\Xi}}_s + \underline{\underline{\Xi}}_w) : (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Xi}}_s : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Xi}}_w : \underline{\underline{W}} \quad (3.8.29)$$

Nel caso isotropo il secondo termine scompare, in quanto non c'è lavoro prodotto dalla rotazione degli assi di ortotropia elastici.

Detto questo, per il secondo principio della termodinamica si può scrivere: $\dot{D} = P - \dot{\psi} \geq 0$

L'uguaglianza deve valere per il caso elastico e, come detto precedentemente, la variazione di free energy $\dot{\psi}$ può essere espressa come: $\dot{\psi} = \dot{w} + \dot{h}$.

Associando a questo una funzione di snervamento composta da due contributi, uno per la parte simmetrica, ed uno per quella antisimmetrica è possibile formulare il lagrangiano per il problema vincolato \wp :

- $f_s(\underline{\underline{\Xi}}_s, \underline{\underline{\beta}}_s, \underline{\underline{\mathcal{A}}}) \rightarrow$ Funzione di snervamento, componente simmetrica
- $f_w(\underline{\underline{\Xi}}_w, \underline{\underline{\beta}}_w, \underline{\underline{\mathcal{A}}}_w) \rightarrow$ Funzione di snervamento, componente antisimmetrica

Il lagrangiano per il problema vincolato con due parametri di consistenza $\dot{\lambda}$ e $\dot{\gamma}$ può essere scritto come:

$$\wp = \underline{D}^p - \dot{\lambda} f_s - \dot{\gamma} f_w \quad (3.8.30)$$

Utilizzando il principio di massima dissipazione plastica ($\nabla \wp = 0$) si ottengono delle relazioni finali che descrivono in modo generale il *flow rule* e le leggi di incrudimento, per il caso elasto-plastico di un materiale anisotropo con deformazioni finite.

$$\nabla \wp = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\Xi}_s} = 0 \rightarrow \underline{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_s}{\partial \underline{\Xi}_s} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\beta}_s} = 0 \rightarrow \underline{T} : \underline{E}^i = -\dot{\lambda} \frac{\partial f_s}{\partial \underline{\beta}_s} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\alpha}} = 0 \rightarrow \underline{\zeta} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f_s}{\partial \underline{\alpha}} \end{array} \right. \& \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\Xi}_w} = 0 \rightarrow \underline{W}^d = \dot{\gamma} \frac{\partial f_w}{\partial \underline{\Xi}_w} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\beta}_w} = 0 \rightarrow \underline{W}^H = -\dot{\gamma} \frac{\partial f_w}{\partial \underline{\beta}_w} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\alpha}_w} = 0 \rightarrow \underline{\xi} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f_w}{\partial \underline{\alpha}_w} \end{array} \right. \quad (3.8.31)$$

Capitolo 4: Implementazione del modello Bathe-Montans per analisi elasto- plastiche su solidi anisotropi

Capitolo 4:

Implementazione del modello Bathe-Montans per analisi elasto-plastiche su solidi anisotropi

Nella parte finale del capitolo 3 è stato introdotto, esclusivamente da un punto di vista teorico, il modello Bathe-Montans, che contiene tutti gli ingredienti fondamentali per affrontare il problema dell'anisotropia.

Dal *framework* con il quale è stato presentato, si evince però con chiarezza che questo non consente una facile implementazione ed un immediato uso nella pratica ingegneristica, di conseguenza, per realizzare un algoritmo efficace, stabile e utilizzabile in software commerciali agli elementi finiti (come Abaqus e Msc MARC ad esempio) è necessario introdurre alcune ipotesi e fare delle semplificazioni numeriche per trattare il problema.

Un altro fattore cruciale è l'identificazione dei parametri; le procedure di identificazione di questi non possono essere troppo numerose ed onerose da un punto di vista temporale.

L'algoritmo che qui verrà presentato utilizza un particolare mix di ingredienti costitutivi: sfruttando tutta l'esperienza sviluppata lungo gli anni 80' nei lavori sul ritorno radiale e sulla *small strain plasticity* [58, 74], ed unendo gli studi sullo snervamento presentati da Hill del 1948 insieme a quelli di Bathe e Bathe e Kojic [78, 80] è stato realizzato un algoritmo di calcolo molto efficiente basato su due parametri scalari (nel caso di piccole deformazioni). La plasticità anisotropa è invece introdotta, per grandi deformazioni, come un pre/post processore, nel quale il *core process* è sempre costituito dallo schema di calcolo delle piccole deformazioni.

Tutta la prima parte del capitolo sarà dedicata alle scelte numeriche con il quale è stato affrontato il problema ed alla descrizione dell'algoritmo di calcolo. Subito dopo verrà introdotto lo schema finale della routine e la sua implementazione sul software Abaqus.

4.1 Small Strain: Schema del modello e algoritmo di calcolo

Per implementare il modello Bathe-Montans (da qui in avanti indicato come modello B-M) su un software di calcolo agli elementi finiti alcuni passaggi devono essere eseguiti in cascata. Un algoritmo efficiente deve quindi occuparsi del calcolo degli sforzi, della verifica della condizione di consistenza e della creazione della matrice tangente elasto-plastica. Ognuno di questi passaggi ha profonde implicazioni teoriche e computazionali ed è opportuno dedicare una sezione per ogni voce.

4.1.1 Algoritmo di small strain basato sulla superficie di snervamento di Hill con incrudimento misto

Il modello B-M è nella sua essenza indipendente dalla superficie di snervamento scelta: introducendo nell'analisi una *yield surface* generica ed una *flow rule* associata è possibile adattare il modello a diverse casistiche e tipologie di materiali.

Nel caso dell'anisotropia elastica, il modello di riferimento principale, per ciò che concerne lo snervamento dei materiali duttili e la verifica di elasticità della deformazione, è il modello di R.Hill presentato nel 1948 e discusso in dettaglio nel capitolo 3 di questo lavoro. Senza riaffrontare la discussione dei singoli parametri in modo accurato, in presenza di *small strain* il criterio in questione può essere scritto come:

$$2f_y(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{31}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (4.1.1)$$

Avendo come fine ultimo l'analisi di solidi anisotropi nella particolare accezione di grandi deformazioni/rotazioni e dovendo trattare numerose funzioni e variabili tensoriali, il criterio presentato nella (4.1.1) può essere scritto in forma matriciale/tensoriale:

$$f_y = \frac{3}{2k^2} \underline{\underline{Z}} : \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Z}} - 1$$

Dove $\underline{\underline{Z}}$ è lo chiamato scalar overstress e $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\beta}}$ rappresentano rispettivamente il tensore di sforzo e quello di *backstress*, mentre k è un parametro scalare, che prende il nome di stress di snervamento effettivo ed è una funzione della percentuale di plasticizzazione del materiale. Considerando valida l'assunzione di deformazioni piccole o infinitesime i valori incrementali degli sforzi e delle deformazioni sono legati fra loro dalla relazione:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}^e} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \quad (4.1.2)$$

Nella (4.1.2) il tensore del quarto ordine $\underline{\underline{C}}^e$ è calcolato dalla derivata della *elastic stored energy function*, assunta nella forma:

$$w = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C}}^e = \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e \partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad (4.1.3)$$

La (4.1.2) e la (4.1.3) sono invertibili; tramite l'operazione di inversione si ottiene una relazione che permette il calcolo delle deformazioni sfruttando il *compliance elastic tensor* (matrice di cedevolezza) $\underline{\underline{S}}^e$, che ha il grande vantaggio di poter essere scritto utilizzando le costanti elastiche del materiale, scritte secondo le direzioni principali di ortotropia del materiale stesso:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left[\underline{\underline{S}}^e \right]_{X_{pr}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (4.1.4)$$

$$\left[\underline{\underline{S}}^e \right]_{X_{pr}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{bmatrix}$$

Per questioni di simmetria vale che:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1.5)$$

Nelle relazione (4.1.4) con il pedice X_{pr} si indica il sistema di riferimento principale del materiale (o sistema di ortotropia). Per ruotare un tensore del quarto ordine ed allinearlo con il sistema globale, è possibile impiegare la seguente trasformazione (che utilizza i coseni direttori per costituire delle matrici di rotazione):

$$\left[\underline{\underline{S}}^e \right]_{x_{mat}} = \left[\underline{\underline{R}}_{x_{pr} \rightarrow x_{mat}} \right] \left[\underline{\underline{S}}^e \right]_{x_{pr}} \left[\underline{\underline{R}}_{x_{pr} \rightarrow x_{mat}} \right]^T \quad (4.1.6)$$

E' poi indispensabile definire le modalità di incremento del backstress $\underline{\underline{\beta}}$. Questo può essere fatto con una legge di evoluzione del tipo:

$$\underline{\underline{\dot{\beta}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Il principio di massima dissipazione plastica

Dalle equazioni di evoluzione e dalle ipotesi fatte sull'analisi, esposte nel 4.1 e 4.1.1 è chiaro che anche ora sia possibile sfruttare la decomposizione additiva della deformazione. Si può quindi scrivere che:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^e} + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p} \quad (4.1.8)$$

Allora tramite la (4.1.8) si può formulare una legge in forma "ridotta" che guida la dissipazione plastica e, sotto l'ipotesi restrittiva che questo processo avvenga rispettando la stazionarietà della derivata, trovare le relazioni costitutive che guidano l'evoluzione dei processi in esame:

$$D^p = \text{Diseguaglianza di dissipazione ridotta} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p} - \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} - \kappa \dot{\zeta} \geq 0$$

Dove $\underline{\underline{\xi}}$ è definita come una variabile interna legata allo stato di sforzo, a sua volta associato al backstress $\underline{\underline{\beta}}$ per il calcolo del lavoro (coniugato nel senso del lavoro con il backstress) mentre la $\dot{\zeta}$ è una variabile generica di deformazione, coniugata nel senso del lavoro con il parametro scalare "k". Le variabili appena introdotte assumeranno maggior forma e significato introducendo il lagrangiano del problema in esame. Siccome il dominio elastico può essere considerato una funzione dello stress $f_y(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\beta}}, \kappa)$, la funzione di dissipazione con gli opportuni vincoli del problema può essere scritta come:

$$\wp(\underline{\sigma}, \underline{\beta}, \kappa) = D^p - \dot{\gamma} f_y = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p - \underline{\beta} : \underline{\dot{\xi}} - \kappa \dot{\zeta} - \dot{\gamma} f_y \quad (4.1.9)$$

in cui è chiaro che $\dot{\gamma}$, il moltiplicatore lagrangiano, è un parametro di consistenza del problema. Dalla condizione di massimo/minimo del problema si ottengono le relazioni di flusso plastico per le tre variabili in esame:

$$\nabla \wp = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\sigma}} = 0 & \rightarrow \quad \underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \underline{\sigma}} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \underline{\beta}} = 0 & \rightarrow \quad \underline{\dot{\xi}} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \underline{\beta}} \\ \frac{\partial \wp}{\partial \kappa} = 0 & \rightarrow \quad \dot{\zeta} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \kappa} \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Da cui è possibile, scrivendo la legge di snervamento come $f_y(\underline{\sigma} - \underline{\beta}, \kappa)$, mettere in luce in modo inequivocabile che la variabile interna $\underline{\dot{\xi}}$ è direttamente legata alla deformazione plastica:

$$\frac{\partial f_y}{\partial \underline{\beta}} = \frac{\partial f_y}{\partial \underline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{\xi}} = \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (4.1.11)$$

Le leggi di flusso plastico per le altre variabili in gioco presenti nella (4.1.10), possono essere scritte come:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \underline{\dot{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \underline{\beta}} = \dot{\gamma} \frac{3}{k^2} \underline{N} : \underline{Z} \quad (4.1.12)$$

$$\dot{\zeta} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \kappa} = \dot{\gamma} \frac{2}{k} (f_y + 1) \quad (4.1.13)$$

Dalla (4.1.12) e dalla (4.1.13) derivano direttamente le equazioni di evoluzione dello stress e del backstress che possono essere scritte nella forma:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\mathbb{C}}^e : \underline{\dot{\epsilon}} - \dot{\gamma} \frac{3}{k^2} \underline{\mathbb{C}}^e : \underline{N} : \underline{Z}; \quad \underline{\dot{\beta}} = \dot{\gamma} \frac{3}{k^2} \underline{H} : \underline{N} : \underline{Z} \quad (4.1.14)$$

La (4.1.14) risulta completamente determinata tramite le relazioni:

$$\underline{\underline{H}} = \frac{2}{3}(1-m)\bar{H}\underline{\underline{P}}; \quad (4.1.15)$$

$$\underline{\underline{P}} = \text{Proiettore deviatorico} = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}};$$

$$k(\underline{\underline{\epsilon}}^p) = \sigma_y + m\bar{H}\underline{\underline{\epsilon}}^p + (K_\infty - K_0)\left[1 - e^{-\delta \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^p}\right] \quad (4.1.16)$$

\bar{H} prende il nome di modulo effettivo di incrudimento lineare, σ_y è un valore di snervamento di riferimento per il materiale considerato, le K sono delle costanti legate al percorso di plasticità/ incrudimento ed infine m è un parametro che controlla l'incrudimento misto gestendo tramite il suo valore (compreso fra 0 ed 1) la parte cinematica e quella isotropa rispetto alla totale.

4.1.3 Schema implicito di integrazione degli sforzi

Realizzare il calcolo degli stress, significa verificare lo stato di sforzo a cui il materiale è soggetto, identificare il dominio di appartenenza della sollecitazione (elastico o plastico) e quindi, se questo stato di sforzo è esterno al campo elastico, realizzare il ritorno radiale sulla superficie di Hill per calcolare i valori "plastici" aggiornati al passo di calcolo corrente, fornendo poi in fase conclusiva la nuova matrice tangente elasto-plastica.

Considerando un generico istante temporale $t + \Delta t$, in cui sono noti i valori già andati in convergenza nel precedente step di calcolo t , il criterio di snervamento di Hill può essere espresso come:

$${}^{t+\Delta t}f_y = \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}} - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}}{k} : \underline{\underline{N}} : \left({}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}} - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}} \right) - 1 \quad (4.1.17)$$

Lo stress al tempo $t + \Delta t$ è facilmente ricavabile secondo la relazione:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}}^e : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{C}}^e : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (4.1.18)$$

In fase di calcolo è possibile considerare dei valori di tentativo (*trial values* in lingua inglese) che, sfruttando i valori noti dall'istante temporale precedente, permettono di verificare se la condizione (4.1.17) è verificata (caso elastico) o non verificata (caso plastico) tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* &= {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}}^e : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_* &= {}^t\underline{\underline{\beta}} \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}} &= {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_* \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}} &= {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - \Delta \gamma \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_*}{k^2} : \underline{\underline{N}} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}} \\ {}^{t+\Delta t}k \left({}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\varepsilon}}^p \right) &= \sigma_y + m\bar{H} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\varepsilon}}^p + (K_\infty - K_0) \left[1 - e^{-\delta \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\varepsilon}}^p} \right] \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\varepsilon}}^p &= {}^t\underline{\underline{\varepsilon}}^p + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \text{Effective Plastic Strain} = \frac{2}{3} \frac{{}^{t+\Delta t}f_y + 1}{k} \Delta \gamma$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}} = {}^t\underline{\underline{\beta}} - \Delta \gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}} = {}^t\underline{\underline{\beta}} + \Delta \gamma \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_*}{k^2} \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}}$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^t\underline{\underline{\beta}} - \Delta \gamma \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_*}{k^2} : \underline{\underline{N}} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}} - \Delta \gamma \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\sigma}}_* - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\beta}}_*}{k^2} \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{Z}}$$

E' allora possibile ridefinire il valore *trial* dell'overstress con cui è possibile entrare nella funzione di snervamento per il calcolo di consistenza (check elastico) e, una volta eseguito il processo iterativo, aggiornare il suo valore stesso secondo la (4.1.19):

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\underline{Z}_* = \text{Trial Overstress Tensor} = {}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}_* - {}^t\underline{\beta} = \left[\underline{I} + \Delta\gamma \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} (\underline{C}^e + \underline{H}) : \underline{N} \right] : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \\ \underline{D} = \left[\underline{I} + \Delta\gamma \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} (\underline{C}^e + \underline{H}) : \underline{N} \right] \end{cases} \Rightarrow {}^{t+\Delta t}\underline{Z} = \underline{D}^{-1} : {}^{t+\Delta t}\underline{Z}_*$$

Tramite l'insieme delle relazioni presentate è possibile progettare un algoritmo molto efficiente utilizzando due soli parametri scalari: ${}^{t+\Delta t}\epsilon^p$ e $\Delta\gamma$. Nota la soluzione al passo precedente, i parametri del materiale (elastici, plastici e di incrudimento) e l'incremento/deformazione totale ${}^{t+\Delta t}\underline{\epsilon}$ al passo di calcolo corrente, è possibile calcolare lo sforzo *trial*:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}_* = \underline{C}^e : ({}^{t+\Delta t}\underline{\epsilon} - {}^t\underline{\epsilon}^p) \quad (4.1.20)$$

Tramite semplici passaggi si può così ottenere la funzione di snervamento trial e verificare la condizione di consistenza:

$${}^{t+\Delta t}\underline{Z}_* = {}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}_* - {}^t\underline{\beta}$$

$${}^{t+\Delta t}k_* = {}^t k = \sigma_y + m\bar{H}\Delta\epsilon^p + (K_\infty - K_0) \left[1 - e^{-\delta \Delta\epsilon^p} \right]$$

$${}^{t+\Delta t}f_* = \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{Z}_* : \underline{N} : {}^{t+\Delta t}\underline{Z}_*}{{}^{t+\Delta t}k^2} - 1 \quad (4.1.21)$$

Con la funzione di snervamento trial è possibile calcolare se lo stato di sforzo è nei limiti del dominio elastico del materiale (${}^{t+\Delta t}f_* \leq 0$). Se lo stress è effettivamente elastico, i valori trial vengono assunti come definitivi e considerati per lo step di calcolo successivo, quando questo non succede inizia l'algoritmo iterativo di ritorno radiale.

Il primo step è costituito da una stima provvisoria del parametro $\Delta\gamma$.

Bloccando la deformazione plastica ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^P$, e modificando la superficie di snervamento seguendo la variazione di di un solo parametro $\Delta\gamma$, si ottiene una buona stima di questo ed è stato dimostrato [76, 78-80] che questa operazione di approssimazione migliora la convergenza dell'iterazione principale che viene eseguita subito dopo. Da un punto di vista teorico e fisico questa operazione non ha molto significato (si tratta solo di un espediente numerico), quindi non verrà approfondito in dettaglio, ma nella figura 1 è possibile consultare lo schema riassuntivo delle operazioni.

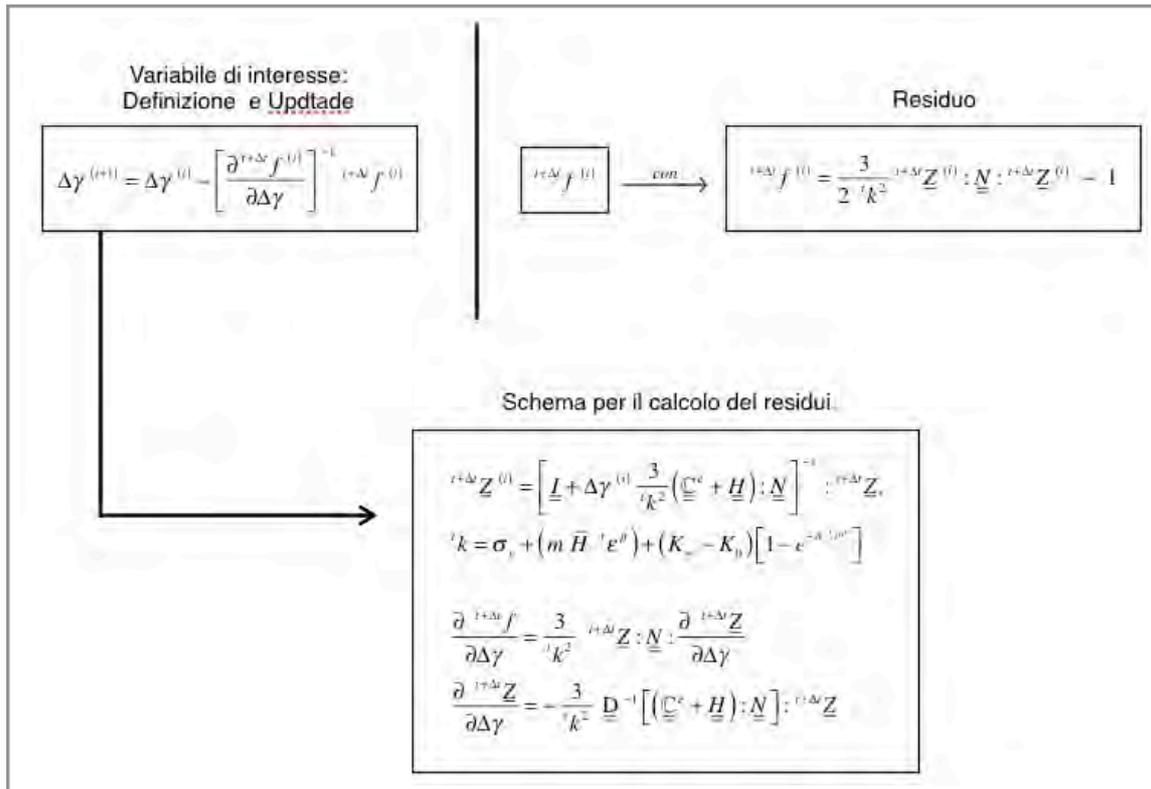


Figura 1 - Schema di calcolo per la stima del parametro di consistenza

Noti i valori del parametro di consistenza che vengono utilizzati per inizializzare l'iterazione si può costituire il *radial return method* sulla superficie di snervamento di Hill in questo modo:

Si crea un vettore le cui componenti sono costituite dalle variabili di interesse $X^{(i)}$ ed uno contenente i residui $R^{(i)}$. Partendo dai valori stimati (nel caso di $\Delta\gamma$) e da quelli noti dal passo precedente (k e $\Delta\varepsilon^P^{(i)}$) o ancora dedotti utilizzando i valori trial del parametro di consistenza (si può infatti porre che ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^P^{(i)} = {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P^{(0)}$ e che $\Delta\varepsilon^P = \frac{2}{k^t} \Delta\gamma^{(i+1)}$) è possibile formulare le

espressioni dei residui $X^{(i)}$. Il vettore $X^{(i)}$ ha due componenti, la prima è proprio la superficie di snervamento e l'altra, chiamata g , lega le due variabili che dipendono dalla parte plastica della deformazione. Si può quindi scrivere:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \Delta\gamma^{(i)} \\ \Delta\epsilon^p{}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}f^{(i)} \\ {}^{t+\Delta t}g^{(i)} \end{Bmatrix}$$

$${}^{t+\Delta t}g = \Delta\epsilon^p - \zeta = \Delta\epsilon^p - \frac{2}{{}^{t+\Delta t}k} ({}^{t+\Delta t}f_y + 1) \Delta\gamma \quad (4.1.23)$$

Lo schema risolutivo di minimizzazione dei residui segue il metodo di newton:

$$\mathbf{X}^{(i+1)} = \mathbf{X}^{(i)} - \left[\frac{\partial \mathbf{R}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \right]^{-1} \mathbf{R}^{(i)} \quad (4.1.24)$$

Dove

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}^{(i)}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial \Delta\epsilon^p} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}g}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}g}{\partial \Delta\epsilon^p} \end{bmatrix}$$

Rimangono ora da definire tutte le operazioni di derivazione che entrano nel calcolo della tangente locale del ciclo stesso. Queste possono essere dedotte facilmente dalla derivazione di tutte le relazioni descritte fino a questo punto:

- $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial \Delta\gamma} = \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{Z}}{\partial \Delta\gamma} \right) = \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \left(-\frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} \underline{D}^{-1} : [(\underline{C}^e + \underline{H}) : \underline{N}] : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \right)$
- $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}g}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{2}{{}^{t+\Delta t}k} \Delta\gamma (f_{n+1} + 1) - \frac{2}{{}^{t+\Delta t}k} \Delta\gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial \Delta\gamma}$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial {}^{t+\Delta t} f}{\partial \Delta \varepsilon^p} &= -\frac{2}{{}^{t+\Delta t} k} \left({}^{t+\Delta t} f + 1 \right) \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} k}{\partial \Delta \varepsilon^p} \right) + \frac{3}{{}^{t+\Delta t} k^2} \left({}^{t+\Delta t} \underline{Z} : \underline{N} : \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \underline{Z}}{\partial \Delta \varepsilon^p} \right) \right) = \\
&= -\frac{2}{{}^{t+\Delta t} k} \left({}^{t+\Delta t} f + 1 \right) \left(m\bar{H} + (K_\infty - K_0) \left[\delta e^{-\delta \Delta \varepsilon^p} \right] \right) + \\
&\quad + \frac{3}{{}^{t+\Delta t} k^2} \left({}^{t+\Delta t} \underline{Z} : \underline{N} : \left(\frac{6}{{}^{t+\Delta t} k^3} \Delta \gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t} k}{\partial \Delta \varepsilon^p} \underline{D}^{-1} : \left[\left(\underline{C}^e + \underline{H} \right) : \underline{N} \right] : {}^{t+\Delta t} \underline{Z} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial {}^{t+\Delta t} g}{\partial \Delta \varepsilon^p} = 1 + \frac{2}{{}^{t+\Delta t} k} \Delta \gamma \left[\frac{{}^{t+\Delta t} f + 1}{{}^{t+\Delta t} k} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} k}{\partial \Delta \varepsilon^p} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t} f}{\partial \Delta \varepsilon^p} \right]$$

Tramite lo schema di Newton si arriva alla convergenza dei valori delle variabili $\Delta \gamma$ e ${}^{t+\Delta t} \varepsilon^p$. Una volta noti questi parametri è possibile fare l'update di tutte le variabili, ottenendo i valori finali per il passo di calcolo $t + \Delta t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \varepsilon^p = {}^t \varepsilon^p + \Delta \varepsilon^p \\ {}^{t+\Delta t} k = \sigma_y + m\bar{H} {}^{t+\Delta t} \varepsilon^p + (K_\infty - K_0) \left[1 - e^{-\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon^p} \right] \\ {}^{t+\Delta t} \underline{D} = \left[\underline{I} + \Delta \gamma \frac{3}{{}^{t+\Delta t} k^2} \left(\underline{C}^e + \underline{H} \right) : \underline{N} \right] \\ {}^{t+\Delta t} \underline{Z} = {}^{t+\Delta t} \underline{D}^{-1} : {}^{t+\Delta t} \underline{Z}_* \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{ \begin{array}{l} \Delta \underline{\varepsilon}^p = \Delta \gamma \frac{3}{{}^{t+\Delta t} k^2} \underline{N} : {}^{t+\Delta t} \underline{Z} \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\beta} = {}^t \underline{\beta} + \underline{H} : \Delta \underline{\varepsilon}^p \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\sigma} = {}^{t+\Delta t} \underline{\sigma}_* - \underline{C}^e : \Delta \underline{\varepsilon}^p \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\varepsilon}^p = {}^t \underline{\varepsilon}^p + \Delta \underline{\varepsilon}^p \end{array} }$$

4.1.4 Matrice tangente delle piccole deformazioni

L'aggiornamento della matrice tangente permette di migliorare globalmente l'algoritmo, facendogli acquistare un livello di accuratezza del secondo ordine e portandolo in modo più veloce alla convergenza. La matrice tangente altro non è che un aggiornamento fra il tempo t e quello $t + \Delta t$ dei valori della matrice elastica del materiale che viene modificata durante il percorso di plasticizzazione del materiale. Da un punto di vista analitico la forma per il calcolo della matrice tangente, come suggerisce l'analisi funzionale, è data dalla derivata dello stress rispetto alla deformazione totale, ed è quindi connessa con la pendenza della curva *true stress - true strain*:

$$\underline{\underline{C}}^{t+\Delta t} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{t+\Delta t}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}} \quad (4.1.25)$$

Non aggiornando la matrice elastica del materiale durante tutta la durata del calcolo, l'equilibrio globale, non tenendo conto della variazione di pendenza nel legame fra sforzi e deformazioni, partirebbe sempre da valori molto lontani rispetto a quello di convergenza, rallentando così il processo. E' opportuno però far presente che, il procedimento per l'ottenimento della matrice tangente non ha influenza sull'accuratezza dei risultati ottenuti. E' cruciale dal punto di vista della completezza del modello proposto ma i suoi effetti sono legati solamente al tempo di calcolo ed al numero di iterazioni globali sostenute, non vi è nessun legame con la correttezza (e accuratezza) nella predizione degli stress e delle altre variabili plastiche.

Lo schema di calcolo è matematicamente oneroso, ma le relazioni sono derivabili in modo diretto dalla parte teorica e dalle leggi implementate nei metodi numerici usati per il calcolo degli stress e per eseguire il ritorno radiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{t+\Delta t}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}} = & \underline{\underline{C}}^e - \frac{3}{t+\Delta t k^2} \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Z}}^{t+\Delta t} \otimes \underbrace{\frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}}}_{ij} + \\ & + \Delta \gamma \frac{6}{t+\Delta t k^3} \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Z}}^{t+\Delta t} \otimes \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{Z}}^{t+\Delta t}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}}}_{ij} - \Delta \gamma \frac{3}{t+\Delta t k^2} \underline{\underline{C}}^e : \underline{\underline{N}} : \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{Z}}^{t+\Delta t}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^{t+\Delta t}}}_{ijkl} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Per il calcolo delle due derivate che non sono già state esplicitate (parentesi grafa nella (4.1.26)) si può scrivere:

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\gamma} \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}}; \quad \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\frac{2}{{}^{t+\Delta t}k} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\varepsilon^p}}{1 + \frac{2}{{}^{t+\Delta t}k^2} \Delta\gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\varepsilon^p}} \quad (4.1.27)$$

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{Z}}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} = \underline{D}^{-1} : \underline{C}^e + \lambda \underline{D}^{-1} : [(\underline{C}^e + \underline{H}) : \underline{N}] : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} \quad (4.1.28)$$

con

$$\lambda = \frac{6}{{}^{t+\Delta t}k^3} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\gamma} \Delta\gamma - \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2}$$

Per completare la trattazione deve anche valere che la matrice rispetti la condizione di consistenza della superficie di snervamento scelta. Questo significa dire che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} = \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{Z}}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} - \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^3} \left({}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\varepsilon^p} = 0 \\ \rho = {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \underline{D}^{-1} : [(\underline{C}^e + \underline{H}) : \underline{N}] : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \end{array} \right. \quad (4.1.29)$$

Questa relazione può essere riscritta e poi semplificata introducendo un altro parametro scalare “ η ”

$$\frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \underline{D}^{-1} : \underline{C}^e + \frac{3 \lambda \rho}{{}^{t+\Delta t}k^2} \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} - \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} \left({}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\gamma} \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} = 0$$

$$\eta = \frac{3 \lambda \rho}{{}^{t+\Delta t}k^2} - \frac{3}{{}^{t+\Delta t}k^2} \left({}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : {}^{t+\Delta t}\underline{Z} \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}k}{\partial \Delta\gamma}$$

Sostituendo a ritroso, è finalmente possibile esplicitare tutti i termini della relazione (4.1.26) giungendo alla seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}} = -\frac{3}{\eta {}^{t+\Delta t}k^2} {}^{t+\Delta t}\underline{Z} : \underline{N} : \underline{D}^{-1} : \underline{C}^e \quad (4.1.30)$$

4.2 Large Strain: Plasticità anisotropa con incrudimento misto

La parte di large strain è una vera e propria estensione del modello valido per le piccole deformazioni appena discusso. Il concetto base è dato dalla possibilità di modificare la cinematica del problema, accettando la decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione ed introducendo le corrette misure di stress/strain nei rispettivi spazi di riferimento. In sostanza, si utilizza come “motore” per il calcolo sulla superficie di snervamento lo stesso algoritmo utilizzato nel caso *small strain*. I valori poi vengono utilizzati per ricalcolare i tensori nei vari spazi di riferimento, permettendo l'update plastico delle variabili e completare il calcolo plastico. Le due fasi di *pre* e *post-processing* verranno ora analizzate in dettaglio.

4.2.1 Pre-Processing

Introdurre nel modello small strain una estensione per tenere conto delle deformazioni finite, significa implicitamente assumere che la decomposizione additiva della deformazione non abbia più valore e si consideri invece la *Kroner decomposition* per cui il gradiente di deformazione totale è dato dalla:

$$\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p \quad (4.2.1)$$

Per maggiori dettagli sulla cinematica delle deformazioni finite si può consultare il capitolo 3. Nel paragrafo 7 sono descritti in modo accurato tutti i parametri e le variabili che verranno riutilizzate in questa sezione.

Il gradiente di velocità, scritto nella configurazione intermedia, tramite la sua scomposizione in un tensore simmetrico di *stretching* ed in un tensore antisimmetrico di *spin* (entrambi “modificati” come mostrato nella (***) della sezione 3.8.1), è esprimibile con la seguente legge:

$${}^t \underline{L} = {}^t \underline{F}^{eT} {}^t \dot{\underline{F}}^e + {}^t \underline{F}^{eT} {}^t \underline{F}^e {}^t \underline{L}^p = {}^t \underline{L}^e + {}^t \underline{C}^e {}^t \underline{L}^p \quad (4.2.2)$$

Dove con “ ${}^t \underline{C}^e$ ” si indica il tensore destro di Cauchy-Green, calcolato nella configurazione intermedia e definito dalla relazione:

$${}^t \underline{C}^e = {}^t \underline{F}^{eT} {}^t \underline{F}^e \quad (4.2.3)$$

Nel modello in esame si assume anche una semplificazione aggiuntiva molto importante: tutto il calcolo viene eseguito prescindendo dal tensore plastico di spin W^p . Il gradiente di velocità si vede quindi epurato da questa aliquota importante. Le ragioni sono molteplici ed hanno radici sia nella parte fisica sia in quella matematica del modello.

Fisicamente è difficile stabilire una corretta corrispondenza fra i fenomeni in esame ed i corretti parametri del materiale per rappresentarli adeguatamente, mentre matematicamente questo contributo porta a delle relazioni non simmetriche complicando seriamente l'analisi complessiva. Si può quindi scrivere che:

$${}^t \underline{L}^p \simeq {}^t \underline{D}^p$$

La semplificazione adottata porta delle modifiche notevoli per quanto riguarda le equazioni di evoluzione del gradiente. Riscrivendo queste tramite dei valori chiamati "modificati" è possibile formulare nuovamente il tensore di deformazione finita di Hencky (logaritmico), con cui poi è possibile ripercorrere il *core process*, costituito dall'algorithmo di *small strain*.

Si può infatti facilmente riscrivere la derivata del gradiente plastico di deformazione come

$${}^t \underline{\dot{F}}^p = {}^t \underline{D}^p {}^t \underline{F}^p \quad (4.2.4)$$

Ne deriva che:

$${}^{t+\Delta t} \underline{F}^p = \exp\left(\Delta t {}^{t+\Delta t} \underline{D}^p\right) {}^t \underline{F}^p \quad (4.2.5)$$

Tramite la 4.2.5 è possibile riscrivere le equazioni di update della parte elastica e plastica per il tempo $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \underline{F}^e = \underline{F}_*^e \exp\left(-\Delta t {}^{t+\Delta t} \underline{D}^p\right); \quad {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{p-1} = {}^t \underline{F}^{p-1} \exp\left(-\Delta t {}^{t+\Delta t} \underline{D}^p\right) \quad (4.2.6)$$

Si ricorda che la forma attuale delle leggi costitutive è stata ricavata ignorando lo spin plastico e utilizzando delle relazione tensoriali di base che annullano il prodotto di un tensore simmetrico per uno antisimmetrico. Dalle relazione (4.2.7) (4.2.8) è possibile ricavare nuovamente i valori trial per il tensore di Cauchy-Green ed in ultimo utilizzare questo per calcolare il tensore di Hencky o tensore di deformazione finita logaritmico.

I passaggi sono i seguenti:

$$\underline{C}_*^e = \exp\left(-\Delta t {}^{t+\Delta t} \underline{D}^p\right) {}^{t+\Delta t} \underline{C}^e \exp\left(-\Delta t {}^{t+\Delta t} \underline{D}^p\right) \quad (4.2.7)$$

$$\underline{E}_*^e = \frac{1}{2} \log\left(\underline{C}_*^e\right) \xrightarrow{\text{Fra il tempo } t \text{ ed il tempo } t+\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{E}_*^e = \frac{1}{2} \log\left({}^{t+\Delta t} \underline{C}_*^e\right) \quad (4.2.8)$$

In ultima sintesi, è possibile formulare nuovamente la (4.2.8), trovando una forma esplicita che guida *update* della deformazione elastica nell'istante di tempo $t + \Delta t$. Si nota infatti la grande similarità con la forma additiva tipica delle *small strain*, in cui al posto della deformazione plastica compare una funzione del tensore di stretching.

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}_0 \underline{\underline{E}}^e \approx \underline{\underline{E}}^e - \Delta t \quad {}^{t+\Delta t}_0 \underline{\underline{D}}^p} \quad (4.2.9)$$

Tramite il valore calcolato di deformazione logaritmica è allora possibile effettuare il calcolo dello stress, utilizzando una forma iperelastica per il calcolo dell'energia:

$${}^t w = \underbrace{U({}^t J)}_{\text{Volumetrica}} + \underbrace{{}^t w_D}_{\text{Deviatorica}}$$

$$\begin{cases} U({}^t J) = \frac{1}{2} \kappa (\ln J)^2 \\ {}^t w_D = \frac{1}{2} \quad {}^t \underline{\underline{E}}^e : \underline{\underline{A}}^d : \quad {}^t \underline{\underline{E}}^e \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{T}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{E}}^e} = \underline{\underline{A}}^d : \underline{\underline{E}}^e} \quad (4.2.10)$$

Il tensore del quarto ordine “ $\underline{\underline{A}}^d$ ” è già stato descritto nel capitolo 3 ed i suoi coefficienti sono calcolabili tramite i parametri elastici del materiale. Il tensore di sforzo ottenuto “ $\underline{\underline{T}}$ ” è chiamato tensore di Kirchhoff generalizzato o anche tensore di stress logaritmico.

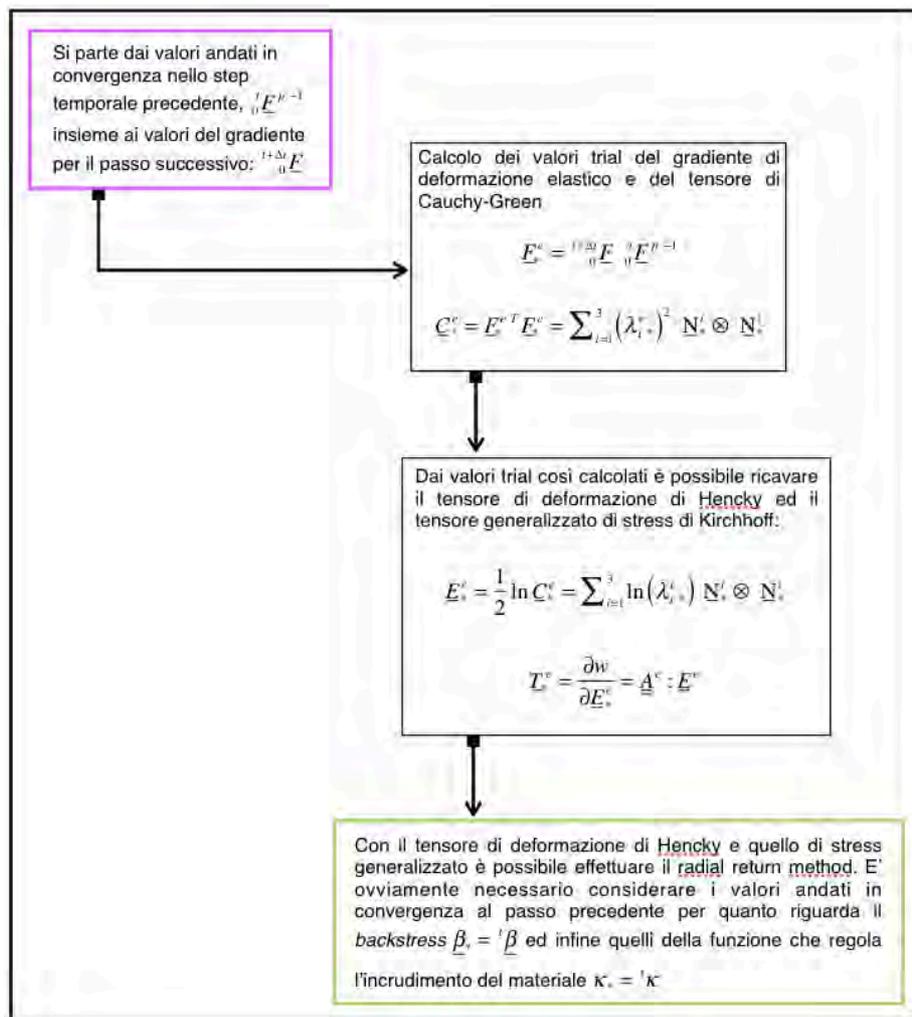


Figura 2 - Schema di calcolo per il pre-processing delle large deformation

Il legame con il tensore di Kirchhoff nella sua forma semplice è chiaro nel caso isotropo, in cui i due tensori in esame sono coincidenti e commutabili.

Nello schema riportato in figura 2, sono riassunte tutte le fasi, tramite cui la computazione, partendo dalle configurazioni *trial*, realizza la fase di *pre-processing* considerando le *large strain*.

4.2.2 Post-Processing

Trovato il tensore di sforzo è possibile entrare nella superficie di snervamento ed eseguire il metodo di ritorno radiale, già descritto nel caso di *small deformation*. Ovviamente rispetto al caso classico ora alcune variabili sono state sostituite dalla loro controparte *large strain*: il tensore degli sforzi di Cauchy è stato sostituito dal tensore di Kirchhoff ($\underline{\sigma} \rightarrow \bar{\underline{\mathbf{T}}}$) ed al posto dell'incremento di deformazione plastica, l'output è costituito dalla parte incrementale simmetrica del gradiente di velocità ($\Delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rightarrow \Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{D}}^p$). Dalla risoluzione numerica con il quale si genera l'update della superficie di snervamento si ottengono i valori incrementati diella deformazione plastica e della matrice tangente elastica per le piccole deformazioni.

Fatto questo inizia la fase di post processing che, tramite il calcolo di particolari funzioni tensoriali, permette il calcolo della parte plastica incrementale del gradiente di deformazione ${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{F}}^{p-1}$, fondamentale per la chiusura del ciclo e di tutta la computazione.

Oltre a ${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{F}}^{p-1}$ è fondamentale anche il secondo tensore degli sforzi di piola Kirchhoff ${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{S}}$, che ha un ruolo chiave per il calcolo della matrice tangente elasto-plastica delle grandi deformazioni poiché è definita come:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{S}}}{\partial \underline{\mathbf{A}}_*^e} \quad (4.2.9)$$

Effettuata la “correzione plastica”, sono note ed utilizzabili nel *post-processing* le seguenti variabili: il tensore di stress ${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{T}}$, il backstress ${}^{t+\Delta t} \underline{\boldsymbol{\beta}}$, l'incremento di deformazione plastica (in forma tensoriale) $\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{D}}^p$, e la variabile scalare di overstress ${}^{t+\Delta t} \kappa$

E' allora possibile calcolare il tensore di Cauchy con la formula:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = J_*^{-1} \text{ } {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{T}} = J_*^{-1} \text{ } {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{R}}_*^e \text{ } {}^{t+\Delta t} \bar{\underline{\mathbf{T}}} \text{ } \underline{\mathbf{R}}_*^{eT} \quad (4.2.10)$$

Mentre il valore della parte plastica del gradiente è dato dalla seguente espressione:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{F}}^{p-1} = {}^t \underline{\mathbf{F}}^{p-1} \exp\left(-\Delta t \text{ } {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{D}}^p\right) \quad (4.2.11)$$

I passaggi fatti finora sono certamente immediati e non molto difficoltosi, permettendo così di maneggiare facilmente le complicazioni dell'analisi large strain.

La stessa cosa non si può dire per il secondo tensore degli sforzi di Piola per cui il percorso è meno lineare:

E' possibile definire il tensore degli stress di Mandel e scomporlo in una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}_s + {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}_w = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{T}} - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{T}}^T - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e \quad (4.2.12)$$

con

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}_w = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{T}} - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{T}}^T - {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}_s = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{T}} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Nelle (4.2.12) e nella (4.2.13) il valore di ${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e$ può essere calcolata usando l'incremento di deformazione plastica ed il tensore delle deformazioni trial: ${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{E}}^e = \underline{\underline{E}}_*^e - \Delta t \underline{\underline{D}}^p$

Una volta esplicitato il tensore di Mandel è possibile ottenere quello degli sforzi di Piola, usando la sua definizione costitutiva:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}} = \text{Secondo Tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{C}}^{e-1} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}$$

Anche $\underline{\underline{S}}$ può essere scomposto in due contributi ma, a causa delle approssimazioni nei vari passaggi, per forzare la sua simmetria verrà considerata solo la sua parte simmetrica.

Si ottiene quindi:

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}}_s + \cancel{{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}}_w} = \frac{1}{2} \left[{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{C}}^{e-1} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}} + {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\Xi}}^T : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{C}}^{e-1} \right] \quad (4.2.14)$$

4.2.3 La matrice tangente delle grandi deformazioni

La matrice tangente nel caso delle grandi deformazioni è espressa dalla relazione:

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e}$$

Dove $\underline{\underline{S}}$ è il secondo tensore di Piola ricavato durante la fase di *post-processing* plastico ed il tensore $\underline{\underline{A}}_*^e$ prende il nome di tensore elastico di Green Lagrange (indicato anche con $\underline{\underline{E}}^{(G)}$), coniugato nel senso del lavoro con $\underline{\underline{S}}$. Le operazioni di derivazione del tensore di Piola sono notevolmente elaborate; è tuttavia possibile esprimere la sua variazione tramite il tensore di Cauchy-Green destro e quello degli sforzi di Mandel. In questa sezione, ove possibile, verranno omessi gli apici ed i pedici del riferimento temporale per evitare confusione. Questa è una scelta plausibile in quanto tutte le variabili sono riferite al tempo $t + \Delta t$ ed al passo (i) dell'integrazione (la matrice tangente elasto-plastica ottenuta verrà utilizzata al passo ($i + 1$)).

Si consideri ancora il tensore degli stress di piola Kirchhoff, "simmetrizzato" utilizzando solo una delle sue componenti; è possibile calcolarne la derivata rispetto al tempo $\underline{\underline{S}}$ ed esplicitare i singoli termini che la compongono:

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{C}}^{e-1} \underline{\underline{\Xi}} + \underline{\underline{\Xi}}^T \underline{\underline{C}}^{e-1}] \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &= \frac{1}{2} [\dot{\underline{\underline{C}}}^{e-1} \underline{\underline{\Xi}} + \underline{\underline{C}}^{e-1} \dot{\underline{\underline{\Xi}}} + \dot{\underline{\underline{\Xi}}}^T \underline{\underline{C}}^{e-1} + \underline{\underline{\Xi}}^T \dot{\underline{\underline{C}}}^{e-1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} : \dot{\underline{\underline{A}}_*^e} \right) \underline{\underline{\Xi}} + \underline{\underline{C}}^{e-1} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} : \dot{\underline{\underline{A}}_*^e} \right) + \left(\frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}^T}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} : \dot{\underline{\underline{A}}_*^e} \right) \underline{\underline{C}}^{e-1} + \underline{\underline{\Xi}}^T \left(\frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} : \dot{\underline{\underline{A}}_*^e} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Nella (4.2.16) compaiono alcune derivate temporali materiali del tensore lagrangiano di deformazione. I doppi prodotti scalari fra le derivate espresse nella (4.2.16) generano una gravosa parte di algebra tensoriale: per facilitare le operazioni è opportuno introdurre due nuovi tensori del quarto ordine:

$$\begin{cases} \underline{\underline{Z}} = \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} = \underline{\underline{Z}}_{ijkl} \\ \underline{\underline{Q}} = \frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} = \underline{\underline{Q}}_{ijkl} \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{Z}}^2 \underline{\underline{\Xi}} + \underline{\underline{C}}^{e-1} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{C}}^{e-1} + \underline{\underline{\Xi}}^T \underline{\underline{Z}} \right] : \underline{\underline{A}}_*^e$$

Trovata una definizione operativa più pratica, è ora doveroso esplicitare minuziosamente tutti i termini per i quali non è stata ancora data una definizione univoca, ad iniziare dalle derivate degli *stress tensor* rispetto agli *strain tensor*:

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} = \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{E}}^e} : \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{E}}^e}{\partial \underline{\underline{E}}_*^e}}_{\underline{\underline{A}}^{e-1}, \underline{\underline{\Xi}}^{ep}} : \frac{\partial \underline{\underline{E}}_*^e}{\partial \underline{\underline{A}}_*^e} \quad (4.2.17)$$

Per proseguire nelle operazioni di definizione è necessario considerare le scomposizioni spettrali di tutti i tensori in gioco. Queste, infatti, permettono una più facile gestione delle operazioni di derivazione ed una maggior chiarezza nella descrizione delle variabili:

$$\underline{\underline{C}}^{e-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\lambda_i^e)^2} \underline{\underline{N}}_i \otimes \underline{\underline{N}}_j; \quad (4.2.18)$$

$$\underline{\underline{E}}^e = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i^e) \underline{\underline{N}}_i \otimes \underline{\underline{N}}_j \quad (4.2.19)$$

$$\underline{\underline{E}}_*^e = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_{i*}^e) \underline{\underline{N}}_{i*} \otimes \underline{\underline{N}}_{j*}; \quad (4.2.20)$$

$$\underline{\underline{A}}_*^e = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left[(\lambda_{i*}^e)^2 - 1 \right] \underline{\underline{N}}_{i*} \otimes \underline{\underline{N}}_{j*} \quad (4.2.21)$$

Sostituendo le equazioni (4.2.18-21) nella (4.2.17) si ottiene la rappresentazione spettrale dei tensori del quarto ordine:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\frac{\partial \underline{\underline{C}}^{e-1}}{\partial \underline{\underline{E}}^e}}}}}} = \sum_{i=1}^3 -\frac{2}{(\lambda_i^e)^2} \underline{\underline{M}}_i \otimes \underline{\underline{M}}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} 2 \frac{\frac{1}{(\lambda_j^e)^2} - \frac{1}{(\lambda_i^e)^2}}{\ln(\lambda_j^e) - \ln(\lambda_i^e)} \underline{\underline{M}}_i \odot^s \underline{\underline{M}}_j \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{EA}}^e &= \frac{\partial \underline{E}^e}{\partial \underline{A}^e} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\lambda_{i^*}^e)^2} \underline{M}_i^* \otimes \underline{M}_j^* + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 2 \frac{\ln(\lambda_{j^*}^e) - \ln(\lambda_{i^*}^e)}{\frac{1}{2}[(\lambda_{j^*}^e)^2 - (\lambda_{i^*}^e)^2]} \underline{M}_i^* \odot^s \underline{M}_j^* \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Nelle relazioni (4.2.22) e (4.2.23) è stato definito un nuovo prodotto tensoriale, definito come:

$$\begin{cases} \underline{M}_i = \underline{N}_i \otimes \underline{N}_i \\ \underline{M}_i \odot^s \underline{M}_j = \underline{M}_j \odot^s \underline{M}_i = \frac{1}{4} \left[(\underline{N}_i \otimes \underline{N}_j + \underline{N}_j \otimes \underline{N}_i) \otimes (\underline{N}_i \otimes \underline{N}_j + \underline{N}_j \otimes \underline{N}_i) \right] \end{cases} \quad (4.2.24)$$

A questo punto è possibile esplicitare il tensore del quarto ordine " $\underline{\underline{Q}}$ ":

$$\underline{\underline{Q}} = \frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}}{\partial \underline{A}^e} = \frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}_s}{\partial \underline{A}^e} + \frac{\partial \underline{\underline{\Xi}}_w}{\partial \underline{A}^e} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{A}^e} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \underline{E}^e}{\partial \underline{A}^e} \right)^2 \cdot \underline{T} \right]}_{\#} + \left[\underline{E}^e \cdot \frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{A}^e} \right] - \left[\underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{E}^e}{\partial \underline{A}^e} \right] - \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{A}^e} \right)^2 \cdot \underline{E}^e \right]}_{\#}$$

Per una sua descrizione completa mancano ancora i due termini identificati con la parentesi grafa ed il simbolo "#", che sono ricavabili mediante le espressioni:

$$\underline{\underline{EA}}^e = \frac{\partial \underline{E}^e}{\partial \underline{A}^e} = \frac{\partial \underline{E}^e}{\partial \underline{E}^e} : \underline{\underline{EA}}^e \quad (4.2.25)$$

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{A}^e} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{E}^e} : \underline{\underline{EA}}^e = \underbrace{\underline{\underline{R}}^{ep}}_{\text{small strain}} : \underline{\underline{EA}}^e \quad (4.2.26)$$

E' ora possibile, dopo aver esposto in dettaglio la rappresentazione di tutti i termini in gioco, ricavare la matrice elasto-plastica tangente per le grandi deformazioni:

$$\underline{\underline{C}}^{ep} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{Z}}^2 \cdot \underline{\underline{\Xi}} + \underline{\underline{C}}^{e-1} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{C}}^{e-1} + \underline{\underline{\Xi}}^T \cdot \underline{\underline{Z}} \right]$$

4.2.4 Schema complessivo dell'algoritmo di calcolo

L'algoritmo descritto in questo capitolo per l'analisi della plasticità per processi di grandi deformazioni risulta essere molto complesso e questo fatto unito alle numerose variabili in gioco nelle diverse fasi dell'analisi, può causare una perdita del senso generale di ogni singola operazione. Lo schema, riportato in figura 3, ha quindi l'intento di mettere in evidenza come le varie parti interagiscano fra loro, dando una visione complessiva più ampia e la possibilità al lettore di capire meglio l'intero schema di calcolo.

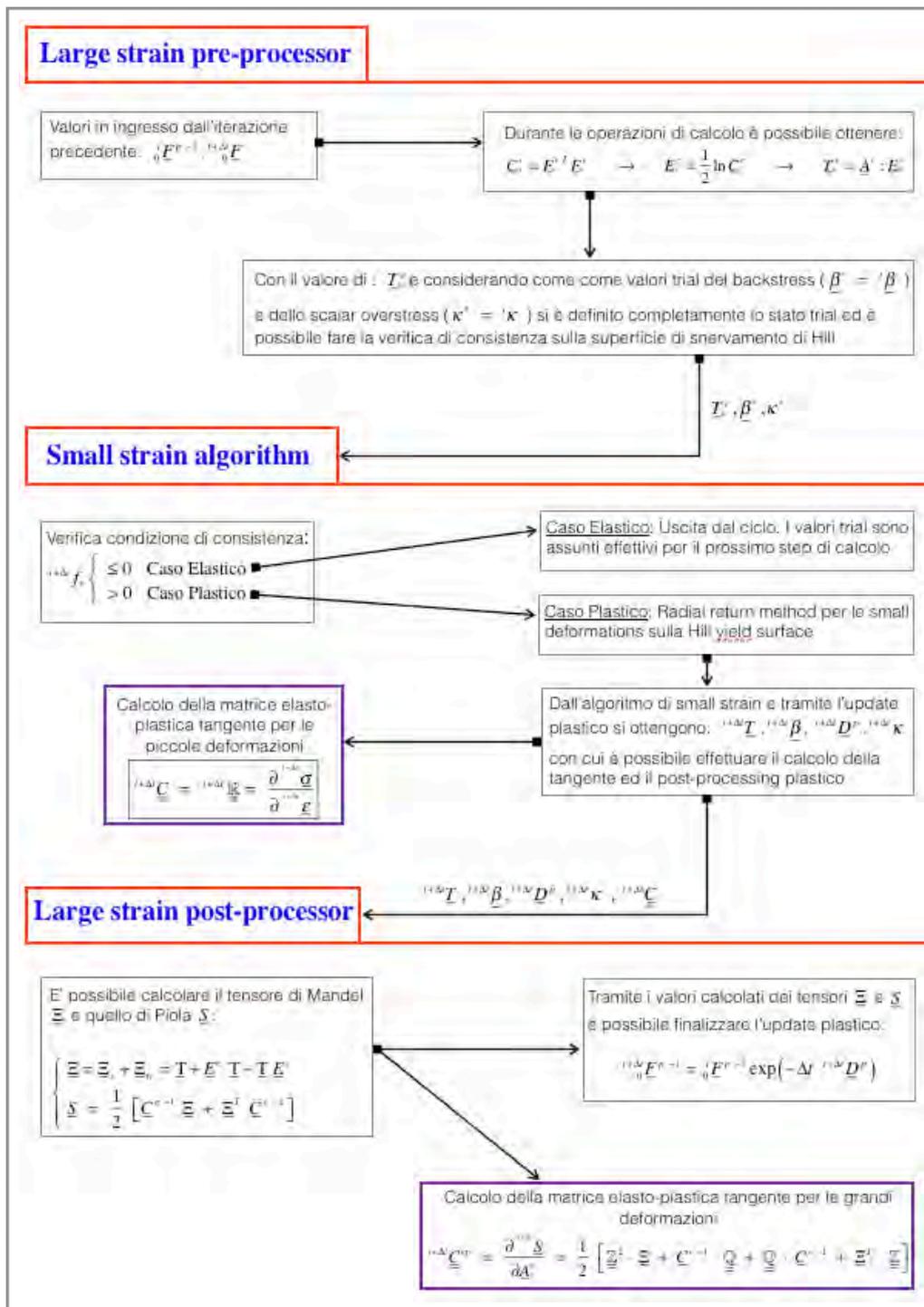


Figura 3 - Schema complessivo delle fasi del calcolo per l'analisi di large strain

4.3 L'implementazione nel software ABAQUS

Per la scrittura del codice di calcolo è stato scelto il software ABAQUS, ampiamente diffuso nel campo della ricerca accademica e industriale che consente l'implementazione di modelli arbitrari meccanici dei materiali tramite le user sub-routine UMAT (calcolo implicito) e VUMAT (calcolo esplicito). La scelta è ricaduta su questo software perché grazie alla sua ampia diffusione è possibile trovare una ingente documentazione che facilita la scrittura dei programmi ed insieme all'ampia casistica di analisi standard e funzioni intrinseche del programma stesso rappresenta un ambiente perfetto per studiare il comportamento di nuovi modelli, confrontarli con diverse soluzioni già disponibili nel programma e verificare l'esattezza del progetto complessivo.

In particolar modo, in questo lavoro è stata utilizzata la possibilità di scrivere dei modelli del materiale sfruttando la routine UMAT per il calcolo esplicito.

La routine UMAT per implementare il modello Bathe-Montans è stata scritta usando come base le routine sviluppato dal Prof. Montans e da M. A. Caminero Torija per il software FEM DULCINEA, modificando parte della formulazione e adattando il programma alle interfacce ed idiosincrasie richieste dal software ABAQUS.

Tutte le routine compilate da Abaqus devono infatti essere scritte in ForTran per poter essere impiegate nell'analisi e richiedono degli step essenziali:

Dopo che il software ha assemblato le matrici di riferimento del materiale con i valori di input forniti dall'utente ed inizializzato il calcolo, la routine viene chiamata fornendo in ingresso i valori andati in convergenza al passo temporale precedente per alcune input key variables (tra cui sforzi, deformazioni, incremento di deformazione) insieme a quelle di deformazione stimata per il passo successivo. A questo punto l'utente, tramite il codice della UMAT, deve eseguire l'aggiornamento dello sforzo secondo il modello di materiale che sta implementando e fornire la matrice tangente elasto-plastica del materiale. E' possibile memorizzare dei valori temporali utilizzando delle *DEPVAR ovvero delle variabili ausiliarie che il sistema memorizza durante gli step e fornisce all'utente ad ogni passo di calcolo. La UMAT così come altre user-subroutine viene chiamata per ogni passo di calcolo, elemento e punto di integrazione del modello testato. Nella figura 4 si mostra uno schema di chiamata della UMAT durante i vari step eseguiti dal software Abaqus standard (implicito).

La UMAT deve seguire la convenzione di programmazione del ForTran 77 e fornire le variabili seguendo le regole di definizione del software ABAQUS, in cui gli sforzi e le deformazioni sono descritte da vettori dove le prime tre componenti rappresentano quelle principali e le ultime tre gli sforzi di taglio.

Le gamma invece sono memorizzate come delle deformazioni a taglio nominali. Il gradiente di deformazione è invece trattato con un *array* bidimensionale (matrice 3x3)

$$\underline{\sigma} = \left\{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23} \right\}^T ; \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

Per eseguire il calcolo degli sforzi, l'utente ha a disposizione diverse routine di "appoggio" che può usare per assistersi durante la computazione. Queste vanno da operazioni di scomposizione dei tensori fino al calcolo di autovettori ed autovalori delle variabili in gioco. Per una lista completa di queste funzioni ausiliarie si può consultare la [83].

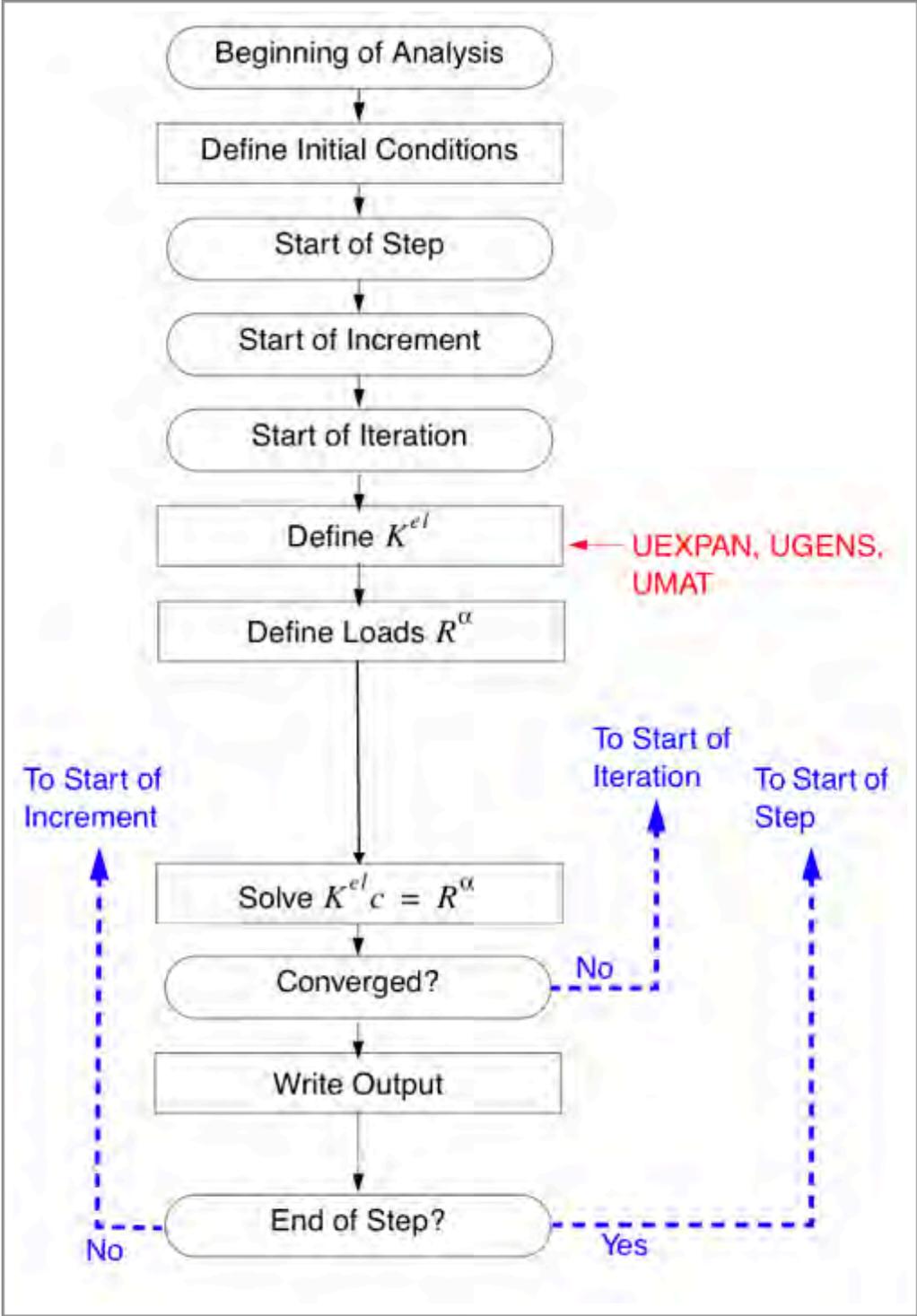


Figura 4 - Schema di calcolo del software ABAQUS e modalità di chiamata della routine UMAT

4.3.1 La routine di calcolo

In questo paragrafo è riportata la routine scritta per implementare il modello B-M. I commenti, la divisione in 16 parti e l'elevato numero di spiegazioni inserite nel corpo del testo hanno lo scopo di guidare il lettore nella comprensione della stretta corrispondenza fra il codice e le parti teoriche esposte fino a questo punto. La routine richiede molti passaggi matematici, fra cui vari tipi di prodotti tensoriali ed altre operazioni, che da un punto di vista computazionale sono state svolte scrivendo delle particolari utility subroutine. Di queste routine di appoggio verrà spiegata la funzione ma non verrà riportato il codice in dettaglio per motivi di brevità espositiva.

```
C UMAT user-Subroutine Bathe-Montans model
C
C Bathe Montans model per il software
C agli elementi finiti Abaqus per analisi di
C solidi elasto-plastici anisotropi con
C incrudimento cinematico, isotropo e
C misto, con riferimento alla superficie di
C snervamento di Hill
C
C * Numero delle variabili di stato
C utilizzate: 24 C (STATEV)
C
C * Numero delle proprietà del materiale:
C 21 (PROPS)
C
C *** Variabili di stato del sistema
C
C STATEV --->
C
C FP(i,j) = Gradiente di Deformazione
C Plastica
C STATEV(1) = FP(1,1)
C STATEV(2) = FP(1,2)
C STATEV(3) = FP(1,3)
C STATEV(4) = FP(2,1)
C STATEV(5) = FP(2,2)
C STATEV(6) = FP(2,3)
C STATEV(7) = FP(3,1)
C STATEV(8) = FP(3,2)
C STATEV(9) = FP(3,3)
C
C
C BACK(i) = BackStress Tensor
C STATEV(10) = BACK(1)
C STATEV(11) = BACK(2)
C STATEV(12) = BACK(3)
C STATEV(13) = BACK(4)
C STATEV(14) = BACK(5)
C STATEV(15) = BACK(6)
C
C STATEV(16) = hard_k
C STATEV(17) = eqps_p
C STATEV(18) = deqps_p
C
C STATEV(19) = EPS_P_TENS(1)
C STATEV(20) = EPS_P_TENS(2)
C STATEV(21) = EPS_P_TENS(3)
C STATEV(22) = EPS_P_TENS(4)
C STATEV(23) = EPS_P_TENS(5)
C STATEV(24) = EPS_P_TENS(6)
C
C *** Proprietà meccaniche del materiale
C (scritte nelle direzioni principali del
C materiale)
C
C PROPS() --->
C
C PROPS(1) = e1 = Young Modulus
C direction 1
C PROPS(2) = e2 = Young Modulus
C direction 2
C PROPS(3) = e3 = Young Modulus
C direction 3
C PROPS(4) = p12 = Poisson ratio,
C direzione 12
C PROPS(5) = p23 = Poisson ratio,
C direzione 23
C PROPS(6) = p13 = Poisson ratio,
C direzione 13
C PROPS(7) = g12 = Shear Modulus
C PROPS(8) = g23 = Shear Modulus
C PROPS(9) = g13 = Shear Modulus
C PROPS(10) = yield1 = Yield stress,
C direction 1
C PROPS(11) = yield2 = Yield stress,
C direction 2
```

C PROPS(12) = yield3 = Yield stress,
C direction 3
C PROPS(13) = yield12 = Yield stress
C ratio
C PROPS(14) = yield23 = Yield stress
C ratio
C PROPS(15) = yield13 = Yield stress
C ratio
C
C PROPS(16) = h_bar = Linear Hard.
C Modulus
C PROPS(17) = k_0 = Initial Yield
C stress
C PROPS(18) = k_inf = Infinite Yield
C stress
C PROPS(19) = yield_ref = Reference
C Yield stress
C PROPS(20) = delta (Saturation
C parameter)
C PROPS(21) = M (Isotropic/kinematic
C hard.)
C
C=====
C=====

SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,
 SSE,SPD,SCD,RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
 STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PRED
 EF, DPRED,CMNAME,
 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS, NPROPS,
 COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,DFGRD0,
 DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPL
 DE(NTENS),STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),
 TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),PROPS(NPROPS),C
 OORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)

DIMENSION C(6,6),b(6), BACK(6),OverStress(6),
 TrialOverStress(6), EPS_P(6), SIGMA(6), hilln(6,6),
 hilln_Z(6), Unit(6,6), H(6,6), CH_hilln(6,6),
 D_INV(6,6), DZ_DGAMMA(6), XX(2),
 RR(2),DZ_DEPS_P(6), DEPS_P_TENS(6),
 EPS_P_TENS(6), Z_hilln(6),
 Z_hilln_D_INV(6),Z_hilln_D_INV_C(6),CH_hilln_Z(6),
 PO(6), dGAMMA_dEPS(6), D_INV_C(6,6),
 C_hilln(6,6), DK_DEPS_P_R(6),

DZ_DEPS_DYAD(6,6),C_hilln_Z(6), DZ_DEPS(6,6),
 DYAD1(6,6), DYAD2(6,6), DYAD3(6,6),
 H_hilln(6,6),DDSDDE_SMALL(6,6),
 DDSDDE_TRIAL(6,6),
 SIGMA_T(6),STRESS_LARGE(6),SIGMA_TT(6)

C
C
C

CHARACTER*8 CMNAME

INTEGER I,J

REAL*8 FT(3,3),FTAU(3,3),GAMMAPT,NUPT,ST,
 FPT(3,3),MET(3,3),STRESSTAU(3,3),GAMMAPTAU,
 NUPTAU,STAU,FPTAU(3,3),METAU(3,3),PWRINCT,
 PROPERTIES(NPROPS),TOT_TIME,STRESS_POW
 ER,STRESS_OLD(NTENS),SSE_OLD,
 SPD_OLD,DENSITY,
 DTIME,S0,EETRIAL_V(6),SKW_MANDEL(3,3),
 SYM_MANDEL(3,3),MANDEL(3,3),CE(3,3),
 CE_INV(3,3),SYM_S_PU(3,3),DETGRAD,
 EPS_P_TENS_M(3,3),EPS_P_TENS_M_EXP(3,3),
 T1,EIGENVA(3),EIGENVE(3,3),FPTINV(3,3),
 FE_TRIAL(3,3),EETRIAL(3,3),TT(3,3),SYM_S(3,3),
 PSEUDO_VECT_6(6),PSEUDO_T6(6),
 PSEUDO_VECT_U6(6),PSEUDO_T_U(6,6)

REAL*8

ZERO,ONE,ONE_HALF,TWO,ONE_THIRD,
 TWO_THIRD,THREE,THREE_HALF,E_EULER,ROO
 T_THREE, ROOT_TWO,PI

PARAMETER (ZERO=0.D0, ONE=1.D0,ONE,
 ROOT_TWO=1.41421356237D0,PI=3.1415926D0,
 HALF= 0.5D0,
 TWO=2.D0,ONE_THIRD=1.D0/3.D0,
 TWO_THIRD=2.D0/3.D0,THREE=3.D0,THREE_HA
 LF=1.5D0,E_EULER=2.7182818D0,ROOT_THREE
 =1.73205D0)

C
C
C=====
C Inizializzazione del calcolo
C=====
C

STRESS_OLD = STRESS

**! La "ZEROW" non è una funzione intrinseca
! del fortran ma una subroutine per azzerare
! le componenti di vettori e matrici**

C
C

CALL ZEROW(FT)
CALL ZEROW(FAU)
CALL ZEROW(STRESSTAU)
CALL ZEROW(METAU)C

C
C

C=====

**C 1: Assemblaggio matrici ed ottenimento
C dei valori andati in convergenza nello
C step precedente**

C=====

C
C

**! La "dzero" non è una funzione intrinseca del
! fortran ma una subroutine per azzerare le
! componenti di vettori e matrici come la
! "ZEROW" ma ora non è necessario
! specificare la struttura**

C

CALL dzero (FPTINV, 9)

FPTINV(1,1) = STATEV(1)
FPTINV(1,2) = STATEV(2)
FPTINV(1,3) = STATEV(3)
FPTINV(2,1) = STATEV(4)
FPTINV(2,2) = STATEV(5)
FPTINV(2,3) = STATEV(6)
FPTINV(3,1) = STATEV(7)
FPTINV(3,2) = STATEV(8)
FPTINV(3,3) = STATEV(9)

BACK(1) = STATEV(10)
BACK(2) = STATEV(11)
BACK(3) = STATEV(12)
BACK(4) = STATEV(13)
BACK(5) = STATEV(14)
BACK(6) = STATEV(15)

EPS_P_TENS(1) = STATEV(19)
EPS_P_TENS(2) = STATEV(20)
EPS_P_TENS(3) = STATEV(21)
EPS_P_TENS(4) = STATEV(22)
EPS_P_TENS(5) = STATEV(23)
EPS_P_TENS(6) = STATEV(24)

C
C

C=====

**C 2: Assemblaggio della matrice anisotropa
C elastica (Compliance Tensor "S")**

C=====

C
C
C

CALL AB_BM_convert(STRESS, STRAIN,
DSTRAIN)

CALL dzero (C, 36)

C
C

C(1,1) = 1.0d0/PROPS(1)
C(2,2) = 1.0d0/PROPS(2)
C(3,3) = 1.0d0/PROPS(3)
C(4,4) = 1.0d0/PROPS(7)
C(5,5) = 1.0d0/PROPS(8)
C(6,6) = 1.0d0/PROPS(9)
C(1,2) = -PROPS(4)/PROPS(2)
C(1,3) = -PROPS(6)/PROPS(1)
C(2,3) = -PROPS(5)/PROPS(3)
C(2,1) = C(1,2)
C(3,1) = C(1,3)
C(3,2) = C(2,3)

C

C Inversione ->

C C=Elastic Constitutive tensor "C"

C

CALL kgaussj(C, 6, 6, b, 0, 0, istat)

C
C

**! La "kgaussj" è una routine scritta per
! eseguire le operazioni di inversione delle
! matrici del ciclo**

C
C

DDSDDE = C

C

C=====

**C Se la routine è chiamata alla prima
C iterazione del passo di calcolo, non si deve
C eseguire l'update degli sforzi in quando il
C gradiente di deformazione in fase di input**

```

C così come l'incremento di deformazione è
C nullo. La matrice elastica ottenuta viene
C quindi indicata come lo Jacobiano
C (DDSDDE) e concludere il passaggio
C=====
C
CHECK = ZERO
DO I=1,NTENS
CHECK = CHECK + ABS(DSTRAN(I))
END DO
IF(CHECK .LT. 1.D-15) THEN
DO I = 1,NDI
DO J = 1, NDI
DDSDDE(I,J) = C(I,J)
END DO
END DO
RETURN
ENDIF
C
C=====
C 3: Memorizzazione dei valori del
C gradiente ottenuti dal passo temporale
C precedente e di quello trial per il passo
C corrente nelle variabili ausiliarie "FT"
C ed "FTAU"
C=====
C
C
DO I=1,3
DO J=1,3
FT(I,J) = DFGRD0(I,J)
FTAU(I,J) = DFGRD1(I,J)
END DO
END DO
C
C=====
C 4: Calcolo del gradiente di deformazione
C elastico trial per il passo di calcolo
C corrente e decomposizione polare
C (con la utility routine "POLDEC" del
C gradiente per ottenere il tensore di
C deformazione logaritmico
C "E_STRAIN_TRIAL"
C=====
C

```

```

FE_TRIAL = MATMUL(FTAU,FPTINV)
C
CALL POLDEC (FE_TRIAL,RE_TRIAL,UE_TRIAL,
E_STRAIN_TRIAL)
C
C=====
C 5: Calcolo dei tensori ausiliari definibili
C utilizzando i gradienti tensoriali
C appena ricavati
C
C=====
C
! CE = Tensore destro di Cauchy-Green
CE_TRIAL = MATMUL(TRANPOSE(FE_TRIAL),
FE_TRIAL)
CALL M3INV(CE,CE_INV)
C
C
! La routine "M3INV" è stata scritta per
! eseguire unicamente le inversioni di
! tensori del secondo ordine in forma
! matriciale (3x3)
CALL SPECDEC(CE,EIGENVA,EIGENVE)
! La routine "SPECDEC" esegue la
! decomposizione spettrale di un tensore
! dando la sua forma costituita da autovettori
! e autovalori dove gli autovettori sono già
! ordinati
C
C=====
C 6: Check Elastico e assemblaggio
matrice Hil (hilln)
C=====
C
C
! Coefficienti della matrice anisotropa "hilln"
H_F = 0.5d0 * ((1.0d0/(PROPS(11)**2)) +
(1.0d0/(PROPS(12)**2)) - (1.0d0/
(PROPS(10)**2)))

```

$$H_G = 0.5d0 * ((1.0d0/(PROPS(10)**2)) + (1.0d0/(PROPS(12)**2)) - (1.0d0/(PROPS(11)**2)))$$

$$H_H = 0.5d0 * ((1.0d0/(PROPS(11)**2)) + (1.0d0/(PROPS(10)**2)) - (1.0d0/(PROPS(12)**2)))$$

$$H_L = 0.5d0 * (1.0d0/(PROPS(14)**2))$$

$$H_M = 0.5d0 * (1.0d0/(PROPS(15)**2))$$

$$H_O = 0.5d0 * (1.0d0/(PROPS(13)**2))$$

$$coef = TWO_THIRD * (PROPS(19)**2)$$

$$hn1 = H_H * coef$$

$$hn2 = H_G * coef$$

$$hn3 = H_F * coef$$

$$hn12 = H_O * coef$$

$$hn23 = H_L * coef$$

$$hn31 = H_M * coef$$

CALL dzero (hilln, 36)

$$hilln(1,1) = hn1 + hn2$$

$$hilln(2,2) = hn1 + hn3$$

$$hilln(3,3) = hn2 + hn3$$

$$hilln(4,4) = hn12$$

$$hilln(5,5) = hn23$$

$$hilln(6,6) = hn31$$

$$hilln(1,2) = -hn1$$

$$hilln(1,3) = -hn2$$

$$hilln(2,3) = -hn3$$

$$hilln(2,1) = hilln(1,2)$$

$$hilln(3,1) = hilln(1,3)$$

$$hilln(3,2) = hilln(2,3)$$

C

C

C=====

C 7: Calcolo dello stress, dell'overstress (Z) e trasformazione dei tensori in formato pseudovettoriale

C=====

C

$$E_STRAIN_TRIAL_V(1) = E_STRAIN_TRIAL(1,1)$$

$$E_STRAIN_TRIAL_V(2) = E_STRAIN_TRIAL(2,2)$$

$$E_STRAIN_TRIAL_V(3) = E_STRAIN_TRIAL(3,3)$$

$$E_STRAIN_TRIAL_V(4) = E_STRAIN_TRIAL(1,2)$$

$$E_STRAIN_TRIAL_V(5) = E_STRAIN_TRIAL(2,3)$$

$$E_STRAIN_TRIAL_V(6) = E_STRAIN_TRIAL(1,3)$$

! Trasformazione dei tensori in formato pseudovettoriale. E' necessario in quanto per eseguire i prodotti considerando la loro rappresentazione vettoriale o matriciale di ometterebbero delle componenti ridondanti che vanno quindi aggiunte tramite coefficienti moltiplicativi

CALL

sub_PSEUDO_VECT_6(E_STRAIN_TRIAL_V,PSEUDO_VECT_6)

EETRIAL_V = PSEUDO_VECT_6

CALL dzero (PSEUDO_VECT_6, 6)

C

CALL

sub_PSEUDO_VECT_6(BACK,PSEUDO_VECT_6)

BACK = PSEUDO_VECT_6

CALL dzero (PSEUDO_VECT_6, 6)

C

CALL sub_PSEUDO_T(C,PSEUDO_T)

C = PSEUDO_T

CALL dzero (PSEUDO_T, 36)

C

CALL sub_PSEUDO_T(hilln,PSEUDO_T)

hilln = PSEUDO_T

CALL dzero (PSEUDO_T, 36)

C

C

C

C*****

C*****

C

SIGMA = STRESS + MATMUL (C, DStran)

SIGMA_T = MATMUL (C, E_STRAIN_TRIAL_V(6))

SIGMA_TT= MATMUL (C,(STRAN - EPS_P_TENS))

TrialOverStress = SIGMA - BACK

C

C

C=====

C 8: Calcolo Hardening e Verifica di

C consistenza sulla superficie di

C snervamento di Hill

C=====

C

C

EQPS_P = STATEV(17)

```
HARD_K = HARDENING (PROPS(16), PROPS(17),
PROPS(18), PROPS(19), PROPS(20), PROPS(21),
EQPS_P)
```

```
HARD_K2 = HARD_K**2
```

```
F = THREE_HALF*
```

```
DOT_PRODUCT(TrialOverStress, MATMUL(hilln,
TrialOverStress))/HARD_K2 - 1.0d0
```

```
C
```

```
C
```

```
IF (F .LE. 0.0d0) THEN ! CASO ELASTICO
```

```
STRESS = SIGMA
```

```
DDSDDE = C
```

```
RETURN
```

```
ENDIF
```

```
C
```

```
C=====
```

```
C *** CASO PLASTICO ***
```

```
C=====
```

```
C
```

```
C=====
```

```
C 9: Iterazione per calcolare la stima del
! parametro di consistenza gamma e
! migliorare la convergenza dell'
! iterazione generale del punto 10
! Ipotesi di base: EQPS_P = cost=
! HARD_K; La parte isotropa
! dell'incrudimento è considerata
! bloccata
```

```
C=====
```

```
C
```

```
C
```

```
coef = TWO_THIRD*(1.0d0 -
PROPS(21))*PROPS(16)
```

```
C ! (2/3)*(1-M)*H
```

```
call dzero (Unit, 36)
```

```
call dzero (H, 36)
```

```
do 5 i = 1, 6
```

```
5 Unit(i,i) = 1.0d0
```

```
C
```

```
C
```

```
! Assemblaggio del tensore di incrudimento
```

```
! cinematico
```

```
C
```

```
C
```

```
H(1,1) = TWO_THIRD*coef
```

```
H(2,2) = H(1,1)
```

```
H(3,3) = H(1,1)
```

```
H(4,4) = ONE_HALF * coef
```

```
H(5,5) = ONE_HALF * coef
```

```
H(6,6) = ONE_HALF * coef
```

```
H(1,2) = -ONE_THIRD * coef
```

```
H(1,3) = H(1,2)
```

```
H(2,3) = H(1,2)
```

```
H(2,1) = H(1,2)
```

```
H(3,1) = H(1,2)
```

```
H(3,2) = H(1,2)
```

```
Tol = sqrt(epsilon(1.0d0))
```

```
Niter_Max = 1000
```

```
C_hilln = MATMUL(C, hilln) !* C : N
```

```
H_hilln = MATMUL(H, hilln) !* H : N
```

```
CH_hilln = C_hilln + H_hilln !* (C + H):N = C:N
+ H:N
```

```
TreSuK2 = 3.0d0/HARD_K2
```

```
R = F
```

```
GAMMA = 0.0D0
```

```
NIT = 0
```

```
DO WHILE (ABS(R) .GE. tol .AND. NIT .LE.
```

```
Niter_Max)
```

```
NIT = NIT + 1
```

```
D_INV = Unit + (TreSuK2*GAMMA) * CH_hilln
```

```
CALL kgaussj (D_INV, 6, 6, b, 0, 0, istat)
```

```
OverStress = MATMUL(D_INV, TrialOverStress)
```

```
dZ_dGAMMA =-
```

```
TreSuK2*MATMUL(D_INV,MATMUL(CH_hilln,
OverStress))
```

```
dF_dGAMMA = TreSuK2*DOT_PRODUCT(
OverStress, MATMUL(hilln,
dZ_dGAMMA))
```

```
F_GAMMA = DOT_PRODUCT(OverStress,
MATMUL(hilln, OverStress))
```

```
R = THREE_HALF*F_GAMMA/HARD_K2 - 1.0d0
```

```
GAMMA = GAMMA - R/dF_dGAMMA
```

```
END DO
```

```
C
```

```
C
```

C
C=====
C 10: Iterazione principale del ciclo. Metodo
C di ritorno radiale

C=====
C
C
C
C

DueSuK = 2.0d0/HARD_K

D_INV = Unit + (TreSuK2*GAMMA) * CH_hilln

CALL kgaussj (D_INV, 6, 6, b, 0, 0, istat)

EQPS_P = STATEV(17)

DEQPS_P = DueSuK*GAMMA

EQPS_tot = EQPS_P + DEQPS_P

HARD_K = HARDENING (PROPS(16), PROPS(17),
PROPS(18), PROPS(19), PROPS(20), PROPS(21),
EQPS_tot)

XX(1) = GAMMA **! Incognite**

XX(2) = DEQPS_P **! Design variables**

OverStress = MATMUL(D_INV, TrialOverStress)

F = THREE_HALF *DOT_PRODUCT(OverStress,
MATMUL(hilln, OverStress)) /HARD_K2 - 1.0d0

G = DEQPS_P - DueSuK*GAMMA*(F + 1.0d0)

RR(1) = F **! Residui**

RR(2) = G **! The Residual variables**

200 NIT = NIT + 1

IF (NIT .LE. Niter_Max) **THEN**

C

C

C ... dF/dGAMMA

dZ_dGAMMA =-TreSuK2 * MATMUL(D_INV,
MATMUL(CH_hilln, OverStress))

dF_dGAMMA = TreSuK2 *

DOT_PRODUCT(OverStress,
MATMUL(hilln, dZ_dGAMMA))

C

C

C ... dF/dEPS_P

dK_dEPS_P = PROPS(16)* PROPS(21)+
(PROPS(18) - PROPS(17)) *PROPS(20) * EXP(-
PROPS(20)*EQPS_tot)

dZ_dEPS_P = -DueSuK*GAMMA * dK_dEPS_P *
dZ_dGAMMA

dF_dEPS_P =(-DueSuK*(F+1.0d0)*dK_dEPS_P) +
(TreSuK2 * DOT_PRODUCT(OverStress,
MATMUL(hilln, dZ_dEPS_P)))

C

C

C ... dG/dGamma

dG_dGAMMA = -DueSuK *(F + 1.0d0 + GAMMA *
dF_dGAMMA)

dG_dEPS_P = 1.0d0 + DueSuK * GAMMA * ((F +
1.0d0) * dK_dEPS_P/HARD_K - dF_dEPS_P)

C

C ... Attualizzazione del vettore soluzione e
C update

C

C

det = dF_dGAMMA*dG_dEPS_P -dF_dEPS_P*
dG_dGAMMA

XX(1) = XX(1) - (dG_dEPS_P*RR(1) -
dF_dEPS_P*RR(2))/det

C

C

XX(2) = XX(2) - (dF_dGAMMA*RR(2) -
dG_dGAMMA*RR(1))/det

IF (XX(1) **.lt.** 0) XX(1) = 0.0d0

IF (XX(2) **.lt.** 0) XX(2) = 0.0d0

GAMMA = XX(1)

DEQPS_P = XX(2)

! Equivalent plastic strain

EQPS_tot = EQPS_P + DEQPS_P

HARD_K = HARDENING (PROPS(16), PROPS(17),
PROPS(18), PROPS(19), PROPS(20), PROPS(21),
EQPS_tot)

HARD_K2 = HARD_K**2

DueSuK = 2.0d0/HARD_K

TreSuK2 = 3.0d0/HARD_K2

D_INV = Unit + TreSuK2*GAMMA * CH_hilln

CALL kgaussj (D_INV, 6, 6, b, 0, 0, istat)

! ... Calcolo dei residui e chiusura del ciclo

OverStress = MATMUL(D_INV, TrialOverStress)

BACK = BACK + (TreSuK2 * GAMMA *
MATMUL(H_hilln, OverStress))

F = THREE_HALF*DOT_PRODUCT(OverStress,
MATMUL(hilln, OverStress))/HARD_K2 - 1.0d0

G = DEQPS_P - 2.0d0*GAMMA*(F + 1.0d0)/
HARD_K

RR(1) = F

RR(2) = G

Rnorm = sqrt(RR(1)**2 + RR(2)**2)

IF (Rnorm .GE. tol) GOTO 200

ENDIF

C

C

C=====

C 11: Update plastico delle variabili e aggiornamento dello sforzo (STRESS)

C=====

C

C

C

EQPS_P = EQPS_tot

STATEV(17) = EQPS_P

STATEV(18) = DEQPS_P

DEPS_P_TENS = TreSuK2*GAMMA *

MATMUL(hilln, OverStress)

EPS_P_TENS = EPS_P_TENS + DEPS_P_TENS

BACK = BACK + MATMUL(H, DEPS_P_TENS)

SIGMA = SIGMA - MATMUL(C, DEPS_P_TENS)

C

C

C

DO 6 i = 1, 6

STATEV(i+18) = EPS_P_TENS(i)

STATEV(i+9) = BACK(i)

STRESS(i) = SIGMA(i)

6 CONTINUE

C

C

C=====

C 12: Calcolo della matrice tangente per le small strain

C=====

C

C

C ... Derivate scalari

dK_dEPS_P = PROPS(16)*PROPS(21) +
(PROPS(18) -
PROPS(17))*PROPS(20)*EXP(-
PROPS(20)*STATEV(18))

dK_dGAMMA = 2.0d0*HARD_K *dK_dEPS_P/
(HARD_K2 + 2.0d0*GAMMA*dK_dEPS_P)

C

C ... Parametri ausiliari

HARD_K3 = HARD_K**3

DA = 6.0d0*dK_dGAMMA*GAMMA/HARD_K3 -
TreSuK2

Z_hilln = MATMUL(OverStress, hilln)

! Z:N

Z_hilln_Z = DOT_PRODUCT(Z_hilln, OverStress)

! Z:N:Z

Z_hilln_D_INV = MATMUL(Z_hilln, D_INV)

! Z:N:D^(-1)

Z_hilln_D_INV_C = MATMUL(Z_hilln_D_INV, C)

CH_hilln_Z = MATMUL(CH_hilln, OverStress)

hilln_Z = MATMUL(hilln, OverStress)

! N:Z

C_hilln_Z = MATMUL(C, hilln_Z)

! C:N:Z

C_hilln = MATMUL(C, hilln)

! C:N

D_INV_C = MATMUL(D_INV, C)

! D^(-1):C

```

PO   = MATMUL(D_INV, CH_hilln_Z)
RO   = DOT_PRODUCT(Z_hilln_D_INV,
CH_hilln_Z)

ETA  = TreSuK2*RO*DA -
3.0d0*Z_hilln_Z*dK_dGAMMA/HARD_K3

dGAMMA_dEPS = (-TreSuK2/
ETA)*Z_hilln_D_INV_C
dK_dEPS_P_R = dK_dGAMMA*dGAMMA_dEPS

DO 8 i = 1, 6
      DO 8 j = 1, 6

8      dZ_dEPS_DYAD(i,j) = PO(i) *
dGAMMA_dEPS(j)  dZ_dEPS = D_INV_C +
DA*dZ_dEPS_DYAD

C
C
C ... Costruzione della matrice e update
C

DO 9 i = 1, 6
      DO 9 j = 1, 6
          DYAD1(i,j) = C_hilln_Z(i) *
dGAMMA_dEPS(j)
          DYAD2(i,j) = C_hilln_Z(i) *
dK_dEPS_P_R(j)

9 CONTINUE

C
C

DYAD3 = MATMUL(C_hilln, DZ_DEPS)
DDSDDE = C - TreSuK2*DYAD1 + (6.0d0*GAMMA/
HARD_K3) * DYAD2 - (TreSuK2*GAMMA)*DYAD3

DDSDDE_SMALL = DDSDDE

C*****
C
C Trasformazione inversa dei tensori in
C formato pseudovettoriale
C
C

CALL
sub_PSEUDO_VECT_U6(SIGMA,PSEUDO_VECT_
U6)
SIGMA = PSEUDO_VECT_U6

CALL dzero (PSEUDO_VECT_U6, 6)
CALL

```

```

sub_PSEUDO_VECT_U6(EETRIAL_V,PSEUDO_VE
CT_U6)
EETRIAL_V = PSEUDO_VECT_U6

CALL dzero (PSEUDO_VECT_U6, 6)
CALL
sub_PSEUDO_VECT_U6(BACK,PSEUDO_VECT_U
6)
BACK = PSEUDO_VECT_U6

CALL dzero (PSEUDO_VECT_U6, 6)
CALL
sub_PSEUDO_VECT_U6(EPS_P_TENS,PSEUDO_V
ECT_U6) EPS_P_TENS = PSEUDO_VECT_U6

CALL dzero
(PSEUDO_VECT_U6PSEUDO_VECT_U6, 6)
CALL sub_PSEUDO_T_U(C,PSEUDO_T_U)
C = PSEUDO_T_U

CALL dzero(PSEUDO_T_U, 6)
CALL
sub_PSEUDO_T_U(DDSDDE_SMALL,PSEUDO_T_
U)
DDSDDE_SMALL = PSEUDO_T_U

CALL dzero(PSEUDO_T_U, 6)

C*****
C
C
C=====
C 13: Post-processore per le analisi di
C Large Strain Calcolo dello stress
C=====
C
C

CALL dzero (TT, 9)

TT(1,1) = SIGMA(1)
TT(2,2) = SIGMA(2)
TT(3,3) = SIGMA(3)
TT(1,2) = SIGMA(4)
TT(2,1) = SIGMA(4)
TT(2,3) = SIGMA(5)
TT(3,2) = SIGMA(5)
TT(1,3) = SIGMA(6)
TT(3,1) = SIGMA(6)

C
C
C

```

```

! Definizione del tensore di Mandel, del
! secondo tensore di Piola Kirchhoff
! (simmetrizzato)
C
C

SKW_MANDEL = MATMUL(EETRIAL,TT) -
MATMUL(TT,EETRIAL)

SYM_MANDEL = TT
MANDEL = SKW_MANDEL + SYM_MANDEL

SYM_S = ONE_HALF *
(MATMUL(CE_INV,MANDEL)
+ MATMUL(TRANSDPOSE(MANDEL),CE_INV))

! E' possibile ottenere il tensore di Cauchy
! degli sforzi, che rappresenta anche l'output
! della routine tramite l'operazione di pullback
! del tensore di Piola Kirchhoff, che mappa
! vettori spaziali con altri vettori spaziali

```

```
CALL dzero (SYM_S_PU, 9)
```

```

DO i = 1, 3
    DO j = 1, 3
        DO k = 1, 3
            DO l = 1, 3
                SYM_S_PU(i,j)=
                SYM_S_PU(i,j) +
                SYM_S(k,l) * FETRIAL(i,k)
                * FETRIAL(j,l)
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO

```

```

C
C

```

```

STRESS_LARGE(1) = SYM_S_PU(1,1)
STRESS_LARGE(2) = SYM_S_PU(2,2)
STRESS_LARGE(3) = SYM_S_PU(3,3)
STRESS_LARGE(4) = SYM_S_PU(1,2)
STRESS_LARGE(5) = SYM_S_PU(2,3)
STRESS_LARGE(6) = SYM_S_PU(1,3)

```

```

C
C

```

```
CALL MATRIX_DET(FTAU,MAT_DETGRAD)
```

```

C
C

```

```

! La routine "MATRIX_DET" è stata scritta per
! eseguire il calcolo del determinante di
! tensori del secondo ordine scritto come
! matrici 3x3

```

```

C
C

```

```

STRESS_LARGE = STRESS_LARGE /
MAT_DETGRAD

```

```
C
```

```
C=====
```

```

C 14: Post-processore per le analisi di
C Large Strain: Calcolo del gradiente
C plastico

```

```
C=====
```

```

C
C

```

```

C Conversione della parte plastica della def.
C in forma tensoriale

```

```

C
C

```

```
CALL ZEROM(EPS_P_TENS_M)
```

```

EPS_P_TENS_M(1,1) = EPS_P_TENS(1)
EPS_P_TENS_M(2,2) = EPS_P_TENS(2)
EPS_P_TENS_M(3,3) = EPS_P_TENS(3)

```

```

EPS_P_TENS_M(1,2) = EPS_P_TENS(4)
EPS_P_TENS_M(2,1) = EPS_P_TENS(4)
EPS_P_TENS_M(2,3) = EPS_P_TENS(5)
EPS_P_TENS_M(3,2) = EPS_P_TENS(5)
EPS_P_TENS_M(1,3) = EPS_P_TENS(6)
EPS_P_TENS_M(3,1) = EPS_P_TENS(6)

```

```

C
C

```

```
STRESS = STRESS_LARGE
```

```

C
C

```

```
CALL ZEROM(EPS_P_TENS_M_EXP)
```

```
CALL TENSOR_EXP(3,EPS_P_TENS_M,
EPS_P_TENS_M_EXP)
```

```

C
C

```

! La routine "TENSOR_EXP" è stata scritta
 ! per automatizzare la matematica che si cela
 ! dietro alla procedura di elevamento a
 ! potenza di un tensore

C
 C
 C

CALL MATRIX_DET(EPS_P_TENS_M_EXP,T1)

EPS_P_TENS_M_EXP = EPS_P_TENS_M_EXP /
 (T1**ONE_THIRD)

FPTINV = MATMUL(FPTINV,EPS_P_TENS_M_EXP)

C
 C

C

C=====

C 15: Update delle State Variable

C=====

C
 C

STATEV(1) = FPTINV(1,1)
 STATEV(2) = FPTINV(1,2)
 STATEV(3) = FPTINV(1,3)
 STATEV(4) = FPTINV(2,1)
 STATEV(5) = FPTINV(2,2)
 STATEV(6) = FPTINV(2,3)
 STATEV(7) = FPTINV(3,1)
 STATEV(8) = FPTINV(3,2)
 STATEV(9) = FPTINV(3,3)

CALL AB_BM_convert(STRESS)

C

C=====

C 16: Calcolo della matrice tangente per le

C grandi deformazioni

C=====

C
 C

CALL dzero(DDSDDE, 36)

CALL LARGE_DDSDDE(6,EIGENVA,EIGENVE,TT,
 DDSDDE_SMALL,MANDEL, CE_INV,DDSDDE,
 1,,3,iadopt)

CALL PULLP(6,FETRIAL,DDSDDE,
 LARGE_DDSDDE_TRIAL)

CALL dzero(DDSDDE, 36)
 DDSDDE = DDSDDE_TRIAL

DDSDDE = DDSDDE / DETGRAD

RETURN
 END

4.3.2 Risultati e confronti numerici

Dopo aver discusso e spiegato in dettaglio l'implementazione della routine, in questa sezione conclusiva della parte scientifica del lavoro se ne è voluta prima validare l'operato e poi testare la sua efficacia tramite delle particolari simulazioni numeriche eseguite con il software ABAQUS. Per far questo, una campagna di analisi è stata pianificata tramite l'esecuzione di alcune prove con obiettivi molto diversi:

Inizialmente un semplice blocco composto da pochi elementi (12 per l'esattezza) riportato in figura 5 è stato utilizzato per verificare che il modello nel caso di piccole e grandi deformazioni. Quando i parametri del materiale espressi nelle tre direzioni principali sono coincidenti, identificando di fatto un solido isotropo, il criterio di snervamento e l'integrazione degli sforzi devono coincidere con il caso isotropo del criterio di Von Mises, come evidente dalla relazione 3.6.4 e 3.6.5.

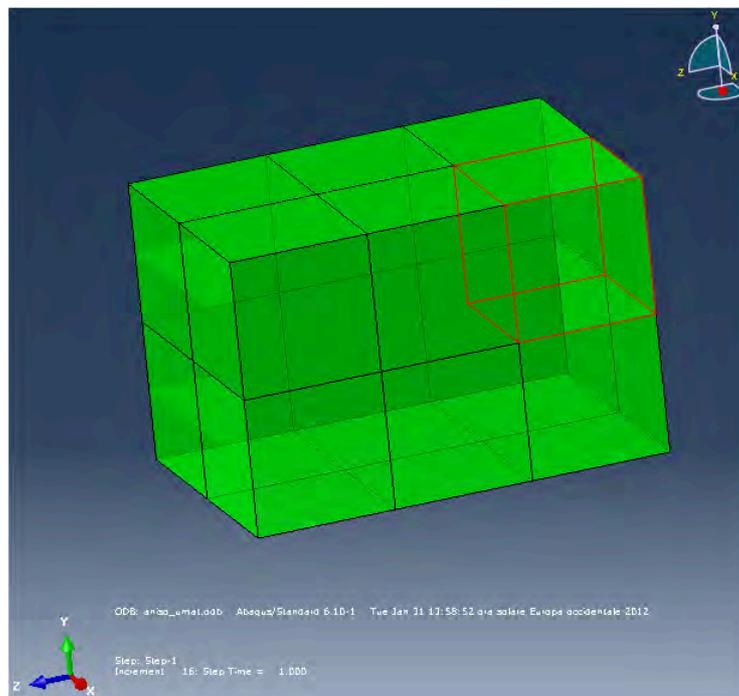


Figura 5 - Modello FEM utilizzato per la validazione della routine nel caso isotropo

Il parallelepipedo è stato vincolato sul lato sinistro con un incastro e caricato con uno spostamento imposto per ottenere diverse elongazioni spaziando dal caso small (pochi punti percentuali di allungamento) al caso large strain (nell'ordine delle decine di punti percentuali). Si è poi proceduto comparando le risposte fornite dalla routine e dal calcolo standard con il materiale elasto-plastico standard del software ABAQUS con il criterio di Von mises.

I parametri adottati nelle simulazioni sono riportati in tabella 1 e, come è evidente, mirano alla definizione di un solido perfettamente isotropo che segue il criterio di Von Mises 3.2.16-18.

Tabella 1 - Parametri materiale, caso di verifica isotropo.

E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
200 [GPa]	200 [GPa]	200 [GPa]	0.3	0.3	0.3	60 [GPa]
G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Yr_{12}}$	$\sigma_{Yr_{23}}$
60 [GPa]	60 [GPa]	200 [MPa]	200 [MPa]	200 [MPa]	200 [MPa]	80 [MPa]
$\sigma_{Yr_{31}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	550 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

Il modello, come già anticipato precedentemente, è stato realizzato con 12, elementi strutturali isoparametrici C3D20R [83] a 20 nodi con integrazione ridotta ed interpolazione quadratica. In figura 6 e 7 sono riportate le sollecitazioni equivalenti di von Mises per i due modelli, mentre in figura 8 e 9 i valori di deformazione plastica ottenuti dal calcolo dei due modelli.

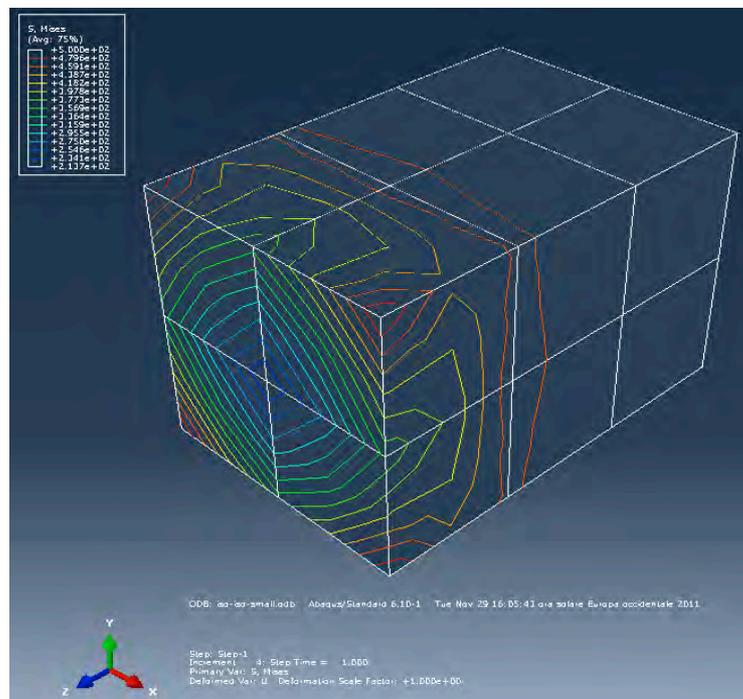


Figura 6 - Sollecitazioni equivalenti di Von Mises, Caso isotropo - UMAT

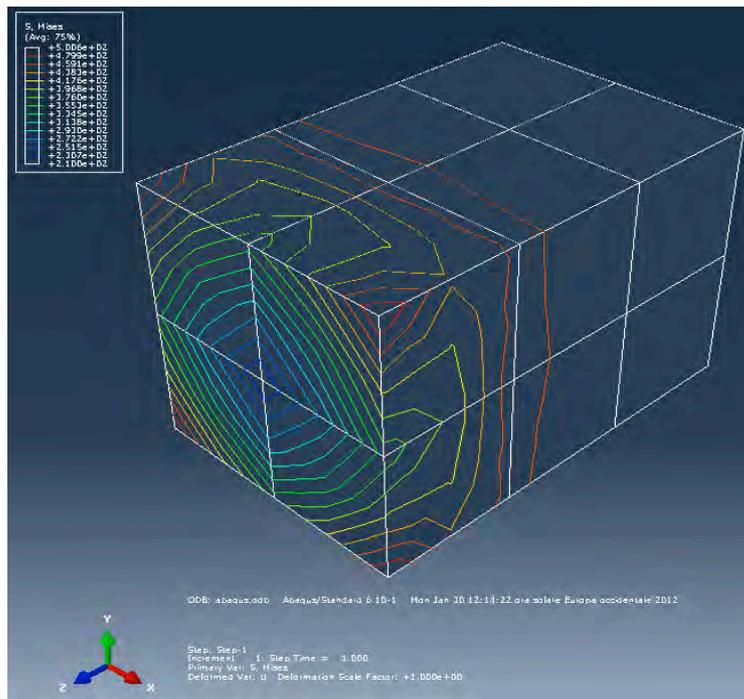


Figura 7 - Sollecitazioni equivalenti di Von Mises, Caso isotropo - ABAQUS Standard Explicit

Per realizzare le due simulazioni in modo coerente la funzione di incrudimento utilizzata nella UMAT è stata utilizzata anche nella parte plastica del modello simulato con le routine standard di ABAQUS utilizzando la *keyword* *plasticity e fornendo al programma la corrispondente curva sollecitazione - deformazione plastica.

I risultati sugli sforzi confermano quanto atteso: Il modello, quando l'esame ricade su solidi isotropi ha un comportamento equivalente al modello di Von Mises e questo è dimostrabile sia dalla distribuzione qualitativa delle sollecitazioni di von Mises sia dai valori numerici estremamente prossimi (ci sono pochi punti percentuali di differenza sulle due sollecitazioni).

La routine UMAT in questo caso è stata leggermente adattata per verificare la distribuzione delle deformazioni plastiche equivalenti, utilizzando la definizione sfruttata dall'output di ABAQUS che per il modello di Von Mises risulta essere:

$$\dot{\epsilon}_{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{pl} : \dot{\epsilon}_{pl}}$$

I risultati qualitativi e quantitativi sono riportati in figura 8 e 9 invece sono riportate le deformazioni e mostrano, in modo del tutto analogo al calcolo degli sforzi equivalenti, una coincidenza tale da consentire di affermare che i modelli per i casi testati si comportano in modo del tutto equivalente.

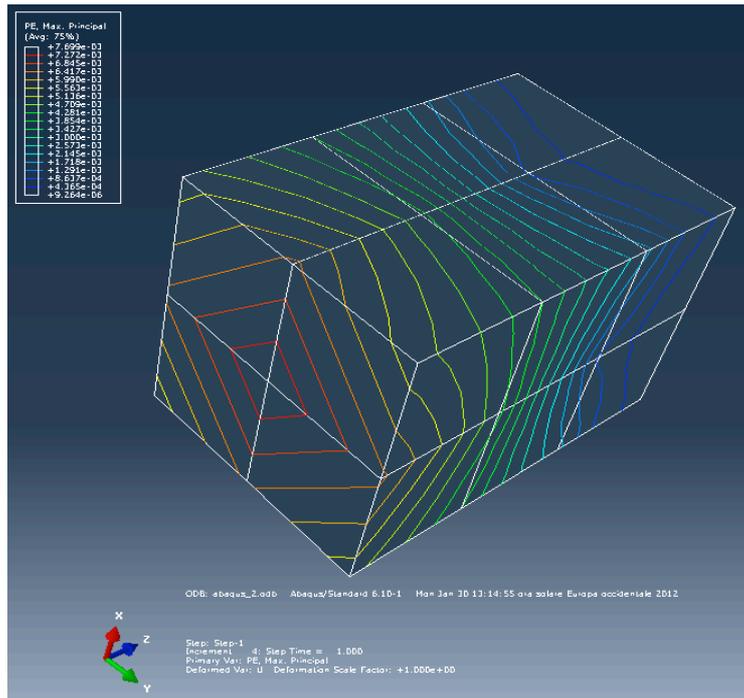


Figura 8 - Distribuzione delle def. plastiche, Caso isotropo - ABAQUS Standard Explicit

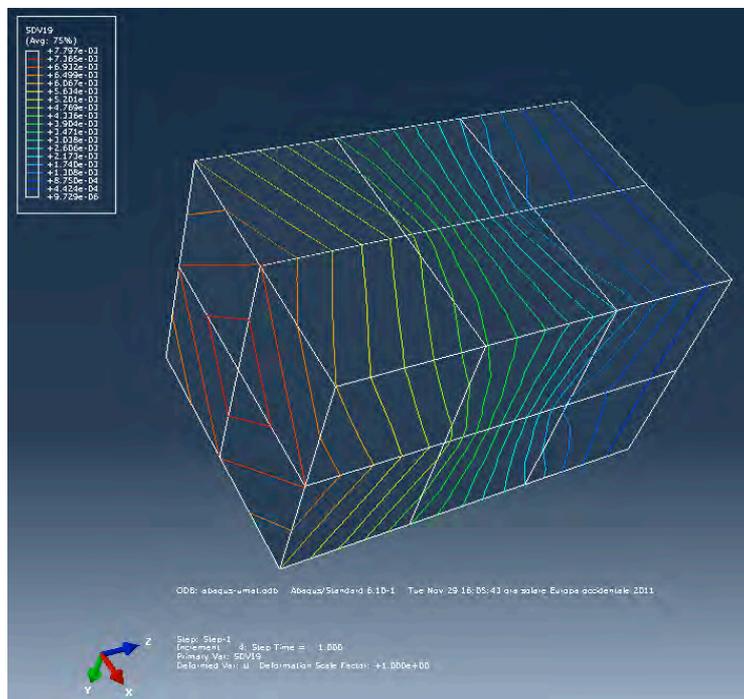


Figura 9 - Distribuzione delle def. plastiche, Caso isotropo - UMAT

4.3.2.1 Analisi qualitativa dell'anisotropia

Come secondo step si è valutato il comportamento della routine al variare delle costanti elastiche del materiale nelle tre direzioni principali considerate.

Utilizzando un modello simile nella forma a quello presentato in figura 1, ma con una mesh rifinita composta da un maggior numero di elementi (96 per l'esattezza) di tipo C3D20R, tramite alcuni set di costanti elastiche si sono voluti simulare diversi materiali anisotropi e verificare che la routine al cambiare dei parametri del materiale nelle tre direzioni principali risponda in modo coerente rispetto alla variazione data.

I set di parametri adottati nei quattro diversi trial numeri è riportato nelle tabelle 2-5 mentre nelle figure 10-17 si è voluto mettere al centro il risultato dell'integrazione degli sforzi equivalenti di Von Mises per tutti i modelli testati.

Tabella 2 - Parametri materiale, analisi qualitativa dell'anisotropia. Materiali 1, 2

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
Materiale 1	200 [GPa]	100 [GPa]	100 [GPa]	0.3	0.2	0.15	60 [GPa]
Materiale 2	200 [GPa]	100 [GPa]	150 [GPa]	0.1	0.2	0.3	80 [GPa]
	G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Y_{r_{12}}}$	$\sigma_{Y_{r_{23}}}$
Materiale 1	40 [GPa]	60 [GPa]	200 [MPa]	40 [MPa]	40 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
Materiale 2	80 [GPa]	41 [GPa]	200 [MPa]	40 [MPa]	40 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
	$\sigma_{Y_{r_{31}}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
Materiale 1	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	500 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0
Materiale 2	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	400 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

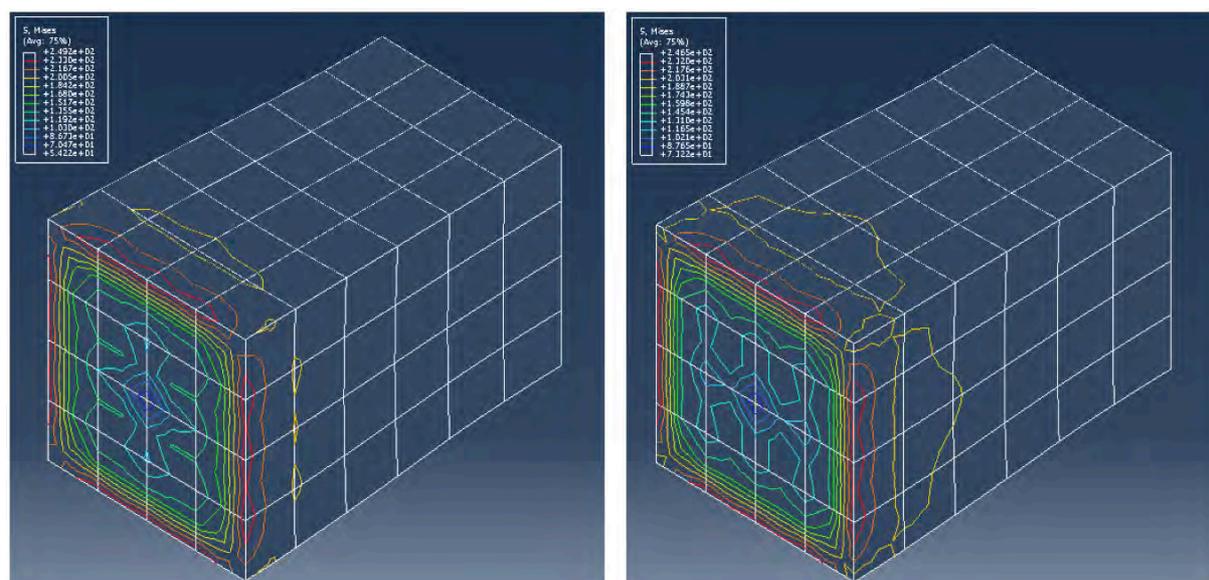


Figura 10, 11 - Analisi qualitativa dell'anisotropia. Distribuzione degli sforzi di Von Mises - Materiale 1, 2

Tabella 3 - Parametri materiale, analisi qualitativa dell'anisotropia. Materiali 3, 4

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
Materiale 3	200 [GPa]	200 [GPa]	200 [GPa]	0.3	0.3	0.3	80 [GPa]
Materiale 4	100 [GPa]	200 [GPa]	200 [GPa]	0.1	0.1	0.3	80 [GPa]
	G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Y_{r12}}$	$\sigma_{Y_{r23}}$
Materiale 3	80 [GPa]	80 [GPa]	200 [MPa]	100 [MPa]	100 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
Materiale 4	80 [GPa]	41 [GPa]	200 [MPa]	40 [MPa]	40 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
	$\sigma_{Y_{r31}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
Materiale 3	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	400 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0
Materiale 4	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	500 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

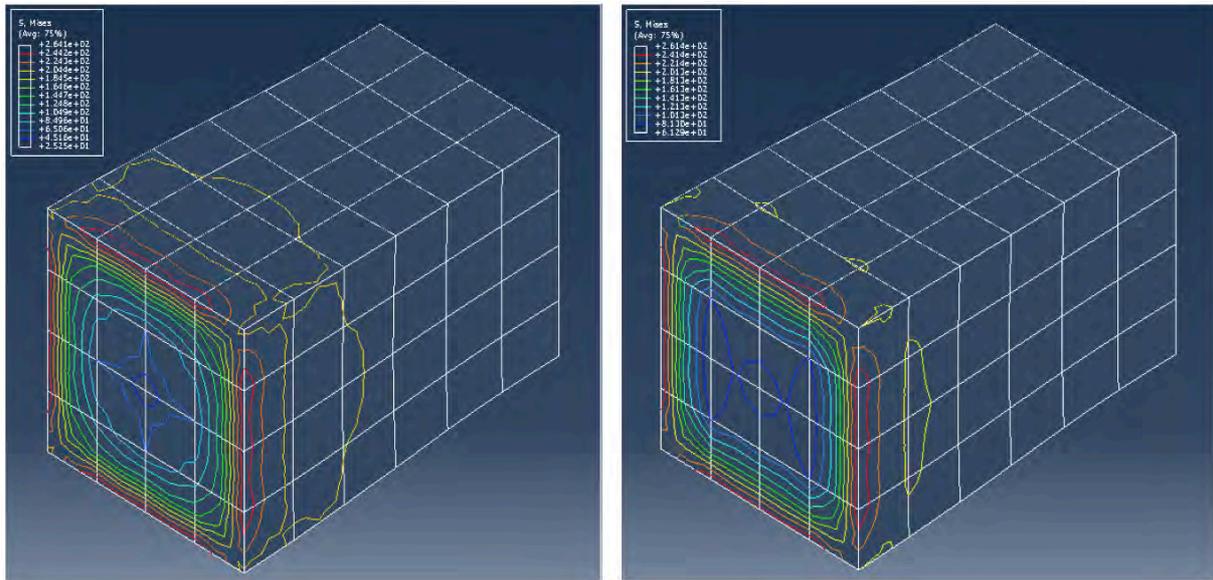


Figura 12, 13 - Analisi qualitativa dell'anisotropia. Distribuzione degli sforzi di Von Mises - Materiale 3, 4

Tabella 4 - Parametri materiale, analisi qualitativa dell'anisotropia. Materiali 5, 6

		E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
Materiale 5	100 [GPa]	200 [GPa]	200 [GPa]	0.3	0.3	0.1	80 [GPa]
Materiale 6	80 [GPa]	80 [GPa]	200 [GPa]	0.2	0.2	0.3	80 [GPa]
	G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Y_{r12}}$	$\sigma_{Y_{r23}}$
Materiale 5	80 [GPa]	41 [GPa]	200 [MPa]	100 [MPa]	100 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
Materiale 6	80 [GPa]	40 [GPa]	100 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
	$\sigma_{Y_{r31}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
Materiale 5	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	400 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0
Materiale 6	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	500 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

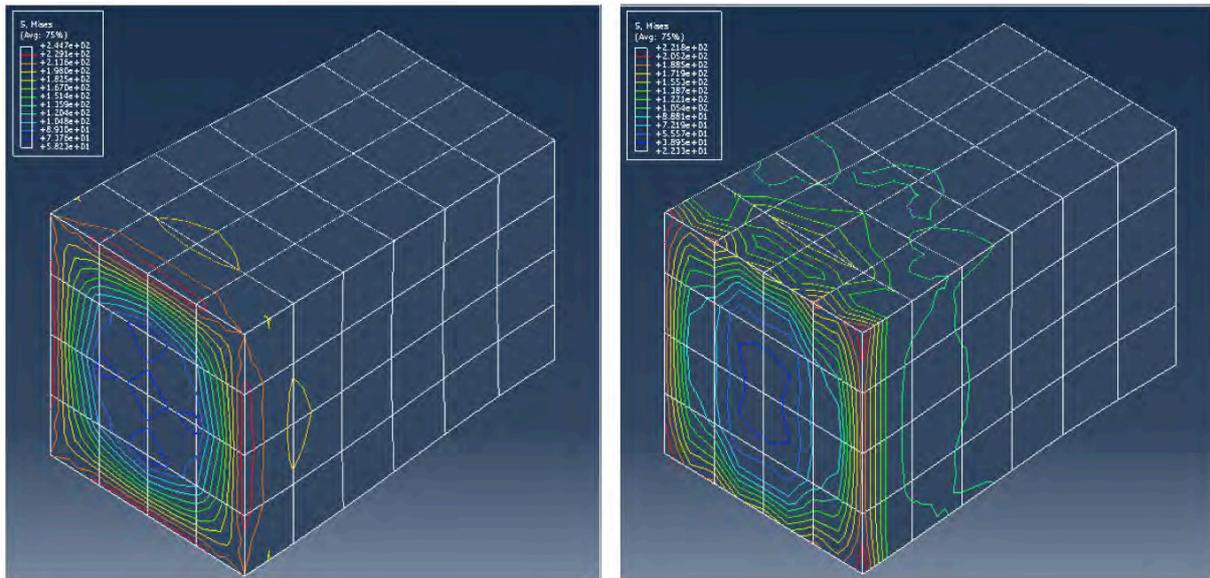


Figura 14, 15 - Analisi qualitativa dell'anisotropia. Distribuzione degli sforzi di Von Mises - Materiale 5, 6

La numerosa casistica presentata sequenza di immagini ha come intento il mostrare la capacità del modello di descrivere delle configurazioni della struttura che mediante il caso isotropo non sarebbero ammissibili.

I vari set di parametri utilizzati nelle analisi non hanno perciò particolare attinenza con delle situazioni fisiche o delle procedure di identificazione eseguite su materiali reali ma piuttosto tramite la variazione delle proprietà del materiale nelle tre direzioni principali si vuole mettere in evidenza da un punto di vista strettamente qualitativo delle differenze notevoli di comportamento. Partendo quindi dai valori suggeriti in alcuni lavori del settore [78-80] sono state testate delle nuove configurazioni in modo da poter valutare efficacemente i risultati forniti dalla routine e la sua capacità a simulare diversi stati di anisotropia.

Si prenda in esame il caso quasi isotropo (materiale 3, figura 12): qui l'unico grado di anisotropia è stato associato ad una sollecitazione di snervamento maggiore, dovuta verosimilmente a dei processi di hardening, nella direzione longitudinale. Comparando questo agli altri casi (materiali 1-2, 4-6) in cui le variazioni della matrice elastiche sono state apportate in maniera proporzionale fra le tre direzioni ed espresse in modo tale da conferire forti caratteristiche direzionali al materiale utilizzato, si notano notevoli differenze per quanto riguarda la distribuzione degli sforzi equivalenti e, ancora più importante, della deformata della struttura.

Come verrà specificato nelle due prossime sezioni, uno dei maggiori limiti del modello isotropo è proprio l'incapacità, non considerando la direzionalità della proprietà del materiale di riuscire ad approssimare delle deformate non simmetriche rispetto al piano di sezione del pezzo testato.

In questo senso assume una importanza notevole il risultato ottenuto tramite il materiale 7 ed 8 in cui diminuendo notevolmente le caratteristiche di rigidità lungo una delle tre direzioni principali è possibile ottenere delle deformate (figura 16 e 17) più pronunciate sui piani in cui si aspetta una resistenza minore del materiale.

In conclusione dall'analisi di tutti i materiali simulati tramite i set di parametri presentati nelle tabelle 1-5 e delle distribuzioni degli sforzi lungo la sezione del modello FEM è stato possibile valutare la capacità della routine di simulare vari stati di anisotropia del materiale ed, in particolare, consentire delle deformate non ammissibili nel caso isotropo in cui tutta l'analisi prescinde dalla diversità delle proprietà del materiale lungo le sue direzioni principali. I modelli di figura 16 e 17 infatti (riportati con un fattore di scala doppio nella configurazione deformata per enfatizzare la variazione della sezione) mettono in luce che utilizzando dei set di parametri ortogonali per quanto riguarda le due direzioni trasversali del materiale è possibile ottenere delle strizioni del materiale molto pronunciate e con delle simmetrie riferite ad un unico piano.

questo fatto trova una corrispondenza diretta con le sezioni ellittiche ottenute durante le prove di trazione di provini originariamente a sezione circolare come ben mostrato in [84]

Questo risultato numerico apre alla possibilità di utilizzare questo modello e codice di calcolo per la simulazione di particolari strutture e materiali, come ad esempio quelli frequentemente utilizzati nelle strutture per il trasporto gas ed in generale impiegate nel settore offshore.

Tabella 5 - Parametri materiale, analisi qualitativa dell'anisotropia. Materiali 7, 8

	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
Materiale 7	200 [GPa]	40 [GPa]	200 [GPa]	0.15	0.15	0.3	80 [GPa]
Materiale 8	200 [GPa]	200 [GPa]	40 [GPa]	0.15	0.3	0.15	80 [GPa]
	G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Yr_{12}}$	$\sigma_{Yr_{23}}$
Materiale 7	80 [GPa]	40 [GPa]	200 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
Materiale 8	80 [GPa]	41 [GPa]	200 [MPa]	200 [MPa]	100 [MPa]	80 [MPa]	80 [MPa]
	$\sigma_{Yr_{31}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
Materiale 7	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	400 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0
Materiale 8	80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	400 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

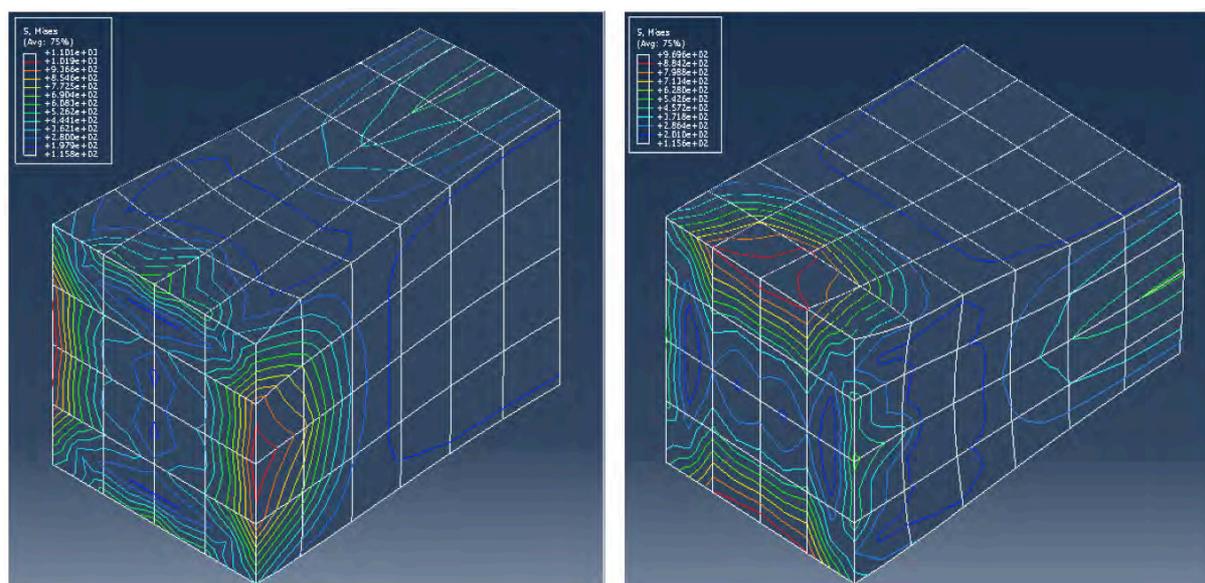


Figura 16 , 17 - Analisi qualitativa dell'anisotropia. Distribuzione degli sforzi di Von Mises - Materiale 7, 8

4.3.2.2 Analisi comparativa: Flangia circolare

Per continuare il testing della routine, dal modello semplice presentato nella sezione 4.3.2.1 si vuole ora verificare i risultati ottenuti dal codice comparandoli con alcune evidenze numerico-sperimentali presentate in letteratura [78-80]. La routine è stata usata per simulare una flangia formata da una corona circolare, caricata nella superficie interna con uno spostamento imposto come mostrato in figura 18a. Nella figura 18b viene invece riportata la discretizzazione utilizzata composta da 144 elementi C3D20R (gli stessi utilizzati nel testing riportato nelle sezioni precedenti del capitolo).ù

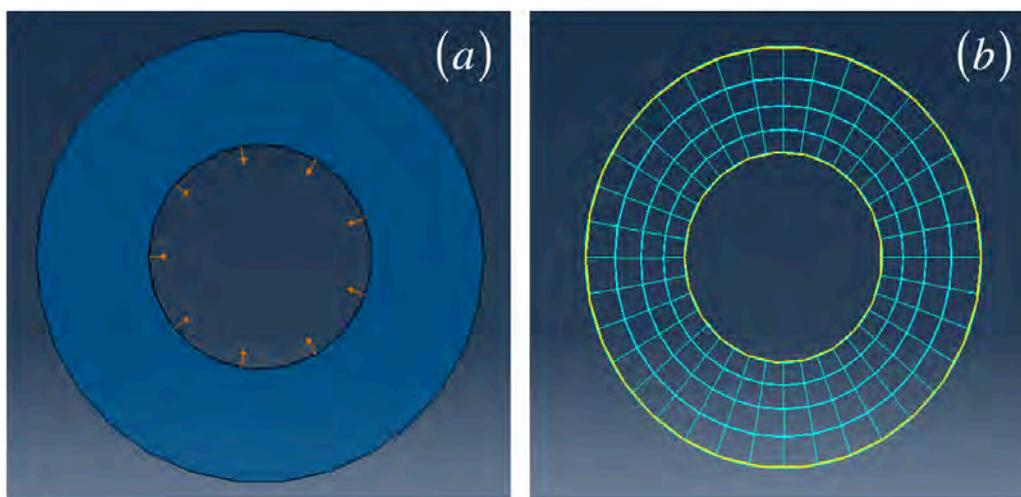


Figura 18 - Boundary conditions applicate al disco (a). Mesh utilizzata nelle analisi (b)

La flangia è formata da una corona circolare il cui raggio interno è pari a 200 [mm] e quello esterno è di 400 [mm] con uno spessore uniforme di 10 [mm]. In alcuni lavori del settore il caso è già stato affrontato in modo soddisfacente ed in figura 19 è raffigurata la distribuzione delle *effective plastic strain* come indicato in [80].

Si può vedere che nel percorso di plasticizzazione il provino, caratterizzato dal set di parametri riportato nella tabella 6 tenda a localizzare in particolari zone della sezione in cui è associato il valore massimo di deformazione plastica equivalente.

In questo lavoro si è voluta prima proporre l'analisi isotropa della stessa struttura (per evidenziare ancora una volta la differenza della determinazione della deformata) e poi si è voluto riprodurre questo risultato come validazione della routine e della procedura di calcolo implementata. Il calcolo isotropo per la stessa flangia utilizzando le stesse costanti del materiale suggerite in [80] per tutte e tre le direzioni principali del materiale per la fase elastica fornisce il risultato prevedibile: essendo una struttura simmetrica caricata simmetricamente, la deformata rimane circolare portando una riduzione uniforme della corona circolare che compone la flangia.

Questo non è vero nel caso anisotropo mostrato in figura 19 in cui i diversi rapporti fra le rigidità, le deformazioni ed i valori di riferimento dello snervamento nelle tre direzioni principali guidano il materiale verso un comportamento radicalmente diverso, generando stati di sollecitazione localizzati su direzioni ortogonali.

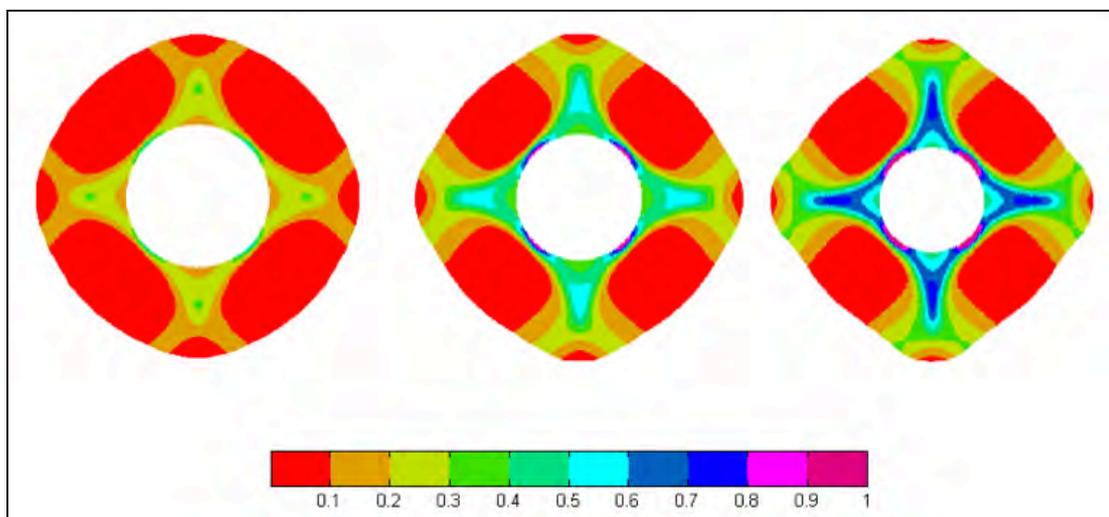


Figura 18 - Effective Plastic Strain per uno spostamento interno condotto fra 25-75 [mm],
(K.J. Bathe, F.J. Montans, M. Caminero, [80])

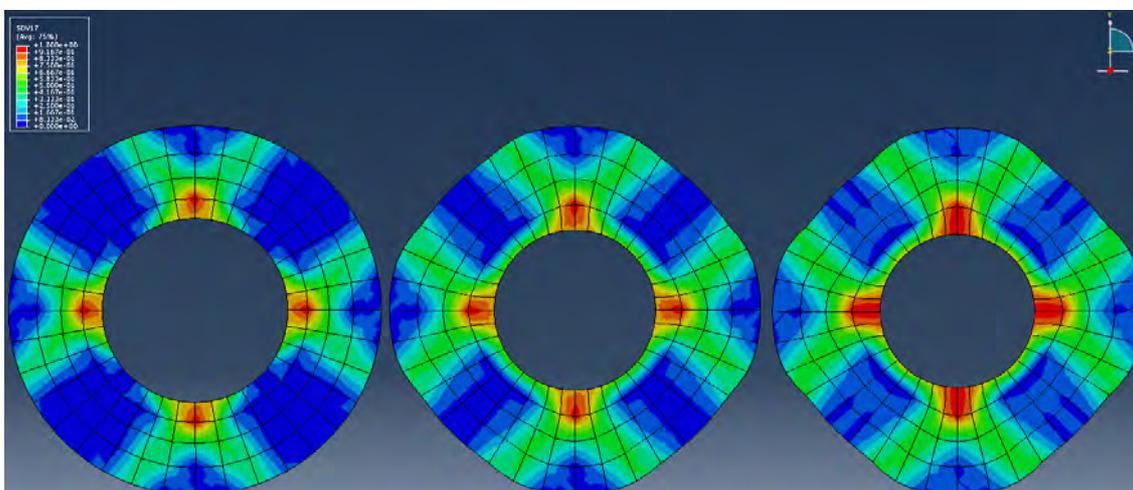


Figura 19 - Effective Plastic Strain per uno spostamento interno condotto fra 20 - 45 [mm]

Risultati analoghi sono stati ottenuti utilizzando la routine UMAT introdotta nella sezione 4.3.1 per l'implementazione del modello B-M. (figura 20, la distribuzione degli sforzi è riportata con una scala di colori diversa rispetto alla figura 19) per uno spostamento della sezione interna compreso fra 20 e 45 [mm].

Tabella 1 - Parametri materiale, caso di verifica isotropo.

E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	G_{12}
200 [GPa]	100 [GPa]	100 [GPa]	0.3	0.2	0.15	60 [GPa]
G_{23}	G_{31}	σ_{Y_1}	σ_{Y_2}	σ_{Y_3}	$\sigma_{Yr_{12}}$	$\sigma_{Yr_{23}}$
40 [GPa]	60 [GPa]	200 [MPa]	40 [MPa]	40 [MPa]	200 [MPa]	80 [MPa]
$\sigma_{Yr_{31}}$	\bar{H}	K_0	K_∞	σ_{ref}	δ	m
80 [MPa]	100 [MPa]	200 [MPa]	550 [MPa]	200 [MPa]	16,93	0.0

Da una analisi comparativa delle figure 19 e 20 si può notare che la deformata della struttura ed i valori delle deformazioni, così come i punti di localizzazione sono congruenti. Le due immagini sono state riportate con una scala diversa di colori, così come presentate in [78, 80] ma analizzando i valori nelle diverse zone della sezione si è possibile verificare anche la concordanza numerica.

4.3.2.3 Simulazione di provini circolari intagliati: Acciai anisotropi da pipeline

Nei paragrafi 4.3.2.1 e 4.3.2.2 sono state svolte delle prove numeriche per validare l'efficacia della routine sulla base di considerazioni teoriche e analisi qualitative. In questo paragrafo conclusivo si vogliono invece esaminare, con gli strumenti introdotti nel corso del lavoro, delle evidenze sperimentali ottenute presso i laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università degli Studi di Cagliari su alcuni provini ricavati da acciai utilizzati in strutture tubolari offshore. Si considerino la serie di immagini 20-23 che raffigura delle prove di trazione eseguite su dei provini di acciaio a sezione circolare lisci, RNB2 e RNB10 (le geometrie sono riportate nella figura 24). Tutti questi provini, realizzati con diverse classi di acciai e forme hanno esibito durante i test meccanici di trazione monoassiale delle caratteristiche anisotrope.



Figura 20, 21 - Superfici di frattura di due provini. RNB10 (sinistra) ed RNB2 (destra)

La testimonianza di questo fatto è mostrata dalla sezione (figure 20 e 21 per le geometrie RNB10 ed RNB2 rispettivamente e figure 22 e 23 per il caso non intagliato) non circolare ma ellittica con cui è avvenuta la strizione fino alla rottura. Questo fatto mette in evidenza una disuguaglianza di comportamento nelle diverse direzioni del materiale e di conseguenza è una chiara evidenza della diversità delle proprietà elastiche in funzione della direzione considerata.



Figura 22 - Necking di un provino a sezione circolare. Post-mortem dopo una prova di trazione monoassiale



Figura 23 - Post-mortem con evidenza del necking ellittico in un provino a sezione circolare.

Nelle figure 20-23, prese nella configurazione post-mortem di provini circolari lisci ed intagliati si può notare in modo ancora più marcato la forte strizione e la forma ellittica della superficie di frattura finale. In particolare in figura 23 il provino è arrivato a rottura non fratturandosi esternamente, mostrando in modo molto chiaro buone caratteristiche di duttilità durante il danneggiamento, concludendo in una frattura di tipo coppa-cono.

La modellazione di simili strutture non risulta essere semplice, anche utilizzando gli strumenti introdotti nei precedenti capitoli: Infatti, notevoli sforzi sperimentali devono essere eseguiti per la determinazione delle costanti elastiche del materiale. A causa dell'anisotropia non è più sufficiente una prova di trazione monoassiale ma servono più test, in cui i provini devono essere ricavati con diverse angolazioni nel pezzo di riferimento (solitamente vengono usati 3 provini ricavati sulle direzioni a 0°, 45° e 90° del materiale) ottenendo i cosiddetti *R-values* o coefficienti di Lankford [74-79, 85] tramite cui è possibile esplicitare le caratteristiche elasto-plastiche del materiale in esame. Per ridurre la mole di lavoro sperimentale alcuni autori [84] hanno provato a mettere in relazione la forma finale della superficie di frattura con le caratteristiche elastiche del materiale. In particolare, utilizzando la silhouetting con due telecamere è possibile determinare dimensione dell'ellisse durante la plasticità e tramite il rapporto fra gli assi principali della forma quadratica trovata, ricavare il rapporto fra le proprietà

elastiche del materiale [84]. Non avendo potuto ripetere le procedure di calibrazione per il modello scelto ed avendo utilizzato delle classi di materiali molto simili a quelli

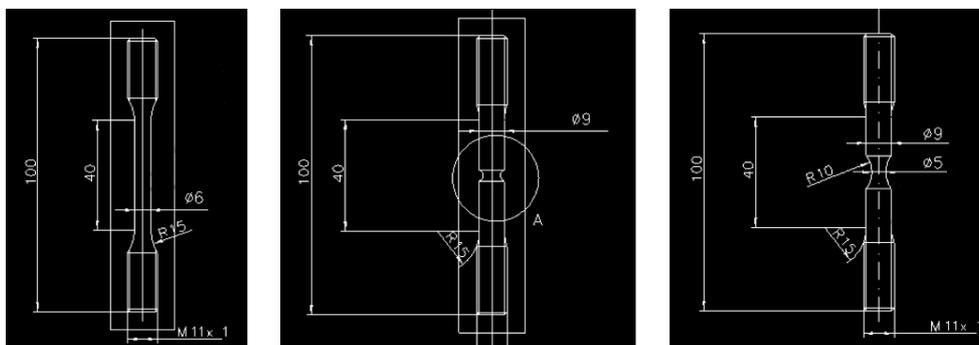


Figura 24 - Dettaglio delle geometrie dei provini mostrati nelle figure 20, 22. Provino liscio a sezione circolare (sinistra) provino RNB2 (centro) e RNB10 (destra)

usati in [84] sono state eseguite delle simulazioni numeriche con ABAQUS sfruttando la umat scritta per implementare il modello Bathe-Montans per verificare che questo modello, quando calibrato con gli opportuni parametri elastici, sia in grado di prevedere questo tipo di anisotropia generando una superficie di frattura e strizione ellittica e non più circolare come nel caso isotropo.

Il risultato mostrato in figura 25 mette in luce la grande similarità fra la deformata predetta dal modello e quella ricavata sperimentalmente.

Il modello è stato testato su una geometria di tipo RNB2 con una mesh costituita da 10215 elementi di tipo C3D20R vincolando in mezzeria il provino con delle condizioni di simmetria e muovendo l'afferraggio per simulare un test monoassiale di trazione

I risultati sebbene caratterizzati da un approccio qualitativo sono favorevoli al metodo risolutivo implementato in quanto indicano chiaramente che previa corretta caratterizzazione questi fenomeni sono simulabili tramite il modello anisotropo di Bathe-Montans. Questi risultati non possono tuttavia ritenersi conclusivi e una futura strada per perfezionare il lavoro prevedere delle prove incrociate per valutare l'accuratezza del modello nel descrivere la superficie di frattura e nuove metodologie per la caratterizzazione del modello limitando la parte sperimentale.

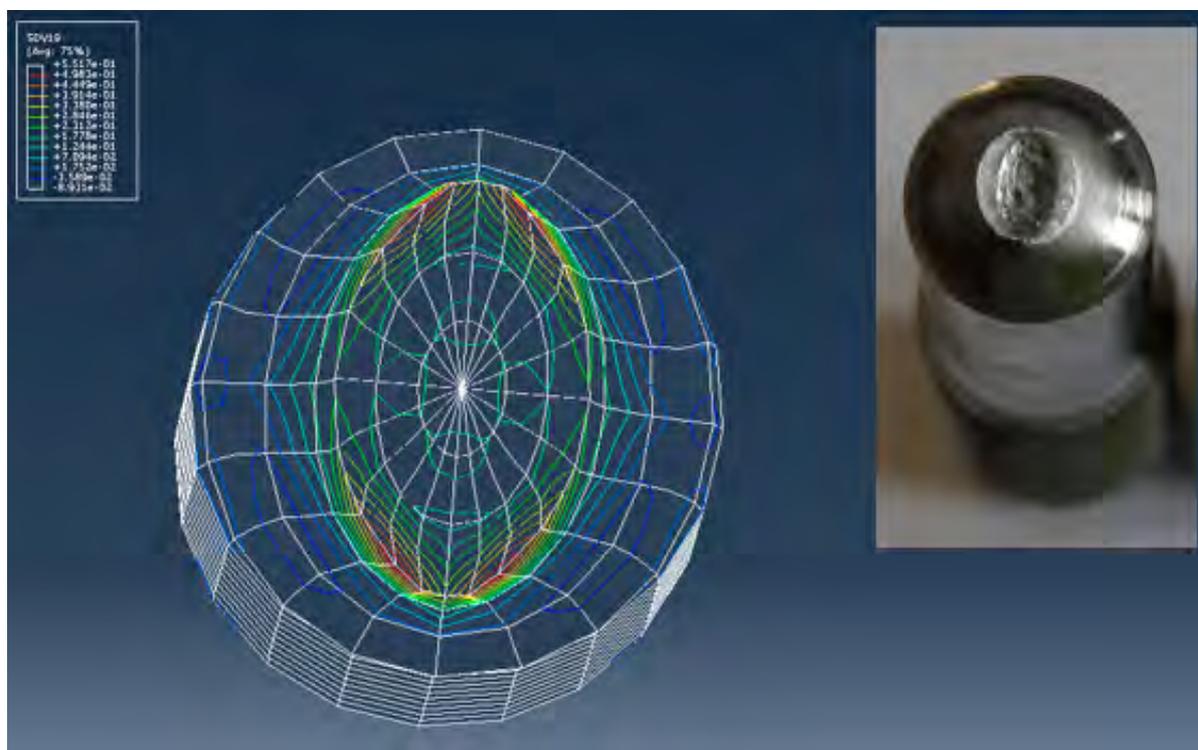


Figura 25 - Simulazione della frattura in acciai anisotropi con geometria RNB2. Distribuzione delle deformazioni plastiche equivalenti.

Conclusioni

Le non linearità giocano un ruolo molto importante nella evoluzione delle caratteristiche dei materiali duttili durante tutto il processo di deformazione. L'inclusione di questi fattori nelle simulazioni tramite modelli matematici è un aspetto fondamentale al fine di ridurre il gap fra i risultati sperimentali e le previsioni teoriche, che condiziona la progettazione in presenza di stati di sforzo o di deformazione critici.

Dalle procedure numeriche e analitiche che sono state trattate in questo lavoro si può notare che l'avvicinare i modelli matematici verso la "realtà" fisica significa complicarne le formulazioni aumentando la mole computazionale necessaria man mano che, eliminando le semplificazioni fatte, l'analisi diventa sempre più comprensiva della globalità del fenomeno.

La tesi, pur tralasciando numerosi altri effetti si è concentrata su due tematiche fondamentali come il danneggiamento e la plasticità anisotropa in regime di grandi deformazioni.

Nei materiali duttili il fattore accomunante di questi due effetti è proprio la loro commistione durante il processo di plasticità, dallo snervamento alla rottura; un legame spesso difficilmente scindibile e da sempre terreno fertile per la ricerca scientifica.

Gli approcci che sono stati usati nello studio sono stati diversi ed i risultati ottenuti hanno un carattere di validità generale e sono significativi per i due fenomeni in esame: Nella prima parte, la comparazione fra il modello di danneggiamento di Lemaitre e quello di Wierzbicki, tramite il riferimento sperimentale costituito delle mappe di spostamento ottenute con la correlazione digitale, ha permesso di identificare un tool molto preciso per la comparazione e la valutazione dell'accuratezza dei singoli modelli.

Partendo da una descrizione teorica è stata pianificata una campagna sperimentale per mettere in luce le discrepanze fra le due soluzioni.

Tramite dei provini caratterizzati da particolari geometrie, progettate accuratamente per generare degli alti sforzi di taglio durante una prova di trazione monoassiale sono stati messi alla prova i due modelli, valutando l'andamento del danneggiamento predetto rispetto a quello sperimentalmente misurato sul campo.

In modo sorprendente si è notato che per alcune famiglie di materiali le criticità inserite nel modello di Wierzbicki-Xue non hanno portato particolari benefici e che anzi il modello di Lemaitre, seppure in modo marginale, ha sempre dimostrato un comportamento globale più preciso anche nelle zone di maggior concentrazione degli sforzi, risultando la miglior scelta fra le due possibili soluzioni analizzate. Nonostante questo il modello di Wierzbicki utilizzato come criterio di frattura in presenza di forti criticità, si è dimostrato molto efficace, fornendo delle previsioni precise riguardo la rottura del pezzo.

Questi risultati però non sono assolutamente da considerarsi conclusivi: il materiale con cui si è condotta la sperimentazione ha un comportamento, in termini di relazione complessiva sforzi-deformazioni, molto particolare. Sebbene la lega AL2024-T351 mostri ottime capacità di sostenere delle deformazioni plastiche il meccanismo con cui si innesca la frattura non è completamente duttile. Il materiale durante il suo percorso di deformazione non deperisce gradualmente ma immagazzinando una cospicua aliquota di energia elastica va a fratturarsi, dopo una fase di plasticizzazione globale, con delle modalità equiparabili ad un caso fragile.

Il lavoro ha inoltre identificato un buon sistema per la valutazione dei risultati generali dei modelli di danneggiamento e nuove e più mirate analisi, coinvolgendo materiali con duttilità più pronunciate e modelli più complessi, possono essere svolte per mettere in luce l'influenza di altri parametri o in generale la loro validità nel descrivere il danneggiamento dei materiali duttili.

La metodologia sperimentale scelta per eseguire il lavoro, la correlazione digitale di immagini, è sicuramente una delle soluzioni più efficaci e promettenti come misura indiretta del danneggiamento. Fra i metodi ottici applicabili a questo problema, la DIC con il suo mix fra misure ottiche ed approssimazione numerica risulta essere un tool perfetto e capace di lavorare in armonia con le analisi FEM, con cui solitamente vengono sviluppate le simulazioni numeriche.

La seconda causa generatrice di non linearità presa in esame è l'anisotropia, sicuramente meglio conosciuta da un punto di vista teorico, le cui implicazioni numeriche per la trattazione analitico-numerica sono molto serie e di non semplice soluzione, specialmente nel caso di grandi deformazioni.

Ponendosi così in una difficile situazione di analisi ci si è chiesti se le notevoli complessità aggiuntive (che si traducono nella determinazione di un numero molto maggiore di costanti ed in relazioni costitutive di natura tensoriale) permettano di simulare numericamente tutte quelle condizioni che sfuggono all'analisi isotropa nel campo delle piccole deformazioni.

I risultati sono stati molto promettenti e mostrano come fin dai casi più elementari, tramite il modello Bathe-Montans, che include anisotropie elasto-plastiche, incrudimento misto e grandi deformazioni, è possibile analizzare casi in cui il materiale e le strutture hanno elevati gradi di anisotropia.

Le simulazioni numeriche presentate nel capitolo 4 condotte su dei modelli composti da pochi elementi, sulla flangia caricata internamente ed infine sulla modellazione di provini reali, per cui sono stati svolti dei test sperimentali presso i laboratori del D.I.Me.Ca., hanno messo in luce che tramite la corretta identificazione delle proprietà anisotrope del materiale è possibile includere degli effetti e delle deformate della struttura che non sono assolutamente trattabili nelle formulazioni di base.

Questo fatto apre la porta all'utilizzo di modelli più complicati ed a nuove tecniche per la determinazione delle costanti elastiche che richiedono sforzi sperimentali notevolmente maggiori poiché rivolte sulle diverse direzioni di anisotropia del materiale.

Una ipotesi forte fatta dal modello Bathe-Montans e considerata valida durante questo lavoro è stata quella di considerare influente la componente plastica dello spin. Includere questo effetto così come individuare procedure sperimentali e relazioni costitutive per la sua corretta caratterizzazione è la naturale evoluzione del proseguimento del lavoro di ricerca.

In ultima analisi questo studio ha messo in luce sull'importanza delle anisotropie e del danneggiamento nelle analisi di large strain, ed ha mostrato come i margini e le miglie da fare in questo campo siano ancora molto ampi e che il costo analitico-numerico e sperimentale richiesto, a volte molto oneroso, per potenziare le capacità descrittive dei modelli, può guidare la progettazione meccanica attraverso l'utilizzo di materiali e strutture ancora inesplorate.

Bibliografia

- [1] J. Chakrabarty. "Applied Plasticity, Second Edition". *Springer*, 2010
- [2] M.A. Meyers, R.W. Armstrong, H.O.K. Kirchner. "Mechanics and Materials. Fundamentals and Linkages". John Wiley & Sons Inc. New York, 1999.
- [3] R.B. Pecherski. "Finite deformation plasticity with strain induced anisotropy and shear banding". *Journal of Materials Processing Technology*, 60: 35-44, 1996.
- [4] M.E. Gurtin, E. Fried, L. Anand. "The Mechanics and Thermodynamics of Continua". *Cambridge University Press*, 2010
- [5] S. Nemat-Nasser. "Plasticity: a treatise on the finite deformation of heterogeneous inelastic materials". *Cambridge University Press*, 2004
- [6] G.E. Dieter. "Mechanical Metallurgy". *McGraw-Hill Book Co. London*, 1988.
- [7] P.R. Guduru, R.P. Singh, G. Ravichandran, A.J. Rosakis. "Dynamic Crack Initiation in Ductile Steels". *Journals of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(10): 1997-2016, 1998.
- [8] F.A. McClintock. "A criterion for ductile fracture by the growth of holes", *Journal of Applied Mechanics* , 35: 363-371, 1968.
- [9] J.R. Rice, D.M. Tracy. "On ductile enlargement of voids in triaxial stress fields", *Journal of Mechanics and Physics of Solids* , 17: 210-217, 1969.
- [10] A.L. Gurson. "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield Criteria and flow rules for porous ductile media", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99: 2-15, 1977.
- [11] V. Tvegaard, A. Needleman. "Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar", *Engineering Fracture Mechanics*, 32: 157-169, 1984.
- [12] G.R. Johnson, W. H. Cook. "Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures", *Engineering Fracture Mechanics* , 21: 31-48, 1985.
- [13] V. Tvegaard. "Material failure by void growth to coalescence". *Advances in applied Mechanics*, 27:83-151, 1989.

- [14] J. Lemaitre, R. Desmorat. "Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures". *Springer-Verlag, Berlin*, 2005.
- [15] J. Lemaitre. "A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107: 83-90, 1985.
- [16] J. Lemaitre and J. Dufailly. "Damage measurements". *Engineering Fracture Mechanics*, 28(5):643-661, 1987.
- [17] J. Lemaitre, R. Desmorat, and M. Sauzay. "Anisotropic damage law of evolution". *European Journal of Mechanics and Solids*, 19(2):187-208, 2000.
- [18] J. Lemaitre, H. Lippmann. "A course on damage mechanics", volume 2. *Springer Berlin etc*, 1996.
- [19] J. Lemaitre. "Handbook of materials behavior models". *Academic press*, 2001.
- [20] J. Lemaitre, J. Dufailly. "Modelisation et identification de l'endommagement plastique des metaux". *Congres Francaise de Mecanique*, Grenoble, France, 1977.
- [21] J. L. Chaboche. "Sur l'utilisation des variables d'etat interne pour la description de la viscoplasticite cyclique avec endommagement. In Problemes Non Lineaires de Mecanique", *Symposium Franco-Polonais de Rheologie et Mecanique*, pages 137-159, Cracow, 1977.
- [22] J.L. Chaboche. "Continuum damage mechanics: Present state and future trends", *Nuclear Engineering and Design*, 105: 19-33, 1987.
- [23] W. Lode. "Versuche u ber den einfluß der mittleren hauptspannung auf die fließgrenze". *Z. angew. Math. Mech*, 5:142-144, 1925.
- [24] K. S. Zhang, J. B. Bai, and D. Francois. "Numerical analysis of the influence of the Lode parameter on void growth". *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33):5847-5856, 2001.
- [25] P. W. Bridgman. "Studies in Large Plastic Flow and Fracture". *McGraw- Hill, New York*, 1952.
- [26] L. Xue and T. Wierzbicki. "Ductile fracture initiation and propagation modeling using damage plasticity theory". *Engineering Fracture Mechanics*, 75(11):3276-3293, 2008.
- [27] L. Xue. "Stress based fracture envelope for damage plastic solids". *Engineering Fracture Mechanics*, 76(3):419-438, 2009.
- [28] L. Xue. "Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading". *International Journal of Solids and Structures*, 44(16):5163-5181, 2007.

- [29] L. Xue, T. Wierzbicki. "Ductile fracture characterization of aluminum alloy 2024-t351 using damage plasticity theory". *International Journal of Applied Mechanics*, 1(2):267–304, 2009.
- [30] Liang Xue. "Ductile fracture modeling: theory, experimental investigation and numerical verification". *PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology*, 2007.
- [31] Y. Bao, T. Wierzbicki. "On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space". *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1):81–98, 2004.
- [32] T. Wierzbicki, Y. Bao, Y.W. Lee, and Y. Bai. "Calibration and evaluation of seven fracture models". *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(4-5):719–743, 2005.
- [33] Y. Bai, T. Wierzbicki. "A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependance", *International Journal of Plasticity*, 24: 1071-1096, 2008.
- [34] D. Krajcinovic, S. Mastilovic. "Some fundamental issues of damage mechanics". *Mechanics of Materials*, 21(3):217–230, 1995.
- [35] D. Krajcinovic. "Selection of damage parameters - Art of science?", *Mechanics of Materials*, 28: 165-179, 1998.
- [36] G.Z. Voyiadjis, P. I. Kattan. "Advances in Damage Mechanics", Elsevier.
- [37] G.Z. Voyiadjis, F.H. Abed. "Implicit algorithm for finite deformation hypoelastic–viscoplasticity in fcc metals". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(7):933–959, 2006.
- [38] G.Z. Voyiadjis. "Model of inelastic behavior coupled to damage", chapter 9, Section 9.4, pages 814–820. *Academic Press, New York*, 2001.
- [39] N. Bonora, GM Newaz. "Low cycle fatigue life estimation for ductile metals using a nonlinear continuum damage mechanics model". *International journal of solids and structures*, 35(16):1881–1894, 1998.
- [40] N. Bonora. "A nonlinear CDM model for ductile failure", *Engineering Fracture Mechanics*, 58: 11-28, 1997.
- [41] N. Bonora. "Identification and measurement of ductile damage parameters", *Journal of Strain Analysis*, 34, 463-478, 1999.
- [42] T. Coppola, P. Folgarit. "L'influenza degli invarianti del tensore di tensione sulla deformazione a frattura duttile negli acciai", *XXXVI Convegno Nazionale A.I.A.S.*, 2007.

- [43] A. Baldi, A. Medda, F. Ginesu. "Kali: Un algoritmo di calibrazione inversa della curva true stress-true strain", *Convegno Nazionale AIAS 2009– Torino 9-11 Settembre 2009*.
- [44] A. Baldi, A. Medda, L. Francesconi, F. Bertolino. "Confronto Numerico Sperimentale fra due modelli di danneggiamento duttile", *Convegno Nazionale AIAS 2009– Torino 9-11 Settembre 2009*.
- [45] S. S. Manson. "Fatigue: a complex subject some simple approximation". *Experimental Mechanics* , 5:193–226, 1965.
- [46] L. F. Coffin. "A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile metal". *Trans ASME*, 76:931–950, 1954.
- [47] A. Palmgren. "Die lebensdauer von kugellagern". *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 68(14):339–341, 1924.
- [48] A. Palmgren. "The service life of ball bearings". *Journal of the Association of German Engineers* , 68(14):339–341, 1924.
- [49] M.A. Miner. "Cumulative damage in fatigue". *Journal of applied mechanics*, 12(3):159–164, 1945.
- [50] M.A. Sutton, W.J. Wolters, W.H. Peters, W.F. Ranson, S.R. McNeill. "Determination of displacements using an improved digital correlation method". *Image and Vision Computing* , 1(3): 133–139, 1983.
- [51] M.A. Sutton, J.J. Ortu, H. Schreier. "Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements: Basic Concepts, Theory and Applications". *Springer*, 2009.
- [52] M.A. Sutton, S.R. McNeill, J.D. Helm, Y.J. Chao. "Photomechanics". *Springer*, 2008
- [53] C. Quan, C.J. Tay, W. Sun, X. He. "Determination of three-dimensional displacement using two-dimensional digital image correlation". *Applied Optics*, 47(4): 583-593, 2008.
- [54] M.A. Sutton, T.C. Chu, W.F. Ranson. "Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics". *Experimental Mechanics*, 25(3): 232-244, 1985.
- [55] F. Dunne, N. Petrinic. "Introduction to Computational Plasticity". *Oxford University Press*, 2005
- [56] M. Vaz, E. A. de Souza Neto, P. A. Munoz-Rojas. "Advanced Computational Materials Modeling". *Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA*, 2011
- [57] E. A. de Souza Neto, D. Peric, D.R.J. Owen. "Computational Methods for Plasticity:

Theory and Application". *John Wiley & Sons*, 2008

- [58] M. Kojic, K. J. Bathe. "Inelastic Analysis of Solids and Structures". *Springer-Verlag Berlin*, 2005
- [59] E. Voce. "A Practical Strain-Hardening Function". *Metallurgia*, 219-226, 1955.
- [60] J.C. Simo, T.J.R. Hughes. "Computational Inelasticity", *Springer*, 1998
- [61] D.L. Henann, L. Anand. "A Large Deformation Theory for Rate-Dependent Elastic-Plastic Materials with Combined Isotropic and Kinematic Hardening". *International Journal of Plasticity* 25: 1833-1878, 2009.
- [62] W. Prager. "Theory of Plastic Flow Versus Theory of Plastic Deformation". *Journal of Colloid Science*, 3(3): 275, 1948.
- [63] A. Ishlinskii. "Mechanics and engineering: PMM vol. 41, n° 5, 1377, pp. 790-801". *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 59(4): 593-597, 1995.
- [64] Iu.I. Kadashevich, V.V. Novozhilov. "The theory of plasticity which takes into account residual microstresses". *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22(1): 104-118, 1958
- [65] Z. Mroz. "Multisurface Hardening Model for Monotonic and Cyclic Response of Metals". *Handbook of Material Behavior Models - Section 4.5: 223-231*, 2001.
- [66] W. Trampczynski, Z. Mroz. "Anisotropic hardening model and its application to cyclic loading". *International Journal of Plasticity*, 8(8): 925-946, 1992.
- [67] W.E. Boyce, W. Prager. "On rigid Workhardening solids with Singular Yield Conditions". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(1): 9-12, 1957.
- [68] R. Hill. "A New Method for Determining the Yield Criterion and Plastic Potential of Ductile Materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(4): 271-276, 1953.
- [69] R. Hill. "Constitutive Modeling of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3): 405-417, 1990.
- [70] R. Hill. "A user-friendly Theory of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals". *International Journal of Mechanical Sciences*, 35(1)_ 19-25, 1993
- [71] B. Eidel, F. Gruttmann. "Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation". *Computational Materials Science*, 28: 732-742, 2003.
- [72] I.I. Esat, H. Bahai, F.K. Shati. "Finite element modelling of anisotropic elastic-viscopla

- stic behaviour of metals". *Finite Elements in Analysis and Design*, 32: 279-287, 1999.
- [73] P. Papadopoulos, J. Lu. "On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 4889-4910, 2001.
- [74] F.J. Montans, K.J. Bathe. "Towards a Model for Large Strain Anisotropic Elasto-Plasticity". *Computational Plasticity*, 13-36, 2007.
- [75] G. Gabriel, K.J. Bathe. "Some Computational Issues In Large Strain Elasto-Plastic Analysis". *Computers & Structures*, 56(2/3): 249-267, 1995.
- [76] M. Kojic. "Stress integration procedures for inelastic material models within the Finite Element Method". *American Society of Mechanical Engineers*, 55(4): 389-414, 2002
- [77] D.N.K. Kim, F.J. Montans, K.J. Bathe. "Insight Into a Model for Large Strain Anisotropic Elasto-Plasticity". *Computational Mechanics*, 44:651-66, 2009.
- [78] M.A. Caminero, F.J. Montans, K.J. Bathe. "Modeling Large Strain Anisotropic Elasto-plasticity with Logarithmic Strain and Stress Measures". *Computers & Structures*, 89(11-12):826-843, 2011
- [79] M.A. Caminero, F.J. Montans, K.J. Bathe. "Large Strain Anisotropic Elasto-Plasticity using Logarithmic Strains, Lee Decomposition and generalized Kirchhoff Stress Measures". IN PRESS
- [80] M.A. Caminero, F.J. Montans, K.J. Bathe. "Small and Large Strains Algorithms for Anisotropic Plasticity". IN PRESS
- [81] F. Sidoroff, A. Dogui. "Some issues about anisotropic elastic-plastic models at Finite Strain". *International Journal of Solids and Structures*, 38: 9569-9578, 2001.
- [82] Y.F. Dafalias, M.M. Rashid. "The effect of plastic Spin on Anisotropic Material Behavior". *International Journal of Plasticity*, 5: 227-246, 1989.
- [83] Abaqus 6.10, User-Subroutine Reference Manual.
- [84] T. Coppola, D. Corallo, G. Mirone. "Determinazione della curva costitutiva post-necking per metalli duttili anisotropi". , *Convegno Nazionale AIAS 2009- Torino 9-11 Settembre 2009*.
- [85] W. T. Lankford, S. C. Snyder, J. A. Bausher. "New criteria for predicting the press performance of deep drawing sheets". *Transcription ASM*, 42:1197-1205, 1950.