Università degli Studi di Cagliari

**DOTTORATO DI RICERCA**
**Storia Filosofia e Didattica delle Scienze**
CICLO: XXVIII

**TITOLO TESI**

# Il pensiero algebrico: questioni di natura epistemologica e didattica

Settore scientifico disciplinare di afferenza:
MAT/04

Presentata da: Daniela Sanna
Coordinatore Dottorato: Prof. Marco Giunti
Tutor: Prof.ssa Maria Polo

Esame finale anno accademico 2014-2015

# Indice

**Introduzione** **3**

**1 Alcune riflessioni preliminari** **6**
1.1 Sui quesiti di ambito algebrico delle prove INVALSI . . . . . . . 6
1.2 Errori, difficoltà e ostacoli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.3 Errori frequenti di studenti del primo anno di università nella risoluzione di disequazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.3.1 Risultati . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.4 Problematica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

**2 Stato dell'arte** **29**
2.1 Le difficoltà in algebra: un ostacolo di origine didattica? . . . 29
2.2 Il ruolo dell'aritmetica nelle difficoltà in algebra . . . . . . . . 34
2.3 Pensiero algebrico: un ostacolo di origine ontogenica? . . . . . 37
2.4 La ricerca di nuove pratiche per restituire un senso all'algebra 40
2.5 Ipotesi di ricerca scaturite dall'analisi degli studi esistenti. . . 44

**3 Quadro teorico-metodologico** **47**
3.1 Quadro teorico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
3.1.1 *Pensiero algebrico*: una caratterizzazione. . . . . . . . 47
3.1.2 *Esperienza laboratoriale di apprendimento*: un tentativo di creare una situazione a−didattica . . . . . . . . 48
3.1.3 *Registri colloquiali e registri evoluti*: un possibile strumento per analizzare la genesi di processi di generalizzazione? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
3.2 Caratteristiche principali dell'apparato sperimentale . . . . . . 58
3.2.1 I problemi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
3.2.2 Gli studenti coinvolti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.2.3 L'attività in classe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
3.2.4 Le variabili analizzate . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

**4 Lo studio sperimentale** **69**
4.1 Lo studio pilota . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
4.1.1 L'attività con la quinta primaria . . . . . . . . . . . . . 71
4.1.2 L'attività con la prima A . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
4.1.3 L'attività con la prima L e la prima M . . . . . . . . . 87
4.1.4 Osservazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98
4.1.5 L'attività con la terza L . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
4.1.6 Conclusioni sullo studio pilota . . . . . . . . . . . . . . 106
4.2 La sperimentazione con le prime della scuola secondaria di primo grado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
4.2.1 L'attività in classe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
4.2.2 Risultati e analisi dei dati . . . . . . . . . . . . . . . . 138
4.2.3 Registri colloquiali e registri evoluti nei quesiti di generalizzazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
4.2.4 Conclusioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
4.3 Un'indagine in una terza secondaria di primo grado . . . . . . 192
4.3.1 Analisi dei dati ricavati dagli elaborati . . . . . . . . . 194

**5 Conclusioni e possibili sviluppi** **197**
5.1 Sulle ipotesi di ricerca . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 198
5.2 Sul pensiero algebrico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208
5.3 Sulle strategie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210
5.4 Piste aperte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213
5.4.1 Difficoltà in algebra elementare: un ostacolo di origine epistemologica? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213
5.4.2 L'influenza del lavoro in coppia . . . . . . . . . . . . . 217

**Bibliografia** **221**

**Allegati** **229**

**A Trascrizioni della discussione sul problema delle griglie quadrate** **229**
A.1 Estratti relativi alla fase b) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 229
A.2 Estratti relativi alla fase d) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263

**B Trascrizioni della discussione sul problema degli stuzzicadenti** **266**
B.1 Estratti relativi alla fase di descrizione degli algoritmi . . . . . 266

# Introduzione

L'interesse verso le problematiche legate all'insegnamento e all'apprendimento dell'algebra elementare nasce dalla mia esperienza di insegnante di matematica a scuola con gli studenti e fuori dalla scuola con amici o conoscenti. Nella maggior parte delle mie esperienze ho a che fare con studenti che hanno già intrapreso un determinato percorso didattico con la loro insegnante e che io seguo solo per un breve periodo. Lavorando con questi studenti mi accorgo ogni giorno di quanto siano diffuse, in allievi di età diverse, le difficoltà nella manipolazione delle espressioni algebriche o nella risoluzione di equazioni e disequazioni e di come queste difficoltà si manifestino con errori ricorrenti commessi in modo analogo da molti studenti. Il fatto che l'algebra sia la parte della matematica che crea più difficoltà negli allievi della scuola secondaria mi viene confermato anche dalle affermazioni che seguono quando rispondo "Insegno matematica" a chi mi chiede "Che lavoro fai?". Una delle frasi più frequenti dice più o meno: "Matematica?! Io non ci capivo niente! In realtà alle elementari ero anche bravo ma poi quando sono comparse le lettere..."

Eppure è proprio l'uso delle lettere che fa dell'algebra un potente strumento di generalizzazione, descrizione e dimostrazione che permette ad esempio di enunciare con l'uguaglianza $a(b + c) = ab + ac$ una ben nota proprietà del campo dei numeri reali che, utilizzando il linguaggio verbale, dovrebbe essere enunciata con: "il prodotto fra un numero reale e la somma di altri due numeri reali è uguale alla somma fra il prodotto del primo numero con il secondo e il prodotto del primo numero con il terzo"; oppure di affermare che la massa è in immenso serbatoio di energia scrivendo $E = mc^2$; o di dimostrare, sviluppando con pochi passaggi l'espressione $(2n+1)+(2m+1)$, che la somma di due numeri dispari è un numero pari.

Anche più potente è l'algebra delle strutture che consente di studiare *in una sola volta* infiniti oggetti diversi, solo sfruttando il fatto che soddisfano le stesse proprietà. Le strutture algebriche sono infatti insiemi su cui vengono definite operazioni che soddisfano determinate proprietà, e l'algebra che si occupa di tali strutture ha come scopo quello di determinare le caratteristiche di ciascuna struttura che discendono solo dalle proprietà soddisfatte dalle operazioni in essa definite.

L'algebra delle strutture non è però oggetto di questa tesi che infatti è nata, come spiegato sopra, da considerazioni sull'algebra elementare che mi hanno portata a chiedermi: perché molti degli studenti che incontro odiano questa parte della matematica e tanti adulti ricordano ancora il *trauma* di "fare i calcoli con lettere"?

Con l'intento di cercare una risposta a questa domanda e innanzitutto di capire se una tale situazione era ristretta solo alla mia esperienza, ho iniziato a interessarmi agli studi riguardanti i processi di insegnamento e apprendimento dell'algebra elementare cominciando dal numero speciale della rivista *Recherches en didactique des mathématique*, uscito nel 2012, interamente dedicato proprio alla didattica dell'algebra elementare e intitolato appunto "Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives".

Le mie impressioni sui sentimenti dei "non matematici" nei confronti dell'algebra sono state confermate dagli articoli raccolti in questo testo, in uno dei quali, ad esempio, Chevallard e Bosh (2012) raccontano che

> Les premières recherches conduites dans le cadre de la TAD [*Teoria Antropologica della Didattica*] ont d'emblée mis au jour un fait de société, voir de civilisation, qui nous paraît central: la *péjoration culturelle de l'algèbre en tant qu'œuvre,* phénomène qui crée autour de l'algèbre élémentaire un silence symptomatique d'un objet sur lequel la culture commune n'a pas grand-chose à dire. Dès le début des années 1980, la techinque du *différenciateur sémantique* a été utilisée pour saisir chez les élèves de collège ce trait quasi invariant: alors que, pour eux, la géométrie serait belle, chaude, profonde et féminine, l'algèbre était jugée laid, froide, superficielle et masculine.

In questo lavoro di tesi viene quindi descritto uno studio sperimentale realizzato con studenti di diversi livelli scolastici avente come oggetto principale il pensiero algebrico soprattutto dal punto di vista della sua genesi in alunni di 10-11 anni in relazione con alcune caratteristiche dell'attività didattica. Lo scopo dello studio è quello di verificare l'ipotesi secondo cui la mancanza di senso delle espressioni algebriche agli occhi degli studenti, considerata una delle cause principali degli atteggiamenti negativi e delle difficoltà, non sia dovuta ad un ostacolo di natura ontogenica, come sostenuto da alcuni, bensì ad un ostacolo di origine didattica, come sostenuto da altri. Con questo intento i risultati dello studio sono stati analizzati per individuare alcuni aspetti dell'attività didattica che possono favorire o inibire negli studenti la genesi di processi di generalizzazione, considerati in diversi contributi della letteratura analizzata, caratteristica fondamentale nella distinzione fra pensiero aritmetico e pensiero algebrico.

Parallelamente, tenendo conto del fatto che ormai in tutti gli studi di ambito psicologico e didattico è dimostrato che il linguaggio, sia esso verbale, non verbale o simbolico, orale o scritto, abbia un ruolo fondamentale nell'apprendimento, l'analisi dei risultati dello studio è stata effettuata anche con l'intento di individuare un possibile legame fra lo sviluppo di abilità di generalizzazione e un particolare aspetto del linguaggio, quello dei registri, *colloquiali* o *evoluti*, utilizzati nella produzione di un testo.

La progettazione e realizzazione dello studio sperimentale è stata preceduta da due studi preliminari che, insieme ad alcune considerazioni sulla natura degli errori commessi dagli alunni nel lavoro matematico in generale, sono descritti nel primo Capitolo di questa tesi, il cui ultimo paragrafo definisce nel dettaglio la problematica affrontata e le modalità con cui sono stati analizzati gli studi esistenti riguardanti l'insegnamento e l'apprendimento dell'algebra elementare.

Nel Capitolo 2 viene quindi illustrata tale analisi e vengono riportate le ipotesi di ricerca da essa scaturite che vengono completate nel successivo Capitolo 3 dopo la descrizione del quadro teorico e degli strumenti metodologici utilizzati nell'analisi dei dati.

Lo studio sperimentale, composto da uno studio pilota e da un successivo percorso sperimentale, è descritto nel Capitolo 4, in cui vengono illustrate la sua progettazione e realizzazione e riportati e analizzati i dati raccolti.

Infine nel Capitolo 5 sono discussi i risultati dello studio sia in relazione alle ipotesi formulate, mostrando come tali risultati ne abbiano confermato alcune e confutato altre, sia dal punto di vista delle variabili principali analizzate.

# Capitolo 1

# Alcune riflessioni preliminari

## 1.1 Sui quesiti di ambito algebrico delle prove invalsi

Come osservato nell'introduzione la matematica in generale non suscita sentimenti positivi ed è noto ai più che gli studenti italiani non eccellano in questa disciplina. Queste convinzioni sono rilevabili in esperienze quotidiane a scuola e in famiglia, ma anche confermate da strumenti di valutazione nazionali come le prove INVALSI. Se si osservano i dati raccolti con questo sistema di valutazione, si può rispondere a domande quali: la difficoltà in matematica è una caratteristica comune agli studenti di tutti i livelli scolastici? E ancora: sono difficoltà che riguardano allo stesso modo tutti gli aspetti di questa disciplina o ci sono ambiti in cui le performance sono peggiori?

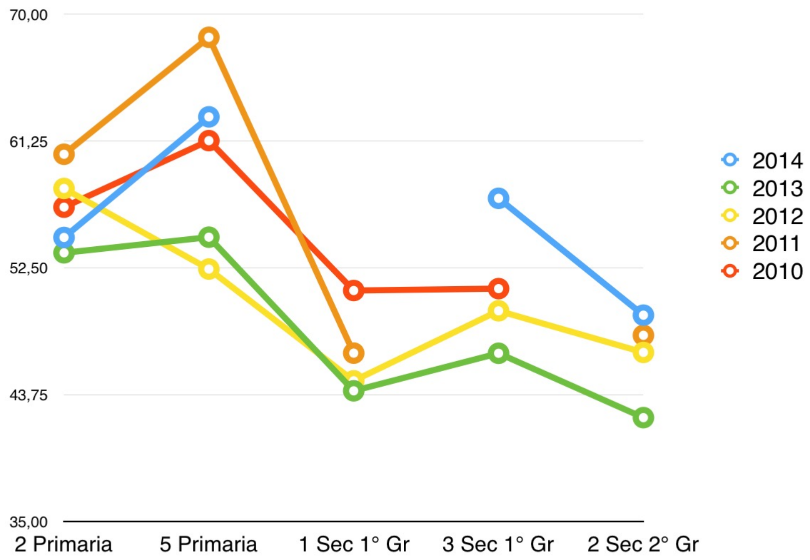
Nella Tabella 1.1 sono mostrate le percentuali di risposte esatte nelle prove INVALSI di matematica dal 2010 al 2014, suddivise per livelli scolastici.[1] Dalla tabella, e dal grafico relativo, si vede che la percentuale di risposte esatte nelle classi della scuola secondaria, non supera quasi mai il 50%, le uniche due eccezioni si trovano infatti nei risultati della prima e della terza secondaria di primo grado relativamente al 2010 mentre nella secondaria di secondo grado nessun dato supera il 50%.

Ci si potrebbe quindi chiedere: quali sono le componenti della matematica della scuola secondaria che creano più difficoltà negli studenti?

[1] Alcune celle della tabella sono vuote perché nell'anno relativo non è stata somministrata la prova per il livello scolastico corrispondente alla cella. La raccolta completa dei dati è consultabile nell'Area dati del sito dell'INVALSI all'indirizzo `http://www.invalsi.it/invalsi/statapp.php?page=progetto`.

Tabella 1.1: Percentuali di risposte corrette delle prove INVALSI di matematica, suddivise per anno scolastico e per livello.

| **Anno** | **2 Primaria** | **5 Primaria** | **1 Sec. 1° Grado** | **3 Sec. 1° Grado** | **2 Sec. 2° Grado** |
|---|---|---|---|---|---|
| **2014** | 54,60 | 62,92 | | 57,3 | 49,24 |
| **2013** | 53,54 | 54,62 | 44,02 | 46,61 | 42,17 |
| **2012** | 57,98 | 52,42 | 44,71 | 49,54 | 46,47 |
| **2011** | 60,34 | 68,41 | 46,62 | | 47,85 |
| **2010** | 56,69 | 61,28 | 50,94 | 51,07 | |




I quesiti che compongono la prova INVALSI per la matematica vengono classificati in quattro ambiti, a seconda dei contenuti coinvolti. I quattro ambiti vengono indicati come: *Numeri*, *Spazio e figure*, *Relazioni e funzioni* e *Dati e previsioni*.

Nei rapporti finali dei rilevamenti nazionali per gli anni scolastici 2011-2012 e 2012-2013[2] i risultati ottenuti sono stati analizzati anche in relazione a questi quattro ambiti. Ciò che si evince dalle analisi è che l'ambito che crea maggiori difficoltà è solitamente quello denominato *Relazioni e funzioni*.

Come si legge nel *Quadro di riferimento* relativo al secondo ciclo di istruzione per la prova di matematica[3] l'ambito *Relazioni e funzioni* comprende:

[2]I rapporti delle rilevazioni delle prove INVALSI sono reperibili all'indirizzo `http://www.invalsi.it/invalsi/index.php?page=snv`

[3]Disponibile all'indirizzo `https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf`

> Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa,...). Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Funzioni (lineari, quadratiche, valore assoluto, razionali fratte): significati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Zeri di una funzione: semplici equazioni, proprietà. Segno di una funzione: semplici disequazioni, proprietà. Relazioni tra funzioni rappresentate sul piano cartesiano: sistemi di equazioni e disequazioni.

In Figura 1.1 sono riportati alcuni dei quesiti, tratti dalle prove dell'anno scolastico 2012-2013, dell'ambito *Relazioni e funzioni* per le classi $5^a$ primaria, $1^a$ e $3^a$ secondaria di primo grado e $2^a$ secondaria di secondo grado (per la classe $2^a$ primaria non son previste domande nell'ambito *Relazioni e funzioni*).

Si esamina nel dettaglio uno dei quesiti somministrati nella scuola secondaria di secondo grado, quindi a studenti che manipolano le espressione algebriche da quasi tre anni. Si considera l'item a. del quesito D7 di cui riportiamo di seguito il testo.

D7 Considera un quadrato di lato $a$.

a. Se si aumenta il lato $a$ del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato $b$. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di $b$?

A. $20\,a$

B. $1,20\,a$

C. $a + 20$

D. $a + 0,20$

L'opzione corretta è la B. Infatti aumentare una quantità $a$ del 20% significa aggiungere ad $a$ il 20% di $a$ stesso, quantità che si determina moltiplicando $a$ per 20/100 quindi per 0,20. Il lato $b$ è dato dall'espressione $a + 0,20\,a$ ovvero $1,20\,a$. Dunque per rispondere a questo quesito è sufficiente sapere come si determina una percentuale e saper eseguire una somma fra monomi, conoscenze che fanno parte degli abituali programmi già nella terza classe della scuola secondaria di primo grado, che dovrebbero essere padroneggiate a conclusione del primo anno della secondaria di secondo grado e quindi disponibili nel secondo anno come saperi utilizzabili nella risoluzione di questo tipo di quesiti. Nonostante ciò solo il 19,8% degli studenti di seconda secondaria di secondo grado a cui è stato somministrato il test INVALSI del 2013 ha scelto correttamente l'opzione B. L'opzione che è stata selezionata da quasi la metà degli studenti (46%) è la D (le percentuali per tutte le opzioni sono riportate in Tabella 1.2). Questi studenti hanno quindi riconosciuto che il 20% equivale a $0,20$ e che tale percentuale doveva essere aggiunta ad $a$ ma nella traduzione in simboli dell'intera operazione non hanno tenuto conto del fatto che $0,20a$ e non $0,20$ è il 20% di $a$. Per questo quesito dunque l'errore riguarda un'errata interpretazione della scrittura simbolica o l'errata trasformazione dell'algoritmo necessario a determinare la lunghezza di b in espressione algebrica. Il fatto che questo errore sia stato commesso da quasi la metà degli studenti italiani delle seconde della secondaria di secondo grado è indice del fatto che le difficoltà nella "traduzione" tra formule e algoritmi non siano limitate ad una particolare classe, o scuola, o alle pratiche di alcuni insegnanti ma siano comuni e diffuse fra tutti gli studenti che conoscono il calcolo letterale.

Tabella 1.2: Distribuzione delle risposte degli studenti della classe seconda secondaria di secondo grado all'item a. del quesito D7.

| Mancata risposta | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 4,7 | 10,7 | 19,8 | 18,8 | 46 |

Saranno esaminati brevemente i quesiti in Figura 1.1 per evidenziare la natura e il tipo di conoscenze di natura algebrica che sono implicati e necessari nella risoluzione.

Il primo dei quesiti in Figura 1.1, indicato con D18, è stato somministrato agli studenti della $5^a$ primaria. Per rispondere all'item a. un alunno deve esser in grado di comprendere l'algoritmo scritto a parole e di applicarlo correttamente ai due numeri indicati nel testo. Nell'item b. deve inoltre essere in grado di scrivere l'algoritmo con il linguaggio simbolico sotto forma di espressione e utilizzando lettere in luogo di numeri specifici.

Il terzo quesito, D21, è tratto dalla prova per la prima secondaria di primo grado. Rispondere all'item a. comporta l'individuazione di una relazione costante fra l'area di un triangolo e quella del triangolo successivo. Per l'item b. inoltre è necessario essere in grado di individuare una relazione fra la posizione della figura nella sequenza e la sua altezza o comunque di applicare un procedimento che consenta di determinare l'altezza della figura 100 non presente nell'immagine cha accompagna il quesito.

Il quesito D2, proposto a studenti della terza secondaria di primo grado, riguarda il linguaggio simbolico e precisamente l'individuazione delle opera-

**D18. La maestra assegna ai suoi alunni questo compito: pensate due numeri diversi fra loro e sommate al più piccolo il doppio del più grande.**

**a. Riccardo pensa i numeri 3 e 5. Quale sarà il risultato del suo calcolo?**

A. ☐ 8

B. ☐ 11

C. ☐ 13

D. ☐ 16

**b. Se Riccardo chiama *a* il numero più piccolo e *b* quello più grande, come può scrivere il calcolo assegnato dalla maestra?**

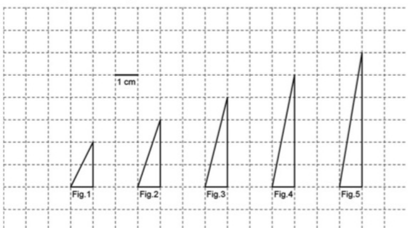
A. ☐ $2\times a+2\times b$

B. ☐ $2\times a+b$

C. ☐ $a\times b\times 2$

D. ☐ $a+2\times b$

**D21. Osserva i seguenti triangoli.**




**a. Da un triangolo al successivo l'area del triangolo:**

A. ☐ Raddoppia

B. ☐ Triplica

C. ☐ Aumenta di 1 $cm^2$

D. ☐ Aumenta di 0,50 $cm^2$

**b. Se l'altezza dei triangoli continua ad aumentare di 1 cm da una figura alla successiva, quanti centimetri misurerà l'altezza del triangolo della figura 100?**

A. ☐ 102

B. ☐ 101

C. ☐ 100

D. ☐ 99

**D7. Considera un quadrato di lato *a*.**

**a. Se si aumenta il lato *a* del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato *b*. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di *b*?**

A. ☐ 20 $a$

B. ☐ 1,20 $a$

C. ☐ $a$ + 20

D. ☐ $a$ + 0,20

**b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato *b* rispetto all'area del quadrato di lato *a*?**

A. ☐ Del 20%

B. ☐ Del 40%

C. ☐ Del 44%

D. ☐ Del 120%

**D26. Alla fine di ogni mese, il numero degli iscritti al sito Internet www.miseisimpatico.org raddoppia rispetto al numero degli iscritti alla fine del mese precedente. Al termine del primo mese di attività gli iscritti sono 5.**

**a. Quale delle seguenti espressioni permette di calcolare il numero degli iscritti al termine del terzo mese?**

A. ☐ $5\cdot 5\cdot 5$

B. ☐ $5\cdot 2\cdot 2$

C. ☐ $5+5+5$

D. ☐ $5\cdot 2\cdot 3$

**b. Quando vengono superati i 100 iscritti?**

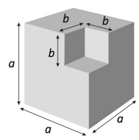
A. ☐ Alla fine del terzo mese

B. ☐ Alla fine del quinto mese

C. ☐ Alla fine del sesto mese

D. ☐ Alla fine dell'ottavo mese

**D2. In figura è rappresentato un solido ottenuto da un cubo grande dal quale è stato tolto un cubo più piccolo.**




**Quale delle seguenti espressioni permette di calcolare il volume del solido ottenuto?**

A. ☐ $6a^2 - 3b^2$

B. ☐ $3a^2 - 3b^2$

C. ☐ $(a - b)^3$

D. ☐ $a^3 - b^3$

**D26. Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto. *I* è l'intensità luminosa misurata a una distanza *r* dalla sorgente. Il prodotto fra l'intensità luminosa *I* e il quadrato della distanza *r* dalla sorgente è uguale a una costante *k*.**

**a. Quale fra le seguenti formule esprime la relazione tra *I* e *r*?**

A. ☐ $\frac{I}{r^2}=k$

B. ☐ $\left(\frac{I}{r}\right)^2=k$

C. ☐ $I\cdot r^2=k$

D. ☐ $(I\cdot r)^2=k$

**b. Se la distanza *r* raddoppia, allora l'intensità luminosa *I***

A. ☐ diventa il doppio

B. ☐ diventa la metà

C. ☐ diventa il quadruplo

D. ☐ diventa un quarto

Figura 1.1: Alcuni quesiti delle prove INVALSI 2012-2013

zioni da effettuare per determinare il volume del particolare solido riportato nella figura e la scrittura di queste con un'unica espressione in cui le misure degli spigoli del solido non sono dati numerici ma sono indicate da lettere.

L'ultimo quesito, D26, è incluso nella prova per la seconda secondaria di secondo grado. L'item a. richiede la capacità di esprimere mediante il linguaggio simbolico una relazione fra grandezze descritta a parole nel testo. Per rispondere all'item b. occorre inoltre essere in grado di manipolare opportunamente l'espressione che rappresenta la relazione e interpretare la nuova espressione ottenuta individuandone il rapporto con la prima.

Nell'ambito *Relazioni e funzioni* in cui, come si è detto, gli studenti trovano più difficoltà rispetto agli altri, sono compresi dunque quesiti che riguardano: l'individuazione di regolarità in successioni di figure, la comprensione e l'applicazione di algoritmi di calcolo e la loro rappresentazione mediante il linguaggio simbolico, l'espressione di relazioni fra grandezze mediante espressioni numeriche e algebriche. Queste abilità sono legate, alcune più esplicitamente di altre, a quelle richieste per comprendere le prime nozioni di algebra elementare riguardanti ad esempio le espressioni algebriche. Ci si può quindi chiedere se le difficoltà incontrate dagli studenti per rispondere a questi quesiti non siano legate alle difficoltà che compaiono quando affrontano l'algebra a partire dalla terza secondaria di primo grado.

Nei rapporti INVALSI la *difficoltà* in ciascun ambito è misurata sulla base del numero delle risposte errate fornite dall'intero campione di studenti in quell'ambito. Ma l'*errore* è sempre indice di difficoltà?

## 1.2 Errori, difficoltà e ostacoli

L'analisi e la caratterizzazione di diverse tipologie di errore che si possono manifestare nell'attività matematica scolastica ha portato Zan (2007) a rifiutare di attribuire all'errore il ruolo di indicatore privilegiato di difficoltà.

Talvolta gli errori ricorrenti possono essere causati dalla presenza di interpretazioni distorte da parte degli allievi dei messaggi veicolati dall'insegnante. Come osservato da Zan (1998), infatti, l'insegnante manda all'allievo dei messaggi, espliciti o meno, quando illustra: algoritmi, termini e simboli specifici, concetti. Sulla base di questo Zan parla di errori dovuti: all'interpretazione distorta di algoritmi, all'interpretazione distorta di termini e simboli specifici, all'interpretazione distorta di concetti.

Il primo tipo di errore deriva da una "*modificazione plausibile della procedura standard*"(Zan, 2007, pag. 71) ovvero non dall'applicazione scorretta di algoritmi corretti ma dall'applicazione corretta di algoritmi scorretti (ibidem). L'interpretazione distorta di termini o simboli specifici è a volte dovuta al fatto che alcuni di questi vengano utilizzati con accezione diversa in altri contesti sopratutto quotidiani. Infine l'interpretazione distorta di concetti in alcuni casi è dovuta al fatto che lo studente faccia "riferimento ad un *modello primitivo tacito* del fenomeno o del concetto in questione, cioè ad un'interpretazione significativa di quella nozione matematica, che si sviluppa ad uno stadio iniziale del processo d'apprendimento (spesso suggerita in modo esplicito dall'insegnante)"(ivi, pag. 87).

Sempre Zan (1998) osserva che la causa degli errori non sempre è dovuta all'interpretazione distorta del messaggio veicolato dall'insegnate ma che a volte questa sia da attribuire all'interpretazione personale globale dell'intera attività matematica.

Basandosi sul modello costruttivista dell'apprendimento, Zan (2007, pag. 169) intende le *convinzioni* che un allievo ha nei confronti con la matematica come il risultato del continuo processo di interpretazione dei fatti osservati sulla base delle sue precedenti esperienze in matematica e contemporaneamente come la base degli schemi con cui interpreterà le esperienze future. In particolare esse possono inibire l'utilizzo delle risorse adeguate per lo svolgimento di un compito, anche se queste sono possedute dall'allievo. Le convinzioni sulla base delle quali lo studente costruisce una *epistemologia personale* della matematica possono riguardare: gli obiettivi dell'insegnamento/apprendimento, gli indicatori e le cause del proprio successo/fallimento, le proprie capacità, le caratteristiche della matematica. In particolare Zan prende in considerazione le convinzioni sul compito, le teorie del successo, la visione della matematica e le convinzioni su di sé.

Un esempio di come le convinzioni sul compito possano portare al fallimento è l'interpretazione del seguente problema commentato da Zan:

> *Trova almeno una soluzione dell'equazione* $4x^3 - x^4 = 30$ *oppure spiega perché non esistono soluzioni.*

Come osservato da Zan, se l'allievo colloca il problema nell'ambito dell'algebra e vede questo ambito come caratterizzato da un insieme di procedure di manipolazione delle espressioni algebriche, non riuscirà a determinare e giustificare l'assenza di soluzioni ad esempio osservando che la funzione $f(x) = 4x^3 - x^4$ può assumere al massimo il valore 27 e quindi non può assumere il valore 30 (ivi, pag. 173). Il fallimento del compito non sarà quindi necessariamente dovuto alla mancanza di competenze nel campo nell'analisi matematica ma alla convinzione che le competenze da mettere in atto fossero quelle della manipolazione delle espressioni algebriche. Durante lo svolgimento delle attività in classe, infatti, si costruisce un processo interattivo tra insegnante, alunno e sapere che contribuisce a determinare le condizioni della attività (Polo, 2000). Alcuni autori (Brousseau, 1980 ; Chevallard, 1985) hanno inquadrato questo fenomeno in termini di "contratto didattico" e "trasposizione didattica" sostenendo ad esempio che:

> l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressions plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées: nous appelons ≪ contrat didactique ≫ l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître. (Brousseau, 1980, pag. 127)

Le teorie del successo comprendono invece le convinzioni su quali siano le cause del successo in matematica e le strategie da attivare per avere successo. Fra le convinzioni sul successo in matematica più diffuse fra gli studenti Zan riporta e commenta le seguenti: "Per studiare matematica basta fare esercizi, non è necessario studiare la teoria", "Per imparare la matematica ci vuole tanta memoria"; "Per andar bene in matematica bisogna essere portati" (ivi, pag. 175). Queste convinzioni portano quindi all'utilizzo di risorse, come ad esempio la memoria, non sempre sufficienti a risolvere un compito o ad attribuire a cause non controllabili, come il fatto di non essere naturalmente "portati", i propri fallimenti e quindi a non attivare le risorse che invece si hanno a disposizione e che potrebbero essere sufficienti a eseguire in modo corretto un compito assegnato.

È evidente che queste convinzioni sono legate anche alla visione della matematica e alle convinzioni su di sé. Per quanto riguarda la visione della matematica Zan contrappone la visione *strumentale*, secondo la quale la matematica è un insieme di formule e procedure da memorizzare e applicare, alla visione *relazionale* che invece si focalizza sulla comprensione del motivo per il quale le formule abbiano una determinata struttura e del perché si debbano applicare in certi contesti. Zan evidenzia il fatto che situazioni di difficoltà si verificano quando insegnante e allievo hanno due visioni diverse della matematica.

Anche alle convinzioni su di sé viene attribuito un ruolo dal momento che "l'individuo agisce sulla base delle risorse che *ritiene* di avere" (ivi, pag. 181). Il concetto legato alle convinzioni su di sé è il *senso di auto-efficacia* definito come "la convinzione di poter eseguire un compito specifico all'interno della disciplina" (ivi, pag. 182). L'assenza di tale convinzione inibisce infatti nell'allievo l'utilizzo delle conoscenze che in realtà possiede poiché affinché "l'allievo investa le energie e le risorse necessarie per l'attivazione di processi di controllo deve credere di avere le risorse (che ritiene) necessarie, deve credere *di potercela fare*" (ibidem).

Se dunque è vero che non tutte le difficoltà sono dovute a caratteristiche intrinseche dell'ambito in cui si manifestano e quindi quantificabili solo in termini di numero di errori commessi, è anche vero che alcune sono dovute alla presenza di un ostacolo che, talvolta, è rivelato da errori aventi caratteristiche precise.

> Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, ma ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductible, persistantes. (Brousseau, 1983, pag. 105)

Gli errori che sono sintomo della presenza di un ostacolo sono quindi, secondo Brousseau, ripetitivi e persistenti nel tempo e, dal punto di vista dell'insegnante, difficili da individuare ma anche da prevedere sia per quanto riguarda il segmento del curricolo in cui possono comparire, sia il momento dell'attività didattica in cui si possono manifestare.

Per poter formulare e verificare ipotesi riguardanti la natura degli ostacoli che sono causa di difficoltà nell'ambito dell'algebra elementare si farà rifermento alle seguenti definizioni dovute a Brousseau (1983).

> Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait del limitations (neurophysiologique entre autres) du sujet à un moment de son développement: il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts.
> L'épistémologie génétique met en évidence des stades, des accommodations et des assimilations, qui à la fois, ressemblent aux étapes du développement des concepts par les lois de régulations qui les font apparaître, et en diffèrent par la nature exacte des limitations qui déterminent ces régulations. (ivi, pag. 108)

> Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet de système éducatif. (ibidem)

> Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. (ibidem)

A cosa sono dovuti, dunque, gli errori commessi dagli studenti nella manipolazione degli oggetti algebrici? L'algebra elementare insegnata a partire dalla scuola secondaria di primo grado può apparire agli occhi di alcuni studenti come una serie di algoritmi prestabiliti arbitrariamente e il lavoro algebrico puó venire inteso come la scelta dell'algoritmo giusto da applicare a questo o quell'altro oggetto a seconda della tipologia di esercizio. Quando accade questo, le regole di manipolazione di polinomi, ad esempio, o di equazioni e disequazioni, diventano procedure meccaniche che non sono accompagnate da una giustificazione o da un senso. Questo a volte può portare all'applicazione di algoritmi corretti in alcuni ambiti, in contesti in cui portano a risultati errati o privi di significato: si pensi ad esempio ai casi in cui l'algoritmo per risolvere le equazioni di secondo grado viene utilizzato per risolvere le omologhe disequazioni portando ad esempio a scritture quali $x < \pm 1$ come soluzione della disequazione $x^2 - 1 < 0$.

La mancanza di significato, per gli studenti, delle scritture algebriche e delle trasformazioni che su queste vengono effettuate potrebbe essere la causa di questi comportamenti che, in certi casi, costituiscono alcuni degli errori più frequenti e diffusi fra gli studenti di diversi gradi scolastici.

Queste considerazioni confermate, come si vedrà nel Capitolo 2, da studi esistenti sulle difficoltà legate all'insegnamento e apprendimento dell'algebra elementare, insieme alla volontà di verificare la persistenza anche dopo la scuola secondaria di tali difficoltà ed errori, hanno fondato l'analisi di 138 elaborati prodotti da studenti universitari in occasione della prova finale del corso di Matematica e Statistica per i corsi di laurea in Scienze Naturali e Scienze Geologiche. Le modalità in cui l'analisi è stata condotta e i risultati ottenuti sono descritti nel paragrafo che segue.

## 1.3 Errori frequenti di studenti del primo anno di università nella risoluzione di disequazioni

L'analisi descritta in questo paragrafo riguarda la risoluzione di un quesito della prova di Matematica e Statistica di studenti dei Corsi di Laurea in Scienze Naturali e Scienze Geologiche. Nel quesito si chiede di individuare un sottoinsieme dei numeri reali definito come intersezione fra due insiemi di cui uno è definito per mezzo di una disequazione.

Il quesito non è uguale per tutti gli studenti coinvolti, ma le disequazioni considerate, riportate nella Tabella 1.3, hanno caratteristiche comuni che possono portare allo stesso tipo di errore.

Tabella 1.3: Elenco delle disequazioni proposte agli studenti

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(1-x)(x+2,25)^3 \leq 0$ | 8 | $3^x(x-2,4)(x-1,\overline{9}) \leq 0$ |
| 2 | $(3-x^2)(x-2,1\overline{9}) > 0$ | 9 | $x(2-x)^2(x+3,55) < 0$ |
| 3 | $(5+x)^2(x+3,55) < 0$ | 10 | $x(x+2,\overline{9})\sqrt{16-x^2}$ |
| 4 | $(\sqrt{2}+x)^2(x-3,1\overline{9}) \leq 0$ | 11 | $-x(x-3,3) \geq 0$ |
| 5 | $(x-1,\overline{9})\sqrt{9-x^2} \leq 0$ | 12 | $x(x-4,25)\sqrt{25-x^2} \leq 0$ |
| 6 | $x(x+2,\overline{9})\sqrt{16-x^2} \leq 0$ | 13 | $x^2(x+1,\overline{9})\sqrt{8-x^2} \geq 0$ |
| 7 | $(x-3,\overline{9})(x-3,5)^2 \leq 0$ | 14 | $x^2(x-2,\overline{9})(x+3,25) \leq 0$ |

Sono presenti sia disequazioni con "$>$" e "$\geq$" sia con "$<$" e "$\leq$". Queste ultime portano all'atteggiamento diffuso che consiste nello [Errore 1][4] studiare il segno dei fattori che compaiono a sinistra della disequazione risolvendo disequazioni del tipo "$(\dots) < 0$" o "$(\dots) \leq 0$". Atteggiamento che non è di per se un errore se non quando è associato ad una errata compilazione del corrispondente grafico dei segni, che consiste nello scambiare gli intervalli di numeri reali in cui il fattore è negativo con quelli in cui risulta essere positivo e viceversa. Gli esempi in Figura 1.2 mostrano come lo studio del segno dei fattori che costituiscono il primo membro di una disequazione venga effettuato determinando quali siano i valori dell'incognita che rendono il fattore negativo, valori che però nel grafico corrispondono agli intervalli in cui viene disegnata una linea continua. Questo è quindi uno degli errori ipotizzati a priori e che è stato dunque preso in considerazione sia per questo tipo di disequazioni sia per la disequazione n°11 (Tabella 1.3) in cui il segno "meno" del primo fattore avrebbe potuto portare al cambio del segno dei due membri e di conseguenza del verso della disequazione che quindi sarebbe ricaduta nel

[4]Gli errori presi in considerazione in questa analisi sono riportati, con i relativi dati, nella Tabella 1.4 in cui sono stati numerati. Nel seguito, quindi, la descrizione dell'errore sarà preceduta dal numero assegnatogli in modo da rendere più comprensibile la lettura della tabella.

caso appena descritto.

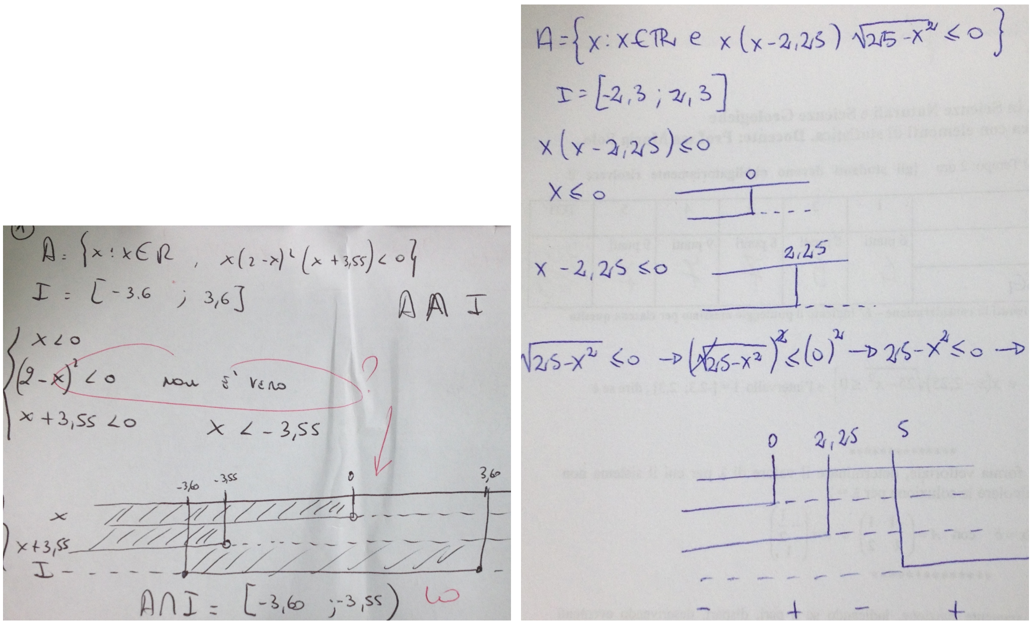



Figura 1.2: Due esempi dell'Errore 1: errata compilazione del grafico dei segni. La figura a destra è anche un esempio dell'Errore 3: l'assimilazione del segno del fattore radicale con il segno del suo radicando.

Per le disequazioni in cui compare un fattore irrazionale sono stati ipotizzati tre tipi di errori: [Errore 2] la mancata individuazione del campo di esistenza della disequazione; [Errore 3] l'assimilazione del segno dell'intero fattore radicale con il segno del suo radicando (Figura 1.2); [Errore 4] il considerare il fattore maggiore o uguale a zero per tutti i valori reali dell'incognita.

Se poi nel radicando compaiono addendi che sono quadrati (o quadrati di numeri interi o il quadrato dell'incognita) è stato ipotizzato l'errore di [Errore 5] applicare proprietà che sono valide per alcune operazioni in espressioni contenenti una radice per cui non valgono. In Figura 1.3 sono riportati due esempi in cui la potenza viene "semplificata" con il simbolo della radice. In questi esempi viene attribuita (probabilmente inconsapevolmente) la proprietà additiva alla radice quadrata.[5] Anche l'errore della terza immagine

[5]Si parla di proprietà additiva perché la semplificazione sarebbe corretta se fosse valida la seguente catena di uguaglianze

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25} - \sqrt{x^2} = 5 - x$$

in cui la prima uguaglianza sarebbe corretta solo se la radice quadrata godesse della in basso, sempre in Figura 1.3, è stato considerato dello stesso tipo poiché verosimilmente l'8 all'interno della radice è stato trattato come se fosse il quadrato il 4. Della stessa tipologia è l'errore di semplificare il radicale addendo all'interno dell'argomento del quadrato con l'esponente nell'equazione n°4 (Tabella 1.3) poiché può essere interpretato come l'applicazione di una proprietà che consente di applicare il quadrato solo al primo addendo del binomio.

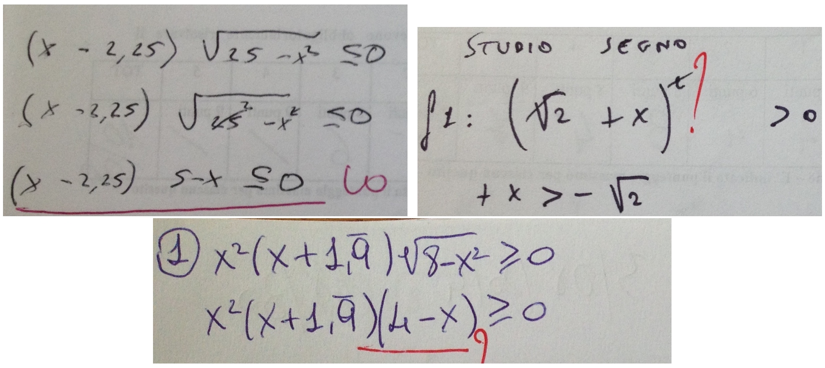



Figura 1.3: Gli elaborati mostrano l'applicazione alla radice quadrata e al quadrato di proprietà non soddisfatte da queste operazioni.

In alcune disequazioni compare un fattore al quadrato (o un binomio o solamente l'incognita). Per queste disequazioni gli errori considerati sono: [Errore 6] assimilare il segno dell'intero fattore al segno della sola base (Figura 1.4); [Errore 7] considerare il quadrato positivo per tutti i valori reali dell'incognita senza quindi escludere il il valore che lo annulla; [Errore 8] escludere il valore che annulla il fattore anche se si sta risolvendo $(\dots)^2 \geq 0$ o $\leq 0$. Due esempi di quest'ultimo tipo di errore sono mostrati in Figura 1.5.

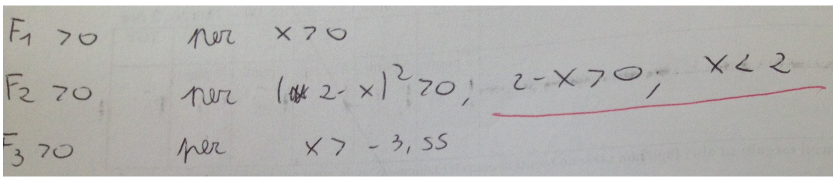



Figura 1.4: Errore 6: il segno del quadrato di un binomio è assimilato al segno del binomio che è la base della potenza.

Nel caso particolare in cui poi il quadrato sia di un binomio si è tenuto conto anche del fatto che [Errore 9] venisse svolto il quadrato del binomio

proprietà additiva.

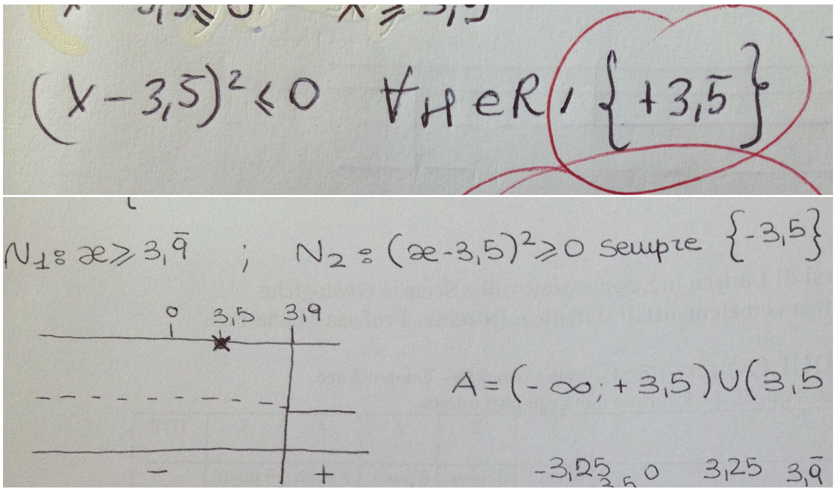



Figura 1.5: Errore 8: il valore dell'incognita che annulla il fattore quadrato viene escluso dalle soluzioni delle disequazioni nonostante queste richiedano rispettivamente "$\leq$" e "$\geq$".

per studiare il segno del fattore.

Gli errori considerati per la disequazione che contiene un fattore esponenziale riguardano il [Errore 10] ricondurre lo studio del segno del fattore al segno dell'esponente (che in queste equazioni è sempre solo l'incognita) o [Errore 11] al fatto che l'esponente sia maggiore o minore di 1 (Figura 1.6).

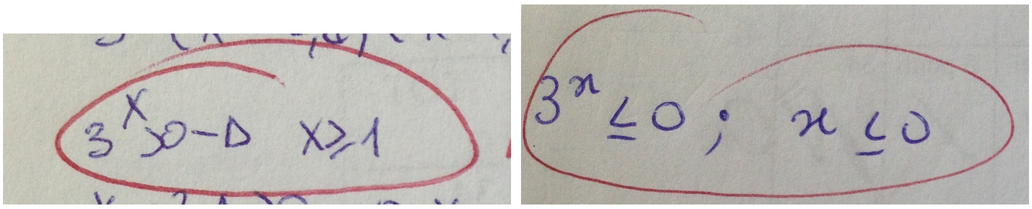



Figura 1.6: Le due immagini sono esempi rispettivamente dell'Errore 10 e dell'Errore 11 considerati per la disequazione che contiene un fattore esponenziale.

Nelle equazioni in cui lo studio dei fattori o la determinazione del campo di esistenza comporta la determinazione del segno di un polinomio di secondo grado del tipo $k - x^2$ è stata presa in considerazione [Errore 12] l'errata determinazione del segno del polinomio. Questo errore è stato contemplato anche in quei casi in cui il quadrato del binomio presente nella disequazione sia stato svolto e il cui segno sia stato studiato applicando la procedura di una disequazione di secondo grado completa.

Infine per le equazioni in cui uno dei fattori è la sola incognita è stato ipotizzato l'errore di [Errore 13] considerare il fattore positivo per qualsiasi numero reale.

Per tutte le disequazioni è stato contemplato anche l'errore di [Errore 14] risolvere la disequazione utilizzando un grafico per individuare l'intersezione o l'unione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e l'errore inverso di [Errore 15] utilizzare un grafico per calcolare il segno di un prodotto di fattori in luogo del grafico per individuare l'intersezione. Ad esempio, l'immagine a sinistra nella Figura 1.7 mostra come l'intervallo indicato con il "+" cerchiato, e considerato come soluzione della disequazione, è in realtà l'intersezione degli intervalli in cui i fattori sono indicati come positivi. Nell'immagine a destra, invece, viene determinato il risultato della moltiplicazione dei segni in intervalli che in realtà dovevano essere intersecati (si noti la scrittura "I ∩ A" accanto al grafico.

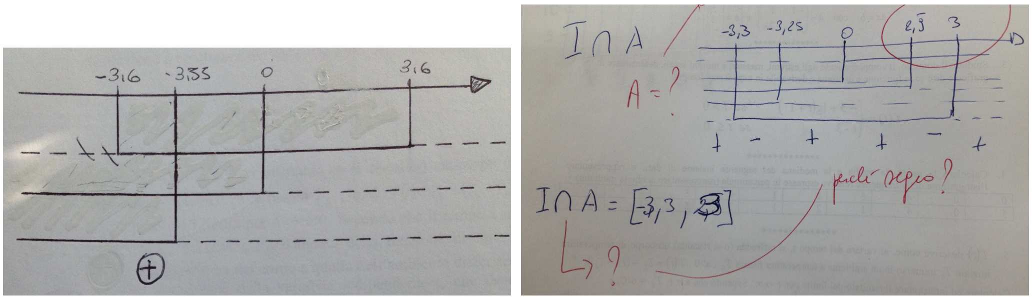



Figura 1.7: Due esempi di errori dovuti alla confusione fra il grafico che rappresenta il segno di un fattore e il grafico che rappresenta sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

.

### 1.3.1 Risultati

Il primo dato rilevante dell'analisi delle disequazioni è il numero di risoluzioni corrette ovvero 33 su 138: nel 77% delle risoluzioni è stato commesso almeno un errore.

Nella Tabella 1.4 sono riportati, per ogni errore illustrato nel paragrafo precedente, il numero delle risoluzioni osservate in cui sarebbe potuto potenzialmente essere commesso; il numero di queste ultime che sono risultate

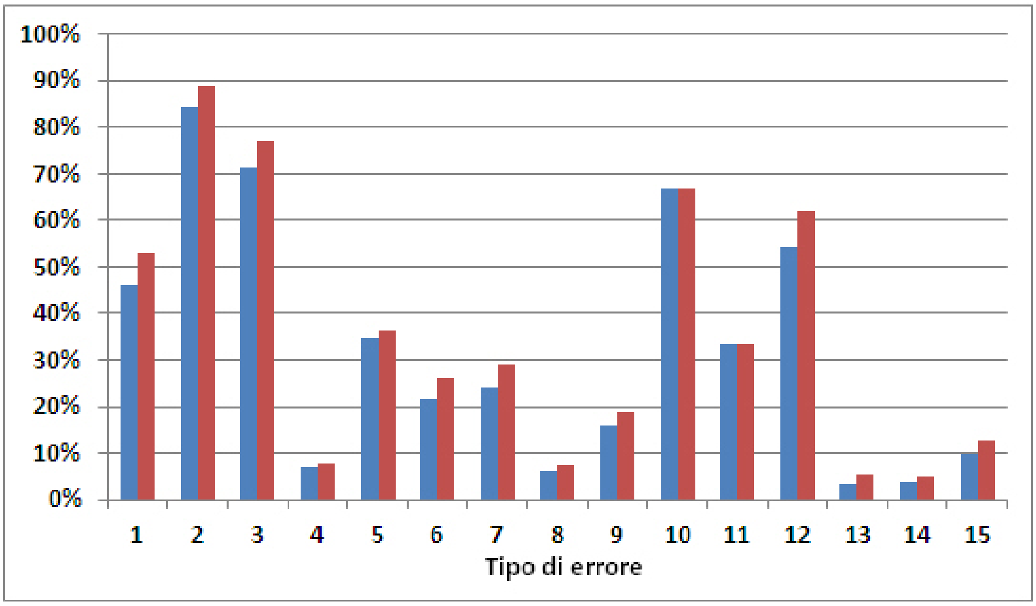



Figura 1.8: Diagramma delle frequenze percentuali degli errori. Le barre blu rappresentano le frequenze rispetto al numero totale delle risoluzioni considerate, quelle rosse rispetto al totale delle risoluzioni errate

errate; la frequenza assoluta dell'errore; la frequenza percentuale dell'errore calcolata sul totale delle disequazioni in cui sarebbe potuto essere commesso; la frequenza percentuale dell'errore sul numero di risoluzioni errate.

Il numero a sinistra di ogni errore consente di individuare le barre corrispondenti nel diagramma riportato in Figura 1.8.

Gli errori con la frequenza più elevata sono relativi alla presenza di un fattore irrazionale: la maggior parte degli studenti studia il segno del radicando non per determinare per quali valori reali il fattore sia definito ma per stabilire per quali valori questo risulta essere positivo.

Fra le risoluzioni analizzate solo sei riguardavano disequazioni in cui era presente un fattore esponenziale: nessuna di queste è stata risolta correttamente e uno degli errori commessi riguarda la determinazione del segno del fattore in base al segno dell'incognita o in base al fatto che questa fosse minore o maggiore di 1. Il primo tipo di errore si presenta in 4 delle 6 risoluzioni.

La successiva frequenza più alta riguarda lo studio del segno del polinomio di secondo grado: più del 50% degli studenti non sanno determinare per quali valori reali un polinomio di secondo grado sia positivo o negativo.

Tabella 1.4: Frequenze degli errori commessi nella risoluzione delle disequazioni

| | **Errore** | **Diseq totali** | **Diseq errate** | **Freq errore** | **% su tot** | **% su errate** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Studia fattori $< 0$ o $\leq 0$ | 113 | 98 | 52 | 46% | 53% |
| 2 | Manca campo di esistenza | 19 | 18 | 16 | 84% | 89% |
| 3 | Assimila segno radicale con segno radicando | 14 | 13 | 10 | 71% | 77% |
| 4 | Radicale positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ | 14 | 13 | 1 | 7% | 8% |
| 5 | Applica proprietà non soddisfatte | 23 | 22 | 8 | 35% | 36% |
| 6 | Assimila segno quadrato con segno base | 83 | 69 | 18 | 22% | 26% |
| 7 | Quadrato positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ | 83 | 69 | 20 | 24% | 29% |
| 8 | Esclude erroneamente lo zero | 83 | 69 | 5 | 6% | 7% |
| 9 | Svolge il quadrato del binomio | 75 | 64 | 12 | 16% | 19% |
| 10 | Esponente magg/min di zero | 6 | 6 | 4 | 67% | 67% |
| 11 | Esponente magg/min di uno | 6 | 6 | 2 | 33% | 33% |
| 12 | Segno polin. 2° gr. errato | 24 | 21 | 13 | 54% | 62% |
| 13 | $x$ positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ | 57 | 37 | 2 | 4% | 5% |
| 14 | Graf. intersezione per segno prodotto | 134 | 101 | 5 | 4% | 5% |
| 15 | Graf. prodotto per segno intersezione | 124 | 94 | 12 | 10% | 13% |

Infine in quasi il 50% delle risoluzioni lo studio dei fattori viene effettuato determinando quali valori reali rendano il fattore negativo ma costruendo il grafico per determinare il segno del prodotto scambiando gli intervalli per i quali il fattore risulta negativo con quelli in cui risulta positivo e viceversa.

Alcuni di questi errori, come ad esempio l'errata costruzione del grafico, potrebbero essere riconducibili al fatto che non sia chiaro per gli studenti il motivo per il quale si studino i segni dei fattori separatamente, e come e perché questo studio porti alla determinazione delle soluzioni della disequazione. Come anticipato all'inizio di questo capitolo, sembra che per risolvere le disequazioni a cui lo studio dei fattori dà luogo vengano applicati meccanicamente degli algoritmi errati, dei quali sarebbe interessante studiare l'origine. È come se non fosse chiaro che la richiesta della disequazione sia quella di determinare i valori che rendono il fattore positivo o negativo o che, ad esempio, $e^x$ sia il risultato di una potenza con base positiva.

Da queste riflessioni sulle procedure e sul senso dei simboli e delle rappresentazioni è derivato un raggruppamento dei singoli errori sopra descritti, secondo classi stabilite tendendo conto della loro natura.

Le classi determinate con questa ulteriore analisi sono descritte di seguito.

- *Rappresentazione*: errori dovuti ad un'errata interpretazione della simbologia dei grafici o ad un'errata traduzione nel passaggio dal linguaggio simbolico a quello grafico e viceversa. Fanno parte di questa classe i seguenti errori:
  - Errore 1: studio del segno dei fattori che compaiono a sinistra della disequazione mediante disequazioni del tipo "$(\dots) < 0$" o "$(\dots) \leq 0$" con conseguente compilazione errata del grafico dei segni;
  - Errore 14: risolvere la disequazione utilizzando un grafico per individuare l'intersezione o l'unione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$;
  - Errore 15: utilizzare un grafico per calcolare il segno di un prodotto di fattori in luogo del grafico per individuare l'intersezione.
- *Epistemologico*: errori dovuti all'applicazione di regole o proprietà valide in un ambito, in contesti in cui non sono valide. Fanno parte di questa classe i seguenti errori:
  - Errore 5: applicazione di proprietà che sono valide per alcune operazioni in espressioni contenenti una radice, per cui invece non valgono;
  - Errore 11: ricondurre lo studio del segno del fattore esponenziale al fatto che l'esponente sia maggiore o minore di 1;

   - Errore 13: considerare il fattore "$x$" positivo per tutti i valori reali.

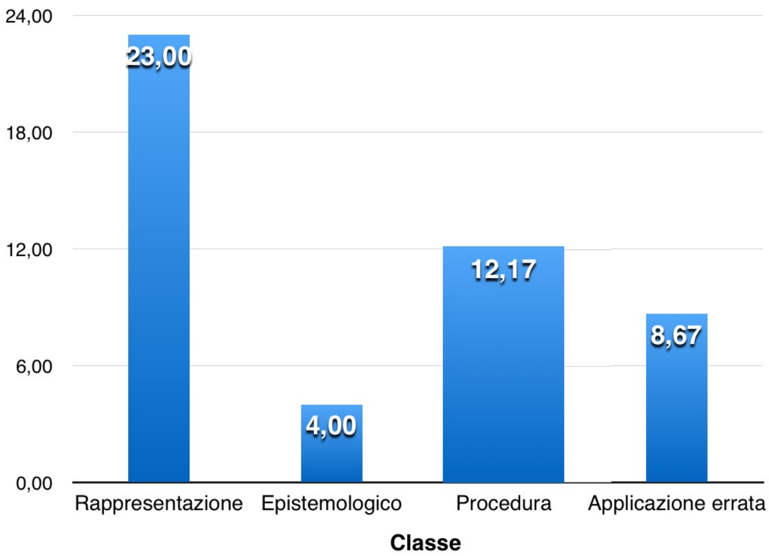
- *Procedura*: errori dovuti all'applicazione di una procedura errata o non necessaria. Appartengono a questa classe i seguenti errori:
   - Errore 2: mancata individuazione del campo di esistenza della disequazione;
   - Errore 3: assimilazione del segno dell'intero fattore radicale con il segno del suo radicando;
   - Errore 6: assimilazione del segno dell'intero fattore quadrato al segno della sola base;
   - Errore 9: svolgere il quadrato del binomio per studiarne il segno;
   - Errore 10: ricondurre lo studio del segno del fattore esponenziale al segno dell'esponente;
   - Errore 12: scorretta determinazione del segno di un polinomio di secondo grado del tipo $k - x^2$ o proveniente dallo sviluppo del quadrato di un binomio.

- *Applicazione errata*: Errori dovuti all'applicazione in maniera errata di una proprietà valida. Appartengono a questa classe i seguenti errori:
   - Errore 4: considerare il fattore radicale maggiore o uguale a zero per tutti i valori reali dell'incognita;
   - Errore 7: considerare il quadrato positivo per tutti i valori reali dell'incognita senza escludere il caso dello zero;
   - Errore 8: escludere il valore dell'incognita che annulla il fattore quadrato anche se si sta risolvendo "$(\dots)^2 \geq 0$" o "$(\dots)^2 \leq 0$".

Si osservi che le classi non contengono tutte lo stesso numero di tipi di errore, in particolare la classe *Procedura* contiene un numero di tipi di errore doppio rispetto alle altre tre. Dunque non avrebbe senso confrontare fra loro le frequenze degli errori in ciascuna classe poiché ad una di queste contribuiscono più tipologie di errore. Per questo motivo la Tabella 1.5 è accompagnata da un istogramma in cui la frequenza assoluta di ogni classe, riportata in tabella, è rappresentata dall'area della relativa barra mentre la base di ogni barra è uguale all'ampiezza della classe, valutata secondo il numero di tipi di errori in essa compresi, ovvero: 3 per la classe *Rappresentazione*, 3 per la classe *Epistemologico*, 6 per la classe *Procedura* e infine 3 per la classe *Applicazione errata*. In questo modo si potrà confrontare, in luogo delle frequenza assoluta, la densità di frequenza di ciascuna classe, rappresentata dall'altezza della barra corrispondente.

Tabella 1.5: Istogramma delle tipologie di errore suddivise per classi.

| Classe | Frequenza assoluta | Ampiezza classe | Densità di frequenza |
|---|---|---|---|
| Rappresentazione | 69 | 3 | 23,00 |
| Epistemologico | 12 | 3 | 4,00 |
| Procedura | 73 | 6 | 12,17 |
| Applicazione errata | 26 | 3 | 8,67 |




La suddivisione in classi mostra dunque che la classe con la maggiore densità di frequenza è quella degli errori di *Rappresentazione* quindi di quegli errori dovuti ad un'errata interpretazione della simbologia delle rappresentazioni grafiche o ad un'errata traduzione dal linguaggio simbolico a quello grafico. La seconda classe in termini di densità di frequenza è quella degli errori di procedura. Fra gli errori in questa classe il 3, il 6 e il 10 sono dovuti alla "confusione" del segno rispettivamente di una radice, di un quadrato e di un esponenziale con il segno dell'argomento di queste funzioni; inoltre l'errore 9 riguarda l'applicazione meccanica della formula del quadrato del binomio che viene visto come un esercizio da svolgere anziché come parte di una disequazione che ha un significato preciso. Anche questa seconda parte dell'analisi rafforza quindi l'ipotesi, confermata dall'analisi degli studi esistenti (Capitolo 2), secondo cui molti degli errori commessi nella manipolazione degli oggetti algebrici sono dovuti al fatto che gli studenti non attribuiscano alcun senso a tali oggetti e alle operazioni effettuate su di essi.

La classe con la densità di frequenza minore è quella degli errori dovuti all'applicazione di proprietà valide in alcuni ambiti, in un ambito in cui invece non sono soddisfatte. Questo primo risultato ha condotto a non considerare come oggetto di studio l'individuazione dell'origine epistemologica delle difficoltà nell'algebra elementare. Questa questione sarà ripresa in conclusione nel Paragrafo 5.4.1 per alcune osservazioni desunte dal questo lavoro. Gli studi esistenti in cui si cerca di individuare le cause delle difficoltà degli studenti nell'approccio con l'algebra elementare sono stati quindi analizzati (si veda il Capitolo 2) sulla base delle due definizioni date da Brousseau e riportate nel Paragrafo 1.2 di ostacolo di origine didattica e ostacolo di origine ontologica. Gli obiettivi con i quali è stata condotta l'intera analisi della letteratura e come questa abbia poi guidato la progettazione dello studio sperimentale sono descritti in maniera più dettagliata nel paragrafo che segue.

## 1.4 Problematica

L'alta percentuale di insuccessi nella risoluzione di disequazioni registrata nel gruppo di studenti coinvolti nell'analisi del paragrafo 1.3 è sintomo delle difficoltà che anche studenti che affrontano studi universitari scientifici incontrano con alcuni aspetti dell'algebra elementare.

Kieran (1996) suddivide le attività che riguardano l'algebra proposte a scuola in tre tipologie:

- *generational activities*: attività in cui le situazioni descritte nei problemi vengono trasformate in equazioni o espressioni algebriche;
- *trasformational activities*: attività di applicazione delle regole sulle operazioni fra monomi e polinomi, sulla semplificazione di espressioni algebriche e sulla scomposizione in fattori di polinomi;
- *global, meta-level activities*: attività che implicano la comprensione di relazioni fra grandezze che sono coinvolte in una situazione descritta, quindi attività che non riguardano esclusivamente l'algebra ma nelle quali l'algebra viene utilizzata come strumento

Le difficoltà registrate nell'ambito algebrico riguardano sopratutto la manipolazione delle espressioni letterali. Ricerche condotte a livello internazionale dagli anni '90 a oggi, riguardanti l'analisi degli errori più comuni e frequenti, hanno evidenziato alcuni fenomeni molto diffusi nell'approccio degli studenti con le espressioni algebriche, ovvero:

- l'interpretazione unidirezionale del simbolo di uguaglianza (Cusi & Malara, 2012 ; Navarra, 2009) che causa l'interpretazione di scritture quali $x - 3 = y$ come "$x - 3$ fa $y$" e la difficoltà di leggere l'uguaglianza da destra a sinistra con il significato di "$y$ è uguale alla differenza fra $x$ e 3";

- il *bisogno di chiusura* (*need for closure*) delle espressioni algebriche (Cusi & Malara, 2012 ; Caspi & Sfard, 2012) ovvero la difficoltà di vedere scritture quali $k + 1$ come un oggetto, come il risultato dell'operazione piuttosto che come un'operazione ancora da svolgere; un sintomo è l'incapacità di pensare di esplicitare l'incognita in equazioni parametriche quali $(k + 1)x = 7$ dividendo per $(k + 1)$;

- la mancanza di *structure sense* (Linchevski & Livneh, 1999 ; Hoch, 2003) cioè l'incapacità di riconoscere l'equivalenza di due espressioni che si manifesta ad esempio quando l'espressione $6x - 12$ viene trasformata in $x - 2$ dividendo tutti i suoi termini per 6, oppure quando un termine viene "staccato" dal segno che lo precede il quale viene utilizzato per svolgere un'operazione con un altro termine, ad esempio nello riscrivere l'equazione $10 - x + 3 = 4$ come $7 + x = 4$.

Fra le cause principali di questi frequenti fenomeni viene indicata la mancanza di senso delle espressioni algebriche agli occhi degli studenti (Chevallard & Bosch, 2012 ; Sfard, 1995 ; Bell, 1995).

Alla luce di queste considerazioni, nel Capitolo 2 sono stati analizzati gli studi esistenti riguardanti la didattica dell'algebra secondo due punti di vista coincidenti con la caratterizzazione che Mercier (2012) fa delle ricerche in questo campo. Secondo Mercier il percorso seguito dalle ricerche in didattica dell'algebra si divide in due strade. La prima è quella degli studi che si occupano di analizzare la situazione attuale dell'insegnamento dell'algebra. La seconda è quella relativa alla ricerca di nuove pratiche didattiche che restituiscano un senso al linguaggio simbolico agli occhi degli studenti.

L'analisi è stata quindi condotta con un duplice obiettivo.

- In primo luogo con il fine di capire da dove derivino, secondo gli studi esistenti, le difficoltà e la mancanza di significato che gli studenti trovano nel lavorare con le espressioni letterali e con gli atri oggetti dell'algebra elementare, ovvero quali caratteristiche del processo di insegnamento-apprendimento dell'algebra elementare possano causare la perdita di significato delle espressioni algebriche agli occhi degli studenti.

- In secondo luogo si è cercato di ricostruire un quadro di quali siano le proposte delle ricerche esistenti riguardo a nuove pratiche didattiche considerate efficaci nello sviluppo di quelle competenze algebriche necessarie all'assegnazione di un significato al linguaggio algebrico.

- Come conseguenza di questo secondo obiettivo, si è cercato di caratterizzare il *pensiero algebrico*, ovvero di capire quali siano le componenti del pensiero di uno studente che possono essere considerate *algebriche*.

Sulla base di quanto emerso dall'analisi degli studi esistenti, in questo lavoro si è affrontata la progettazione, la realizzazione e l'analisi di un dispositivo sperimentale fondato su un quadro teorico elaborato ad hoc, descritto nel Capitolo 3. Lo studio sperimentale, illustrato nel Capitolo 4, è stato condotto con studenti di diversi livelli scolari e finalizzato al raggiungimento dei seguenti obiettivi:

- trovare conferme o smentite di quanto riportato negli studi esistenti riguardo alle possibili cause delle difficoltà in algebra;

- individuare alcune delle variabili che favoriscono la nascita e lo sviluppo del pensiero algebrico degli studenti;

- elaborare uno strumento che metta in relazione il pensiero algebrico con alcune caratteristiche del linguaggio, tenendo conto del fatto che il linguaggio, in senso lato (verbale, non verbale, simbolico, orale, scritto, ecc. . . ) ha un ruolo un fondamentale nell'apprendimento, come oramai assodato in tutti gli studi di ambito psicologico e didattico.

# Capitolo 2

# Stato dell'arte

Come anticipato nel capitolo precedente, nell'analisi che Mercier (2012) illustra nel suo commento alla prima parte del numero speciale della rivista *Recherches en Didactique des Mathématique*, le ricerche in didattica della matematica che hanno come oggetto l'algebra elementare risultano seguire due strade principali. La prima è quella degli studi che si occupano di analizzare la situazione attuale dell'insegnamento dell'algebra; la seconda è la strada relativa alla ricerca di nuove modalità da mettere in pratica.

Nei prossimi tre paragrafi saranno illustrati risultati che rientrano nel primo filone di ricerche. L'ultimo paragrafo di questo capitolo sarà dedicato a quelle ricerche, inquadrate nel secondo filone, che propongono modalità didattiche alternative alle pratiche tradizionali di introduzione all'algebra.

## 2.1 Le difficoltà in algebra: un ostacolo di origine didattica?

Una posizione condivisa e costante nel tempo riguardo ai metodi tradizionali utilizzati nelle scuole di diversi paesi nell'insegnamento dell'algebra è quella secondo cui questa disciplina venga trattata nella scuola quasi esclusivamente a livello sintattico.

Facendo riferimento alle tre tipologie di attività algebrica definite da Kieran (1996), ovvero: generational activities, transformational activities e global, meta-level activities (descritte nel paragrafo 1.4), l'attenzione dell'insegnamento dell'algebra tende a focalizzarsi sulle attività di trasformazione e, ad esempio, le attività di produzione di espressioni o equazioni vengono proposte in task in cui l'utilizzo del linguaggio algebrico per esprimere una relazione generale è agli occhi degli studenti un passaggio imposto dall'insegnante e privo di significato o inutile (Ainley, Bills, & Wilson, 2003).

Alcuni esempi di come questa opinione sia condivisa da ricercatori di diverse nazionalità sono riportati nelle seguenti citazioni che coprono un arco temporale di quasi vent'anni:

> Traditionally, algebra in schools has been dealt with at syntactical level; the students have no "meta–control"; they know that they are allowed to do some things and not others, and obviously they sometimes make mistakes. (Menghini, 1994, pag. 13)

> Nell'usuale insegnamento l'algebra viene introdotta essenzialmente come studio delle forme algebriche, privilegiando gli aspetti sintattici, come se la manipolazione formale fosse precedente alla comprensione dei significati. (Navarra, 2009, pag. 16)

> [. . . ] l'étude de cette évolution montre que les éléments théoriques permettant de justifier les calculs et donner des moyens de contrôle aux élèves sont peu souvent explicites ou remplacés par des ostensifs peu efficaces. Si une grande insistance est relevée en géométrie sur l'utilisation des thérèmes et de la justification de leurs conditions d'application, et si nuos savons qu'en algèbre la situation est différente, il ne faut cependant pas que élèves puissent penser qu'il n'ya pas des théorèmes ou de propriétés en algèbre. (Assude, Coppé, & Pressiat, 2012, pag. 60)

Lo sbilanciamento di interesse verso gli aspetti sintattici dell'algebra scolastica in Francia è sottolineato da Mercier (2012) osservando che i professori francesi abbiano sostituito il termine "algèbre" con "calcul littéral", nome che "ne dénote rien, un calcul qui est devenu une pratique littéralement et métaphoriquement muette"(ivi, pag. 176).

Analoghe considerazioni vengono fatte da Chevallard e Bosch (2012) i quali osservano che nonostante nei programmi ufficiali francesi della classe $4^a$ (che corrisponde al terzo anno della scuola secondaria di primo grado italiana) si legga "calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques"(ivi pag. 28) l'aspetto delle espressioni algebriche viste come algoritmi di calcolo viene trascurato nell'insegnamento.

La distanza fra i programmi ufficiali francesi e l'insegnamento a scuola è ribadita da Assude et al. (2012) attraverso lo studio dei libri di testo adottati. Anche in questo articolo si riprende il tema delle espressioni algebriche prive di senso agli occhi degli studenti e si sottolinea la quasi totale assenza della definizione di espressione algebrica come algoritmo di calcolo.

La discrepanza fra i programmi ufficiali e ciò che è invece proposto nei libri e poi a scuola è presente anche nel sistema scolastico italiano. La maggiore importanza data, nella pratica scolastica, alle regole sintattiche rispetto a quella riservata alla comprensione dei significati, evidenziata dalla affermazione sopra citata di Navarra, contraddice ciò che è riportato nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* redatte dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca italiano nel 2012.[1]

A pagina 49 del documento, nella sezione dedicata alla matematica in generale, si legge infatti:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. [...] Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.

Evidente è anche la discordanza fra le *Indicazioni ministeriali* rispetto ai "[t]raguardi sullo sviluppo delle competenze" e agli "[o]biettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado" e ciò che viene proposto nei libri rivolti alle classi terze. Il traguardo proposto relativamente all'utilizzo del linguaggio simbolico algebrico dice:

> L'alunno [...] [c]onfronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi. Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.

Mentre gli obiettivi di apprendimento che riguardano il calcolo letterale sono:

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

[1]Il testo è reperibile all'indirizzo `http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf`

Nelle *Indicazioni* si parla quindi di "formalizzazioni", "linguaggio matematico", "formule" e "lettere" mentre non vengono mai utilizzati due termini che invece ricorrono nei titoli dei paragrafi dei libri di testo ovvero "monomi" e "polinomi".[2]

Critiche ai libri testo e agli stessi programmi ufficiali italiani si trovano anche andando indietro nel tempo già ai primi del '900. In una comunicazione di Vailati (1908) pubblicata negli Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici si legge infatti:

> Per ciò che riguarda l'*Algebra*, è [...] difficile attribuire ad altra causa che non sia l'ordinamento dei relativi programmi, il fatto che, nella maggior parte dei libri di testo adoperati nelle nostre scuole, non si arriva alla trattazione anche più elementare delle equazioni di primo grado, se non passando attraverso a una lunga serie di capitoli dedicati alle operazioni sui polinomi (non è esclusa la divisione), ai numeri negativi, e a ogni altra specie di "generalità" sul calcolo letterale. (Ivi, pag. 199)

Vailati attribuisce a questa disposizione la causa della visione che gli studenti hanno degli strumenti algebrici:

> Invece di riconoscere, nei segni e nei metodi dell'algebra, dei semplici mezzi per giungere con maggior speditezza e facilità a risolvere questioni aritmetiche, proponibili e risolubili anche indipendentemente da ogni espressione in formule, gli alunni hanno l'impressione di trovarsi davanti a delle difficoltà di ordine superiore [...] non aventi alcun rapporto con altre di cui si siano prima occupati. [...] [È] ben raro che essi riescano a vederne o a immaginarne la utilità e lo scopo. Si disorientano, si impazientano, si annoiano, si irritano, e finiscono troppo spesso per prendere in odio l'algebra. (Ivi, pag. 200)

Si noti che, nonostante queste osservazioni venissero fatte già più di un secolo fa, l'ordinamento reciproco di equazioni e calcolo letterale nei libri attuali è

[2]Alcuni esempi di come questi due termini siano protagonisti nei capitoli dedicati al calcolo letterale sono gli indici di sette testi attualmente in uso nelle classi terze della scuola secondaria di primo grado: *Mate.com* di A. Acquati, C. De Pascale, V. Semini, F. Scuderi, Ed. Loescher; *Matematica Teoria Esercizi Plus* di G. Bonola, I. Forno, Ed. Lattes; *La Matematica. Leggi matematiche. Per la scuola media* di E. Castelnuovo, Ed. La Nuova Italia; *Contaci!* di C. Bertinetto, A. Metiäinen, J. Paasonen, E. Voutilanen; Ed. Zanichelli; *Fare e ragionare con la matematica* di P. Lazzarini, G. Sarnataro, Ed. Libreria universitaria; *Digimat* di A. Montemurro, Ed. De Agostini; *Progetto Matematica* di M. Pellerey, Ed. SEI.

rimasto lo stesso: dei sette libri già citati solo uno propone la risoluzioni di problemi mediante equazioni di primo grado prima del capitolo sui polinomi.

Il passo successivo, ovvero l'analisi di come poi effettivamente i programmi ufficiali e i contenuti dei libri di testo vengano utilizzati in classe, si può trovare in Coulange, Ben Nejma, Constantin, e Lenfant-Corbin (2012) in cui si analizzano due studi sulle pratiche insegnanti. Il primo riguarda quattro insegnanti francesi durante il loro anno di tirocinio; il secondo analizza invece le pratiche di un'insegnante esperta durante un periodo di riforma del curricolo matematico in Tunisia. Gli approcci degli insegnanti di questi due contesti, differenti per molti aspetti, mostrano numerosi punti in comune: l'insegnamento dell'algebra è incentrato sulla sua dimensione di oggetto, si concede cioè uno spazio predominante alle tecniche che permettono di affrontare esercizi di calcolo algebrico; sembra che i problemi siano presentati solamente per essere in linea con le indicazioni del curricolo ufficiale e sempre come applicazioni, mai per introdurre o motivare il calcolo algebrico. Si riscontra inoltre in entrambi gli studi un disequilibrio fra il registro algebrico e i registri grafico e numerico; nell'articolo si sottolinea come questa tendenza sia forte anche negli insegnanti tirocinanti nonostante la dialettica fra i diversi registri sia stata curata e approfondita durante la loro formazione.

La tendenza dell'insegnamento dell'algebra ad avere come principale scopo quello di far acquisire agli studenti competenze riguardanti l'applicazione di regole di calcolo era già sostenuta da Katz (1997) secondo cui questo scopo si ritrova in tutta storia dell'algebra. Per dimostrare la sua affermazione, enunciata come un teorema, Katz prende in considerazione le tipologie di problemi riportati in testi storicamente ritenuti fondamentali per lo sviluppo dell'algebra.[3]

Questa tendenza porta gli studenti a percepire come obiettivo dello studio dell'algebra soprattutto l'aspetto della manipolazione dei simboli, delle formule e delle equazioni piuttosto che la comprensione del significato di tali oggetti (Bell, 1995) e potrebbe essere la causa di alcuni degli atteggiamenti degli studenti nei confronti dell'algebra, evidenziati da alcune ricerche, ad esempio:

> a large majority of the students of the NAEP[4] study felt that ma-

[3]Il *Papiro di Rhind*, la tavoletta d'argilla babilonese BM(British Museum) 13901, il testo chinese *Jiuzhang suanshu (Nine chapters on the Mathematica Art)*, l'*Al-jabr* di Al-Khwarizmi, l'*Ars Magna* di Gerolamo Cardano, *Vollstï¿½ndige Anleitung zur Algebra*di Eulero.

[4]National Assessment of Educational Progress.

> thematics is rule based and about half of the students considered that learning mathematics is mostly memorizing. (Kieran, 1994, pag. 157)

Con il tradizionale modo di presentare l'algebra gli studenti si trovano ad avere a che fare con oggetti, concetti e procedure che sono il risultato di anni, decenni o secoli di lavoro matematico senza conoscere le ragioni per le quali sono nati e senza potersi cimentare in prima persona nei problemi che li hanno originati. Si trovano ad affrontare una *didactical inversion*.

> Techniques have been developed and are used, if a problem has been solved, to turn the solution procedure upside down, or if it is a larger complex of statements and theories, to turn definitions into propositions and propositions into definitions, the hot inventions into icy beauty. This then, if it has affected teaching matter, is the *didactical* inversion, which as it happens may be *antididactical*. Rather then behaving antididactically, one should recognize that the young learner is entitled to recapitulate in a fashion the learning process of mankind. (Freudenthal, 1986, pag. ix)[5]

Le posizioni illustrate riguardano pratiche didattiche degli insegnanti di diverse nazionalità che non sembrano essere cambiate nel tempo. La risposta alla domanda che dà il titolo a questo paragrafo, indotta dagli studi analizzati, è quindi affermativa: le difficoltà incontrate dagli studenti nell'algebra elementare, nella manipolazione delle espressioni algebriche e nell'attribuzione di un significato e di una reale utilità degli strumenti algebrici, sono ostacoli che hanno anche un'origine didattica e sono dovute al fatto che le attività proposte dagli insegnanti sono mirate più alla memorizzazione di regole di calcolo che all'attribuzione di un significato a quelle regole o alla loro utilità nei problemi di modellizzazione.

## 2.2 Il ruolo dell'aritmetica nelle difficoltà in algebra

L'origine didattica delle difficoltà nell'approccio all'algebra non riguarda solamente le pratiche attuate nell'insegnamento della sola algebra. Di seguito saranno illustrati studi e ricerche sperimentali che dimostrano che già il modo in cui viene insegnata l'aritmetica può far insorgere alcuni di quei fenomeni

[5] Citato in Arcavi (1995), pag. 147.

che causano gli errori più frequenti nel lavorare con espressioni algebriche o con equazioni e disequazioni.

Il forte legame fra aritmetica e algebra, dal punto di vista dei processi di insegnamento e apprendimento, è evidente se si guarda la storia della matematica e la struttura del pensiero algebrico usando la lente della *comognizione* (Sfard, 2009). Sfard (1995), inquadrando lo sviluppo e la struttura della matematica in questo quadro teorico e applicando il concetto di *reificazione*[6] ai passaggi salienti della storia dell'algebra, sostiene che

> the formation of mathematical knowledge is more or less a cyclic process, a process in which the transition from a level to another follow some constant course. The particular scheme that will be used here pictures mathematics as a hierarchy in which what is conceived operationally on one level is reified into an abstract object and conceived structurally on a higher level. (ivi, pag. 16)

Secondo questa visione ogni stadio dello sviluppo della matematica è visto come un discorso sullo stadio precedente, quindi un discorso i cui oggetti erano stati concepiti come processi nello stadio precedente. L'algebra elementare è quindi concepita come un discorso sull'aritmetica. Questa concezione viene ritenuta utile per tracciare una traiettoria che guidi gli insegnanti nella didattica, infatti:

> if each layer in the hierarchy is a discourse about its predecessor, an introduction of a new layer before the student mastered the preceding one carries the risk that the learner would simply not know what the new discourse is all about. (Caspi & Sfard, 2012, pag.47)

Alcuni studi mostrano addirittura che non tutte le difficoltà nascono nel momento in cui gli studenti incontrano l'algebra ma rivelano che alcuni degli errori più frequenti derivano da errori presenti già in aritmetica. Linchevski e Livneh (1999) partendo dai risultati di una loro precedente ricerca, basata sulla risoluzione di alcune equazioni, si chiedono se gli errori commessi dagli studenti siano dovuti al fatto che negli esercizi fossero presenti delle incognite o se abbiano radici nei comportamenti aritmetici esistenti. Studenti provenienti da classi corrispondenti al primo e al secondo anno della

[6]Termine con il quale Sfard (2009, pag.71) indica la trasformazione, all'interno di un discorso, di un processo in un oggetto; trasformazione che si compie concretamente con il passaggio da una frase verbale a una nominale e che è l'inizio del processo di oggettivazione che avviene quando qualcosa che è concepito operazionalmente viene pensato e trattato dal punto di visto discorsivo, e quindi cognitivo, come un oggetto astratto.

scuola secondaria di primo grado italiana, che quindi non avevano nessuna conoscenza di algebra, hanno risolto equazioni di primo grado in cui era presente un solo termine contenente l'incognita e in cui comparivano somme e sottrazioni con numeri naturali (gli studenti non conoscevano le operazioni con i numeri interi). Sono stati registrati errori frequenti che denotano una mancanza di *structure sense* quali: separazione di un termine dall'operazione indicata, salto all'operazione successiva, ordine scorretto delle operazioni. Per investigare sulla natura di questi errori è stato realizzato un secondo esperimento in cui veniva chiesto agli studenti di risolvere brevi espressioni puramente aritmetiche aventi la stessa struttura di quelle algebriche che costituivano un membro delle equazioni dell'esperimento precedente. Sono stati registrati gli stessi tipi di errori che quindi sono dovuti, non a difficoltà legate all'operare con le lettere ma a misconcezioni già presenti in aritmetica.

L'ipotesi che il modo di insegnare l'aritmetica possa generare degli ostacoli nel successivo lavoro algebrico ha portato all'elaborazione di proposte didattiche mirate ad eliminare o affievolire tali ostacoli.

Alcune di queste partono già dalla scuola primaria e parlano di *algebrizzazione dell'aritmetica*. Questo approccio si propone di insegnare l'aritmetica andando a cercare e concentrando l'attenzione sulle componenti del pensiero algebrico che si possono trovare lavorando in un contesto esclusivamente numerico (ad esempio Brizuela & Lara-Roth, 2001). In Blanton e Kaput (2001) si descrive un tale tentativo da parte di un'insegnante in una $3^a$ primaria che, ad esempio, ha sfruttato la facilità con cui i suoi studenti hanno imparato la tabellina del 5 per introdurre problemi del tipo "$5 \times a = 20$" che gli studenti sono stati subito in grado di risolvere. O ancora ha utilizzato la metafora della bilancia per interpretare i *problemi degli addendi mancanti*. Alla fine di questa esperienza l'insegnate scrive:

> They [gli studenti] understood what the '=' sign means. When writing a number sentence such as 9=?+5, they were able to arrive at an answer. What I think is so significant about this is not one of the students said that the problem was written incorrectly. In the past, if the answer were written first, many of the children would be confused. (Blanton & Kaput, 2001, pag. 90)

Contemporaneamente, nei primi anni 2000, nasce in Italia il Progetto ArAl, un progetto che, abbracciando l'idea di algebrizzazione dell'aritmetica, realizza studi sperimentali soprattutto nella scuola primaria. Una delle ipotesi su cui le attività del progetto sono basate riguarda, appunto, il fatto che alcuni aspetti dell'insegnamento dell'aritmetica, possano giocare un ruolo fondamentale nel successivo apprendimento dell'algebra elementare, soprattutto dal punto di vista del brusco cambiamento dei metodi di insegnamento e del significato dei simboli matematici nel passaggio dall'aritmetica all'algebra:

> nell'insegnamento dell'aritmetica [...] l'uguale è essenzialmente un *operatore direzionale*: 4+6=10 significa '4 più 6 fa 10'. [...] Poi, quando l'alunno incontra l'algebra, l'uguale improvvisamente assume un significato del tutto diverso, di tipo *relazionale*. (Navarra, 2009, pag. 17)

Allo stesso modo ad esempio il simbolo "+" in $3 + 2$ è in aritmetica un'operazione da svolgere, mentre in algebra la scrittura $x + 2$ è il risultato dell'operazione di addizione e viene trattato come un unico oggetto.

Cusi e Malara (2012) spiegano che gli obiettivi sui quali le ricerche basate sull'algebrizzazione dell'aritmetica si sono concentrate sono appunto: superare le difficoltà classiche quali l'interpretazione unidirezionale del simbolo di uguaglianza o la mancanza di chiusura delle espressioni algebriche; indurre una visione strutturale delle espressioni aritmetiche e una consapevolezza del ruolo giocato dalle proprietà delle operazioni; aprire la strada alla generalizzazione e alla soluzione di problemi ed equazioni mediante metodi esplorativi e procedure informali.

La seconda ipotesi sulla quale si basano gli studi sperimentali del progetto ArAl è che il linguaggio algebrico e quello naturale vengano appresi con le medesime modalità e quindi il ruolo dell'insegnante in questo senso sia centrale. Per questo motivo le attività e le ricerche portate avanti non riguardano solo gli studenti ma anche gli insegnanti e la messa a punto di metodi e strumenti a loro supporto con lo scopo di "verificare se la prospettiva linguistica associata ad un approccio anticipato al pensiero algebrico possano motivare gli allievi nello studio dell'algebra riducendone le difficoltà."[7].

## 2.3 Pensiero algebrico: un ostacolo di origine ontogenica?

Il Progetto ArAl, così come tutti gli studi che propongono di partire dalla scuola primaria per prevenire le future difficoltà in algebra, è inquadrato

[7] La presentazione del Progetto ArAl, la descrizione delle attività e dei risultati e le pubblicazioni relative alle ricerche sono consultabili nel sito http://www.aralweb.unimore.it/site/home.html

nello stesso ambito dell'*early algebra*, ovvero degli studi che sostiengono addirittura la possibilità di introdurre già a questo livello l'insegnamento di un'*algebra precoce*. In D. Carraher, Brizuela, e Schliemann (2000) ; D. Carraher, Schliemann, e Brizuela (2001) ; D. Carraher e Schliemann (2002) ; D. W. Carraher, Martinez, e Schliemann (2008) ; A. D. Schliemann, Carraher, e Brizuela (2000) ; A. Schliemann, Carraher, e Brizuela (2012) sono illustrati e sono riportati i risultati di alcuni dei teaching experiments realizzati partendo dalla congettura che fin dall'età di 9 anni i bambini siano in grado di lavorare con le incognite, di risolvere semplici equazioni lineari e di scrivere con il linguaggio dell'algebra le relazioni che sussistono fra grandezze note e incognite di un problema.

Questi studi si contrappongono a quelli più classici riguardanti l'età ottimale per l'introduzione all'algebra in cui si sostiene che fino ad una certa età gli studenti non possiedano ancora il grado di astrazione e di maturità cognitiva necessario per affrontare l'algebra.

Una prima linea di demarcazione in questo senso è stata ipotizzata da Filloy e Rojano (1989) come risultato dell'analisi uno studio precedente (Filloy & Rojano, 1984) in cui veniva chiesto a studenti che non avevano ancora incontrato l'algebra di risolvere alcune equazioni. Il risultato di questa analisi è stata l'individuazione di un *didactic cut* che, secondo gli autori, si verifica nel momento in cui gli studenti incontrano per la prima volta equazioni lineari con occorrenze dell'incognita in entrambi i membri. Per questo motivo distinguono fra equazioni "aritmetiche" – del tipo $ax + c = d - e$ – e equazioni"non aritmetiche" – del tipo $ax + b = cx + d$, eventualmente con $d = 0$. Infatti mentre il primo tipo di equazioni può essere risolto applicando ordinatamente a $d - e$ le operazioni inverse di quelle che compaiono a primo membro, il secondo tipo di equazioni viene risolto dal loro campione di studenti solo per prove ed errori. Gli autori affermano quindi che la transizione dalla risoluzione di equazioni del primo tipo a quella del secondo tipo non è immediata ma "it's necessary to construct, or acquire, some elements of an algebraic syntax, properly speaking"(ivi, pag. 19). Affinchè gli studenti riescano in questa transizione sono necessari dei cambiamenti nelle abitudini aritmetiche, cambiamenti che non possono avvenire spontaneamente. Allo stesso tempo le conoscenze aritmetiche devono essere preservate. "What is required is an operational level of knowledge which can be placed between the arithmetical and the algebraic one, i.e. a level of pre-algebraic knowledge" (ivi, pag. 20). "

È con lo scopo di individuare i limiti delle procedure informali utilizzate dagli studenti per cimentarsi con il calcolo letterale che Herscovics e Linchevski (1994) hanno realizzato uno studio sottoponendo a 27 studenti di 12-13 anni (quindi di una classe corrispondente al secondo anno della scuola secondaria di primo grado italiana) una batteria di 29 equazioni che differivano fra loro per le operazioni coinvolte, il numero di occorrenze dell'incognita e il fatto che l'incognita comparisse o meno in entrambi i membri dell'equazione. L'analisi dei risultati di tale studio porta i due ricercatori a rifiutare la tesi del didactic cut di Filloy e Rojano definendo la linea di demarcazione fra aritmetica e algebra in termini di *cognitive gap* dovuta a "the inability to operate with or on the unknown"(ivi, pag. 63). La giustificazione a questa affermazione sta nel fatto che

> at no time did we see any evidence of students directly performing operations on or with the unknown. Thus we can conclude that students solve these equations by working around the unknown at a purely numerical level".(Herscovics & Linchevski, 1994, pag. 70)

È chiaro il fatto che venga riconosciuta l'esistenza di un ostacolo ontologico nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. Gli autori scrivono infatti

> If even after an introduction to algebra, students experience difficulties in performing operations with or on a letter representing an unknown or a generalized number, one can hardly expect them to do so spontaneously without any instruction. Although the letter in an equation or on algebraic expression may have a numerical referent in the pupil's mind, this does not necessarily render it operational. Meaning for these operations with literal symbols still has to be constructed. (ivi, pag. 63)

Le ricerche basate sull'algebrizzazione dell'aritmetica e le attività progettate nell'ambito dell'early algebra dimostrano la possibilità che gli studenti siano in grado di comprendere il significato di una lettera in un'espressione algebrica addirittura già alla scuola primaria. Questo non significa che essi siano in grado da soli di applicare spontaneamente le regole per operare con le incognite ma probabilmente sarebbero in grado di "scoprirle" e comprenderne il significato già al primo anno della scuola secondaria di primo grado se opportunamente guidati dall'insegnante. E probabilmente le difficoltà e gli atteggiamenti negativi degli studenti nei confronti dell'algebra potrebbero derivare anche dal fatto che incontrino questo nuovo modo di parlare di numeri e operazioni troppo tardi, ovvero dopo che per sette anni hanno interpretato i simboli della matematica utilizzando i tradizionali significati dell'aritmetica.

## 2.4 La ricerca di nuove pratiche per restituire un senso all'algebra

Come illustrato nei paragrafi precedenti, una delle cause principali degli errori commessi nella manipolazione algebrica è riconosciuta nella mancanza di senso, agli occhi degli studenti, delle espressioni algebriche. La convinzione diffusa che uno dei fattori che porta a questa mancanza di significato sia la trattazione prettamente sintattica delle espressione algebriche ha portato alla ricerca di nuovi approcci all'algebra che producano un apprendimento più significativo negli studenti mirato alla comprensione del significato del linguaggio algebrico anziché alla memorizzazione sterile di regole di calcolo apparentemente arbitrarie.

Alcuni (ad esempio Bulmer, 2001) sostengono addirittura che l'obiettivo che l'attuale insegnamento dell'algebra dovrebbe porsi sia esclusivamente la costruzione di espressioni algebriche a partire da un problema e la comprensione del loro significato, trascurando invece la parte relativa alla loro manipolazione, ovvero alle regole di svolgimento delle operazioni fra polinomi e frazioni algebriche. Questa posizione viene giustificata affermando che gli studenti che utilizzeranno l'algebra nei loro corsi universitari metteranno in gioco solamente le loro abilità di modellizzazione di un problema e di interpretazione dei risultati, mentre la manipolazione potrà essere eseguita dai sempre più elaborati Computer Algebra Systems (CAS).

Alcuni degli approcci proposti come alternativa a quello tradizionale, sono basati sull'introduzione delle espressioni algebriche interpretandole come algoritmi di calcolo seguendo il modello proposto da Chevallard (2007):

> L'algèbre élémentaire est ainsi la science ***des programmes de calcul*** (sur les nombres), et en particulier la science ***du calcul sur les programmes de calcul.***(ivi, pag. 167)

Una proposta in questo senso è avanzata da Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, e Gascón (2012) che intendono l'algebra elementare come un processo di algebrizzazione che ha inizio con gli algoritmi di calcolo e con la loro modellizzazione attraverso espressioni scritte che includono scritture numeriche e letterali. Tale processo si sviluppa poi secondo tre tappe. La prima ha luogo quando si smette di considerare l'algoritmo come composto da diversi passaggi successivi, quindi non come un processo ma come un tutt'uno attraverso un'espressione scritta. Questo passaggio mette in luce l'importanza dell'ordine delle operazioni e delle parentesi, fa sorgere il concetto di equivalenza di espressioni algebriche e fa nascere il bisogno di tecniche di manipolazione di queste ultime. La seconda tappa si raggiunge quando si cerca di risolvere problemi che richiedono di individuare i numeri per i quali due algoritmi restituiscono lo stesso valore. È in questa tappa che si sviluppano i concetti relativi alle equazioni in una incognita, con o senza parametri. L'ultima tappa si realizza quando non si limita il numero dei parametri. Questo processo è il primo livello della modellizzazione algebrico-funzionale che ha inizio quando si affrontano problemi che fanno riferimento alla variazione di un valore in funzione di un altro. Un esempio di applicazione di questo modello è descritto a partire da pag. 101 dell'articolo citato.

Nell'approccio funzionale proposto ad esempio da Kieran (1994) le lettere assumono il significato di "tutti i possibili valori" e gli studenti vengono guidati nella riflessione su come cambia il valore di una grandezza in relazione alla variazione di un'altra. Il teaching experiment proposto da Kieran è progettato tenendo conto della duplice concezione di processo-oggetto dei concetti algebrici. Le due dimensioni di processo e di oggetto dei concetti matematici in generale sono descritte come segue da Sfard (1991).

> Seeing a mathematical entity as an object means being capable of referring to it as if it was a real thing - a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize th idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details. [...] In contrast, interpreting a notion as a process implies regarding it as a potential rather than actual entity, which comes into existence upon request in a sequence of actions. (Ivi, pag. 4)

Il percorso focalizzato sulla dimensione di oggetto delle funzioni parte dall'analisi e dal confronto di grafici su un piano cartesiano; quello basato sulla dimensione di processo è realizzato con l'utilizzo di un software che consente di immettere l'algoritmo che consente di risolvere un problema affrontato.

Alcuni anni dopo l'esperimento di Kieran, Arzarello e Robutti (2001) hanno utilizzato questo tipo di approccio abbracciando anche l'ipotesi di Radford (2000) secondo la quale il passaggio alle formule generali algebriche è favorito e supportato da due fondamentali funzioni del linguaggio, quella deittica e quella dell'azione generativa. Nel loro teaching experiment studenti del primo anno di un liceo scientifico erano guidati nell'interpretazione di un grafico che si realizzava col movimento di un loro compagno. "This genetic process allows students: (i) producing a mathematical sense for the graphs they see on the screen and (ii) starting and supporting their transition to the algebraic register. "(Arzarello & Robutti, 2001, pag. 35)

Nello stesso periodo, in un articolo che descrive la realizzazione di un percorso didattico, Britt (2001) sostiene l'efficacia dell'approccio mediante le equazioni lineari, evidenziando che lo sviluppo storico dell'algebra è avvenuto proprio a partire dalla risoluzione di equazioni. Questo tipo di approccio parte dalle procedure informali utilizzate dagli studenti, prima della trattazione dell'algebra, per risolvere equazioni di primo grado. L'articolo riporta i risultati della realizzazione di un percorso graduale alla fine del quale gli studenti riescono ad operare sulle incognite sommandole e cancellando le occorrenze uguali nei due membri delle equazioni. Il teaching experiment era stato appunto progettato per verificare l'esistenza del gap cognitivo definito da Herscovics e Linchevski (1994). Britt evidenzia quindi analogie e differenze fra i due esperimenti con lo scopo di spiegare il differente esito.

Alcuni (ad esempio Campbell, 2001) propongono di utilizzare la teoria dei numeri e quindi lo studio delle proprietà dei numeri interi per incoraggiare e favorire l'utilizzo delle lettere come numeri generalizzati prima di una vera e propria introduzione al calcolo letterale. Arcavi (1995) commenta un'attività in cui le discussioni emerse nel risolvere i task portano gli studenti ad utilizzare i simboli per mostrare la struttura delle relazioni fra i numeri e ad apprezzare ciò che i simboli consentono di fare in termini di scoperta e dimostrazione di nuove relazioni. La sintassi emerge dall'esigenza di voler progredire nella risoluzione di un problema. Essa è quindi motivata e acquista un significato.

Lannin, Barker, e Townsend (2006) descrivono un'attività costruita con l'utilizzo di problemi di generalizzazione che coinvolgono pattern geometrici o successioni numeriche e analizzano le procedure informali che gli studenti applicano per risolvere problemi inquadrati in scenari reali che richiedono l'individuazione di un certo termine della successione. Gli autori descrivono il legame fra l'uso di formule ricorsive o esplicite con le rappresentazioni personali della situazione costruite dagli studenti e deducono che questi tendono a sviluppare regole ricorsive con connessioni iconiche alla situazione e regole esplicite senza tali connessioni. Suggeriscono, infine, non di inibire l'utilizzo di formule ricorsive, ma piuttosto di enfatizzare il legame fra queste e le formule esplicite.

Alcune proposte (ad esempio Bednarz, 2001) utilizzano più di uno degli approcci illustrati partendo da un contesto di problemi solving.

Ainley et al. (2003) ; Ainley, Bills, e Wilson (2005a, 2005b) hanno condotto uno studio avente come obiettivo la progettazione di task adatti a un apprendimento significativo dell'algebra per studenti di 11-13 anni. I task sono costruiti in modo da bilanciare le tre tipologie di attività algebriche identificate da Kieran (1996) e sfruttano la familiarità degli studenti con le strutture aritmetiche le cui proprietà possono essere descritte in modo generale attraverso il linguaggio algebrico. Gli autori definiscono una *purposeful task* cone una task "which has a meaningful outcome for the learner, in terms of an actual or virtual product, the solution of an engaging problem, or an argument or justification for a point of view" (Ainley et al., 2003, pag. 2).

Proposte di tipologie di problem isi trovano in Bell (1995). Bell individua tre modalità principali dell'attività algebrica scolastica: generalizing, forming and solving equations, working with functions and formulae. Basandosi su ricerche precedenti di altri autori propone specifiche classi di problemi, fornendone anche degli esempi concreti, da lui utilizzati in studi sperimentali, per ciascuna di queste tre attività.

Tutti i lavori citati hanno la caratteristica comune di partire dalle procedure informali e dai preconcetti degli studenti, considerati fondamentali punti di partenza per la costruzione dei concetti formali e lo sviluppo di schemi di ragionamento algebrico più tradizionali (Johanning, 2004 ; Caspi & Sfard, 2012). Fra gli studi analizzati si trovano infatti proposte su come preparare gli studenti prima di una vera e propria introduzione all'algebra o a determinati oggetti algebrici. Linchevski (1995) propone un'idea di prealgebra come un insieme di attività mirate a sviluppare i primi e concreti preconcetti necessari allo sviluppo dei concetti algebrici più elevati e astratti.

> Pre−algebra can be introduced as a preparation course before the beginning of formal algebra. However, pre−algebraic ideas and activities can also be used intermittently, whenever appropriate, at the beginning of a new chapter in formal algebra, or even in early arithmetic.(ivi, pag. 119)

Per quanto riguarda la produzione di espressioni algebriche per esprimere una relazione generale fra grandezze, Linchevski evidenzia il ruolo che l'esempio può avere in questo passaggio parlando di *Esempio paradigmatico* e *Ratifica o rifiuto di una regola generale per mezzo di esempi.* Si parla di esempio paradigmatico quando uno studente, eseguendo calcoli aritmetici che hanno la medesima struttura, deduce una regola generale che può riuscire a scrivere mediante il linguaggio simbolico. Ad esempio calcolando "a sequence as 3 + 5 - 5 = 3, 18 + 9 - 9 = 18 he or she might eventually arrive at a generalization and conclude that $a + b - b = a$"(ivi, pag. 116). Per quanto riguarda la verifica di una regola mediante esempi osserva che

> Although this distinctive, noninductive mode of generalization is almost completely neglected in school algebra, it was suggested that activities involving examples of the types described by Lee and Wheeler (1989)[8] might serve as a cognitive organizer in the environment of pre-algebra. (Ibidem.)

Un nutrito filone nelle ricerche riguardanti l'insegnamento e l'apprendimento dell'algebra, ma che non sarà approfondito in questo lavoro, comprende studi sull'uso delle nuove tecnologie sia per favorire la comprensione del significato delle espressioni algebriche (ad esempio Arzarello & Robutti, 2001 ; Ainley et al., 2005a ; Chaachoua, Chiappini, Pedemonte, Croset, & Robotti, 2012 ; Haspekian, 2012) sia come supporto per gli insegnanti nell'individuazione degli aspetti del lavoro algebrico in cui ciascuno studente ha difficoltà e nella selezione di task appropriati per superare tali difficoltà (ad esempio Grugeon-Allis, Pilet, Chenevotot-Quentin, & Delozanne, 2012).

Lo studio delle ricerche finalizzate alla progettazione di nuove pratiche di insegnamento dell'algebra elementare insieme alle conclusioni scaturite dall'analisi della letteratura sulle cause delle difficoltà nell'approccio con questa branca della matematica scolastica ha portato alla formulazione delle ipotesi che si è cercato di verificare progettando e realizzando uno studio sperimentale e che sono descritte e argomentate nel paragrafo seguente.

## 2.5 Ipotesi di ricerca scaturite dall'analisi degli studi esistenti.

Nel Paragrafo 1.4 si è spiegato che uno degli obiettivi dello studio della letteratura esistente sull'insegnamento/apprendimento dell'algebra elementare era quello di approfondire le conoscenze sulle cause delle difficoltà che gli studenti trovano nel lavorare con gli oggetti algebrici.

Come anticipato nel Paragrafo 2.3, questo ha portato alla formulazione dell'ipotesi principale su cui si basa lo studio sperimentale realizzato, ovvero che le difficoltà nella comprensione e nell'utilizzo delle espressioni algebriche non siano di origine ontogenica ma che, al contrario, già studenti del primo anno della scuola secondaria di primo grado siano in grado di comprendere

[8] Lee e Wheeler (1989) hanno realizzato uno studio in cui viene chiesto a studenti di livello 10 (corrispondente all'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado italiana) di stabilire se uguaglianze del tipo $\frac{2x+1}{2x+1+7} = \frac{1}{8}$ o $(a^2+b^2)^3 = a^6+b^6$ fossero sicuramente vere, forse vere, mai vere. Agli studenti che esibivano una regola errata chiedevano di provare sostituendo dei numeri.

il significato delle lettere in un'espressione e, se opportunamente guidati, di costruire espressioni letterali a cui essi stessi attribuiscono un significato.

Le critiche mosse alle tradizionali pratiche degli insegnanti dagli studi discussi nel Paragrafo 2.1, che riconoscono nelle attività algebriche tradizionalmente proposte a scuole solamente il fine della memorizzazione di regole di calcolo non giustificate, hanno portato invece ad ipotizzare l'origine didattica della mancanza di senso delle espressioni algebriche agli occhi degli studenti considerata causa di alcuni degli errori tipici nella manipolazione degli oggetti algebrici.

La frase "se opportunamente guidati" implica infatti che la possibilità di produrre espressioni letterali e dotarle di un significato sia condizionata anche da variabili dipendenti dall'insegnante e dal modo in cui questo predispone, conduce e gestisce le attività. La ricostruzione di un quadro sulle proposte di nuove pratiche didattiche, secondo obiettivo dell'analisi della letteratura, ha portato alla formulazione delle ipotesi seguenti:

i) seguendo la proposta di Chevallard[9] di legare le espressioni algebriche agli algoritmi di calcolo: costruire la scrittura in linguaggio simbolico di un'espressione algebrica a partire dalla formulazione a parole dell'algoritmo di calcolo aritmetico corrispondente favorisce la comprensione del significato dell'espressione;

ii) sulla base di quanto suggerito da Bell (1995):[10] i problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali che possono essere poi riscritti mediante il linguaggio simbolico;

iii) partendo dalle osservazioni di Linchevski (1995) sul ruolo dell'esempio nella generalizzazione:[11] il passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico nella descrizione di un algoritmo può essere favorito dall'applicazione dell'algoritmo in un certo numero di casi particolari che, dando luogo ad espressioni numeriche aventi la stessa struttura, inducono la produzione di una espressione letterale avente la stessa struttura di quelle aritmetiche già scritte.

Per verificare le ipotesi formulate è stato progettato uno studio sperimentale, descritto nel dettaglio nel Capitolo 4, costituito da alcune attività

[9] Si veda pag. 40.

[10] Le proposte di Bell, anticipate nel paragrafo 2.4, sono discusse più dettagliatamente a pag. 3.2.1

[11] Si veda pag. 43.

realizzate con classi di studenti di diversi livelli scolastici. Il quadro teorico e la metodologia che hanno guidato la progettazione dello studio sperimentale e l'analisi dei dati ricavati, che comprendono anche ipotesi sulla conduzione delle attività, sono illustrati nel capitolo seguente.

# Capitolo 3

# Quadro teorico-metodologico

## 3.1 Quadro teorico

### 3.1.1 *Pensiero algebrico*: una caratterizzazione.

Una questione fondamentale da chiarire prima di studiare qualsiasi aspetto dell'insegnamento e dell'apprendimento dell'algebra è l'individuazione della linea di demarcazione fra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico ovvero quali siano le attività del pensiero matematico che possono essere considerate algebriche. Gli estratti seguenti individuano una caratteristica fondamentale per parlare di pensiero algebrico.

> [...] but there are others [*problems*] that fall into a class to which the term algebraic is appropriately applied. These do not concern specific concrete objects, such as bread and beer, nor do they call for operations on known numbers. (Boyer, 1968, pag. 16)

.

> I use the term algebra with respect to any kind of mathematical endeavor concerned with generalized computational processes, whatever the tools used to convey this generality. (Sfard, 1995, pag. 18)

> algebraic thinking is the specific way in which students conceptually acted in order to carry out the actions required by generalizing tasks. That which makes 'algebraic' the students' thinking is the distinctiveness of the mathematical practice in which they engaged, namely, the investigation and expression of the *general* term of a pattern – something that may not be required at the

> level of the arithmetic thinking. This is why, for us, the students were already thinking algebraically when they were dealing with the production of a message.(Radford, 2000, pag. 258)

Si può quindi affermare che l'aspetto sottolineato in queste definizioni, e che quindi in questo studio sarà considerato come caratterizzante il pensiero algebrico, riguarda i processi di generalizzazione. Saranno quindi considerate algebriche le situazioni in cui non ci si occupa di dati noti o particolari, anche quando queste non comprendono l'uso delle lettere o del linguaggio simbolico.

Per questo motivo, in questo studio, sarà considerata un'attività del pensiero algebrico anche la descrizione attraverso il solo linguaggio verbale di relazioni o algoritmi generali che non riguardano cioè un valore preciso.

### 3.1.2 *Esperienza laboratoriale di apprendimento*: un tentativo di creare una situazione a−didattica

Uno dei paradossi individuati da Brousseau che riguarda la *posizione insegnante* come elemento del sistema didattico consiste nel fatto che se l'insegnante dice allo studente ciò che vuole, allora non potrà più ottenerlo poiché tutto ciò che l'insegnante fa affinché l'alunno produca i comportamenti da lui voluti lo privano delle condizioni che sono invece necessarie a produrre un apprendimento. I comportamenti prodotti dall'alunno non saranno infatti il risultato di tentativi, di sue scelte o di modifiche delle sue conoscenze precedenti. Speculare a questo è il paradosso che riguarda il ruolo dell'alunno: se questo accetta che l'insegnante gli fornisca le risposte, non avrà l'occasione di stabilirle da sé e quindi non le apprenderà. La soluzione a questo doppio paradosso individuata da Brousseau consiste nell'instaurare una *situazione a−didattica* (Polo, 2014).

> Una situazione è a-didattica relativamente ad un sapere $s$, se contiene le condizioni *per poter essere vissuta dall'alunno indipendentemente dalle istanze didattiche*. [. . . ] Si tratta quindi di un "contesto" (ambiente di apprendimento) nel quale il sapere da apprendere/da insegnare sia necessario alla determinazione della soluzione di un problema. (ivi, pag. 6)

> These problems, chosen in such a way that students can accept them, must make the students act, speak, think, end evolve by their own motivation. Between the moment the student accepts

> the problem as if it were her own and the moment when she produces her answer, the teacher refrains from interfering and suggesting the knowledge that she wants to see appear. (Brousseau, 2002, pag. 30)

> Occorre che l'insegnante riesca a far in modo che l'alunno elimini dalla situazione i presupposti didattici, che la risoluzione del problema divenga per l'alunno indipendente dal desiderio dell'insegnante: la devoluzione che l'insegnante deve cercare di fare affinché l'alunno apprenda è dunque quella di una situazione a−didattica. Vi è uno spostamento di responsabilità in rapporto al sapere: l'alunno in una situazione a−didattica diventa responsabile in rapporto al sapere. (Bessot, 1994, pag. 55)

La conoscenza costruita attraverso una situazione a−didattica resta comunque legata al problema specifico risolto; è quindi necessario che la devoluzione sia seguita da un momento in cui questa conoscenza viene discussa con l'intera classe, generalizzata e collocata all'interno della disciplina. Questo processo è denominato da Brousseau di *istituzionalizzazione*.

Durante il momento di devoluzione la risposta fornita dagli alunni non è sempre subito quella corretta attesa dall'insegnante. Risulta importante quindi anche il modo in cui vengono gestite le risposte inattese o considerate errate. Nei confronti di queste l'insegnante può comportarsi in due modi diversi:

> **rilevare l'errore ed esplicitarlo all'alunno**, oppure, **rilevare l'errore e tenerlo per sé**. Nel primo caso, la decisione interrompe nell'alunno la situazione di conflitto e rinvia la costruzione della nuova conoscenza. Con la seconda decisione l'insegnante, non esprime giudizi sull'errore (percepibili dall'alunno) ma accetta che l'alunno sbagli e incoraggia la ricerca di altre risposte, ristrutturando le condizioni della situazione che permettano tale ricerca. Ciò può favorire l'innescarsi di un processo di *devoluzione all'alunno di una responsabilità nei confronti del sapere*, e permettere la costruzione della nuova conoscenza.[1](Polo, 2014, pag. 8)

Di seguito si parlerà *esperienza laboratoriale di apprendimento* in riferimento ad una lezione progettata in modo che possa potenzialmente dar

[1]Enfasi come nell'originale.

luogo ad una situazione a−didattica organizzata in due fasi: la prima in cui gli studenti, individualmente o organizzati in gruppi o coppie, vengono chiamati a risolvere un problema la cui soluzione può far emergere la conoscenza che si vuole venga appresa; la seconda in cui le risposte vengono condivise e accettate o rifiutate dall'intera classe in una discussione collettiva mediata dall'insegnante. Nella prima fase l'insegnante si astiene dal dare risposte agli studenti o dall'assumere comportamenti che possano spingerli in una determinata direzione nella risoluzione del problema. Durante entrambe le fasi, affinché il processo di devoluzione non venga interrotto, l'insegnante non espliciterà gli errori rilevati ma li terrà per sé incoraggiando la ricerca di altre soluzioni e ponendo domande che incoraggino la riflessione sulle risposte fornite e l'individuazione di quelle corrette insieme alle argomentazioni atte a dimostrare la correttezza delle risposte stesse così come dei procedimenti adottati per ottenerle.

L'importanza data alla discussione collettiva è giustificata dall'ipotesi sostenuta a priori e che si vuole verificare, insieme a quelle già illustrate nel Paragrafo 2.5, in questo studio secondo la quale:

iv) la discussione collettiva in cui gli studenti cercano di descrivere ai compagni il procedimento seguito per risolvere un problema favorisce la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa.

L'*esperienza laboratoriale* dovrà essere seguita da una fase in cui l'insegnante, insieme alla classe, *istituzionalizza* le conoscenze e i saperi costruiti, nuovi o già introdotti, attraverso enunciati e definizioni condivise. È in questa fase che ha inizio il processo di istituzionalizzazione della nuove conoscenze.

In generale il processo di insegnamento/apprendimento non si conclude con il completamento del processo di istituzionalizzazione ma comprende anche il processo di valutazione del sapere $s$ che si intendeva costruire. Il processo di valutazione non sarà trattato in questo studio.

### 3.1.3 *Registri colloquiali e registri evoluti*: un possibile strumento per analizzare la genesi di processi di generalizzazione?

**Linguaggio e apprendimento**

Ciò che interessa del linguaggio e della comunicazione è il ruolo che questi hanno nell'apprendimento. Le teorie riguardanti questo ambito possono essere distinte in base all'interpretazione che danno del rapporto fra *noesis* e *semiosis*, ovvero fra la conoscenza e la rappresentazione della conoscenza. Ferrari (2004) fa una breve analisi in questo senso dei principali autori che si sono occupati di questo argomento. Da questo punto di vista è possibile considerare in qualche modo simili le posizioni di Dubinsky, Lakoff e Núñez[2] secondo cui lo sviluppo del pensiero è preliminare ai processi di comunicazione e il linguaggio è il riflesso dell'attività cognitiva ma non ha nessun ruolo nella costruzione della cultura. È in un certo senso opposta a queste la concezione di Sfard (2009) secondo cui "il pensiero è una forma di comunicazione"(ivi, pag. 110). Duval e Radford sostengono la centralità della funzione strumentale del linguaggio. In particolare Duval sostiene che non esista noesis senza semiosis e sottolinea l'importanza della rappresentazione in matematica in cui gli algoritmi operano appunto sulle rappresentazioni e non sui concetti. Il ruolo del linguaggio nella costruzione della conoscenza è chiaramente sostenuto da Radford (2000) che spiega:

> Instead of seeing signs as the reflecting mirrors of internal cognitive processes, we consider them as tools or protheses of the mind to accomplish actions as required by the contextual activities in which the individuals engage. [. . . ] Signs hence have a double life. On the one hand, they function as tools allowing the individuals to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social realty is objectified. (ivi, pag. 241)

In questo lavoro si condivide il punto di vista secondo cui il linguaggio e la comunicazione abbiano un ruolo attivo nell'apprendimento e siano parte integrante della ragione stessa. Quest'ultima affermazione è ben esplicata dalla metafora della mangrovia di Andy Clark:

> La mangrovia cresce da un seme galleggiante che si stabilisce nell'acqua, mettendo radici nei bassi fondali fangosi. La pianticella rivolge le complesse radici verticali attraverso la superficie

[2] Per i riferimenti bibliografici in merito si rimanda a Ferrari (2004).

> dell'acqua, dando vita a ciò che sembra a tutti gli effetti un piccolo albero che poggia su una palafitta. Tuttavia il complesso sistema delle radici aeree, prende ben presto a trattenere terreno galleggiante, erbacce e triti. Col passare del tempo, l'accumulo del materiale trattenuto forma una piccola isola. Trascorso altro tempo, l'isola diventa sempre più grande. Un numero crescente di isole simili può alla fine fondersi, estendendo effettivamente la battigia al di là degli alberi. Per tutta la durata di questo processo, e nonostante le nostre precedenti intuizioni, è il territorio ad essere progressivamente costruito dagli alberi. [...]
>
> Il linguaggio pubblico e la ripetizione interna delle frasi agiranno, in questo modello, come le radici aeree dell'albero di mangrovia: le parole serviranno da punti di appoggio in grado di attrarre e posizionare nuovi materiali intellettuali da aggiungere, di creare isole di pensiero di secondo livello caratteristiche del paesaggio cognitivo dell'homo sapiens. (Clark, 1997, pag. 182)[3]

Il rapporto fra linguaggio e apprendimento, in questo caso dell'algebra elementare, è stato analizzato, in accordo con la definizione di pensiero algebrico adottata in questo lavoro[4], dal punto di vista dei processi di generalizzazione. Il linguaggio e i processi di generalizzazione sono stati messi in relazione per mezzo della classificazione dei *registri* proposta da Ferrari (2004, 2007, 2012) e riassunta nel paragrafo che segue.

### Registri colloquiali e registri evoluti

Ferrari (2004, 2007, 2012) prende dalla linguistica la definizione di registro e la distinzione fra registri colloquiali e registri evoluti, facendo anche uso di alcuni concetti della linguistica funzionale che è il settore della linguistica (di orientamento pragmatico) che studia le forme del linguaggio in relazione alle loro funzioni.

Le tre funzioni fondamentali esercitate dal linguaggio, secondo Halliday, sono: (i) ideazionale (che riguarda l'individuazione dei riferimenti e la determinazione della verità), (ii) interpersonale (che riguarda le reciproche influenze fra i partecipanti allo scambio), (iii) testuale (che riguarda la costruzione del testo).

Per poter studiare le funzioni di un testo occorre analizzare anche il contesto in cui questo è prodotto. Il contesto può essere analizzato secondo tre punti di vista: (i) contesto di situazione (legato alle circostanze), (ii) contesto

[3] Citato in Gola e Adornetti (2009, pag. 88).

[4] Si veda il Paragrafo 3.1.1.

di testo (relativo alle altre parti del testo), (iii) contesto di cultura (relativo ai sistemi di convinzioni e di conoscenze dei partecipanti).

Il *registro*, inteso come "varietà linguistica basata sull'uso" (Ferrari, 2004), è ciò che lega il testo al contesto. Esso riguarda quindi le scelte linguistiche che il parlante effettua in base alla funzione che il testo svolge e in base al contesto, di situazione, di cultura o di testo, in cui il testo viene prodotto.

Per descrivere e giustificare gli indicatori che vengono presi in considerazione nella caratterizzazione dei diversi tipi di registri, è necessario fare uso di alcuni concetti della pragmatica, che è la parte della semiotica che riguarda la relazione fra i segni e il loro uso, descritti di seguito:

**indicali** (o simboli deittici): parole la cui interpretazione richiede informazioni sulla situazione in cui sono state prodotte ovvero riguardo al tempo (oggi, ieri, ...), agli interlocutori (io, tu, noi, ...), alla collocazione spaziale (questo, quello, ...); il tipo di riferimento associato a queste parole è detto *deissi*;

**atti linguistici:** enunciati che non hanno solo lo scopo (come invece succede con le proposizioni) di descrivere un contenuto o la sua veridicità ma anche quello di comunicare atteggiamenti, convinzioni e azioni del parlante e di modificare gli atteggiamenti, le convinzioni e le azioni del ricevente;

**implicatura:** parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva solo dalla sua analisi grammaticale o lessicale ma anche dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto;

**cooperazione e principio di rilevanza:** ogni scambio comunicativo segue i principi di cooperazione e di rilevanza; il principio di cooperazione è espresso da Grice per mezzo di quattro massime: (i) quantità (la quantità dell'informazione deve essere proporzionata alla situazione), (ii) qualità (le affermazioni devono avere un certo grado di verità e affidabilità), (iii) relazione (le affermazioni scambiate devono avere un certo grado di pertinenza con l'oggetto dello scambio), (iv) modo (i modi devono essere adeguati agli scopi); il principio di rilevanza di Sperber e Wilson afferma che i messaggi scambiati devono essere il più possibile rilevanti per gli scopi dello scambio.

Come osservato da Ferrari (2004), nei discorsi matematici spesso questi elementi e principi non sono utilizzati. Ciò causa non poche difficoltà agli studenti che, invece, basano su questi le loro produzioni e interpretazioni di testi (scritti o orali) producendo discorsi matematicamente non accettabili o interpretando come atti linguistici enunciati che hanno solo un valore proposizionale, e ricavando implicature da caratteristiche del testo che sono dovute prevalentemente a ragioni tecniche, ad esempio, di trattamento.

Come anticipato, utilizzando i concetti della linguistica funzionale e della pragmatica illustrati, Ferrari (2004, 2007, 2012) propone una caratterizzazione dei registri *evoluti* e dei registri *colloquiali*. I registri evoluti sono quelli normalmente utilizzati nella comunicazione scientifica ma non è possibile darne una definizione precisa, infatti ci sono registri estremamente evoluti o registri estremamente colloquiali ma non sempre è possibile distinguere quale fra due registri sia più evoluto dell'altro. È comunque possibile delineare delle differenze che caratterizzano un tipo di registro piuttosto che l'altro.

Anche se non esiste una corrispondenza precisa si può dire che i registri evoluti siano più adatti alla modalità scritta mentre quelli colloquiali alla modalità orale, anche se esistono testi scritti in cui si usano registri colloquiali e produzioni orali che necessitano di un registro evoluto. Poichè alcune caratteristiche dei due registri derivano dal fatto di essere legati in prevalenza con una di queste due tipologie di produzione testuale, è opportuno sottolineare alcune caratteristiche dei testi scritti e dei testi orali che saranno utili in seguito a delineare le caratteristiche dei registri evoluti e dei registri colloquiali.

Un testo scritto rende disponibili le funzioni di oggettivazione, ovvero di passaggio da processo ad oggetto, in cui le rappresentazioni semiotiche possono essere un passaggio cruciale. Questo anche quando l'oggetto non è ancora ben definito e la sua rappresentazione mediante la scrittura può renderne possibile il trattamento, che può rivelarsi poi utile per raggiungere risultati riguardanti concetti già noti e ben definiti. Un esempio in matematica è dato dall'oggettivazione per mezzo di un simbolo del processo di estrazione della radice quadrata di un numero negativo. Questa oggettivazione, per quanto ancora poco chiara dal punto di vista semantico, ha consentito la trattazione dei nuovi oggetti creati che ha portato all'algoritmo risolutivo delle equazioni di terzo grado.

In una comunicazione orale i partecipanti, solitamente, hanno il vantaggio di condividere il contesto di situazione. Questo permette di non dover scendere troppo nei dettagli durante la conversazione.

In un testo scritto, che è fruibile anche da chi non condivide tempi, spazi, cultura o convinzioni, occorre essere il più dettagliati possibile per favorire la comprensione di ciò che si vuole comunicare e per prevenire possibili incomprensioni dovute all'eventuale ambiguità del testo.

Alcune di queste caratteristiche giustificano le differenze fra i registri evoluti e quelli colloquiali.

A differenza dei registri evoluti, che si usano in testi in cui la funzione prevalente è quella ideazionale, nei registri colloquiali questa funzione è secondaria: lo scopo di un testo colloquiale è anche di intrattenimento e la funzione prevalente è quella interpersonale.

I registri colloquiali, proprio perché di solito utilizzati per le produzioni orali o comunque per dialoghi "botta e risposta" (come ad esempio le mail informali o gli sms), sono caratterizzati, fra le altre cose, dal fatto di poter eliminare o correggere le eventuali ambiguità a seconda del feedback dell'interlocutore. Questo ha una conseguenza sulla sintassi del testo prodotto che risulta quindi molto semplice e può presentare omissioni di verbi o altre parti del discorso.

Le esigenze pragmatiche sono le più importanti quindi la struttura dei periodi è basata sullo schema *tema-rema*: viene innanzitutto presentato l'oggetto del discorso (tema) e subito dopo le informazioni che interessano di quell'oggetto (rema). Poiché solitamente i registri colloquiali sono propri dei testi orali, le proposizioni sono semplici e brevi visto che l'interlocutore non può elaborare troppe informazioni contemporaneamente (massima della quantità) e il testo, una volta pronunciato, non è più disponibile per essere rianalizzato.

Un'analoga considerazione riguarda la struttura dei periodi: a differenza dei registri evoluti c'è uno scarso utilizzo di proposizioni causali o periodi ipotetici: le relazioni di causalità sono rappresentate in modo iconico mediante l'organizzazione del testo in cui la causa precede spazialmente o temporalmente l'effetto e le congiunzioni servono solo per unire le due proposizioni, giocando un ruolo secondario nella determinazione del significato. (Ad esempio i due enunciati: "Ho risolto l'equazione e ho eliminato il dubbio che avevo" e "Ho eliminato il dubbio che avevo e ho risolto l'equazione" dal punto di vista logico, quindi in un registro evoluto, sono equivalenti; ma in un registro colloquiale la causa e l'effetto si scambiano.)

La condivisione del contesto di situazione (spaziale e temporale) consente l'utilizzo di numerosi deittici la cui interpretazione sarebbe invece difficile nei registri evoluti solitamente utilizzati nei testi scritti fruibili da interlocutori lontani nello spazio o nel tempo.

Mentre nei registri colloquiali ha una grande importanza il contesto di situazione, in quelli evoluti la comprensione dei contenuti è maggiormente legata al contesto di cultura. Anche in questo caso, se il testo è scritto, le ambiguità dovute all'errata interpretazione di un termine causata dalla non completa condivisione delle conoscenze o delle credenze, non possono essere corrette ma devono essere evitate nel momento in cui il testo viene prodotto. I registri evoluti sono quindi caratterizzati da un lessico complesso e da un'alta lessicalizzazione, ovvero da un uso sempre maggiore di termini definiti esplicitamente in modo preciso. Nei registri colloquiali invece termini di uso comune vengono utilizzati anche per indicare concetti più tecnici.

Per quanto riguarda la terminologia utilizzata nei due registri, il fatto che quelli colloquiali vengano di solito utilizzati per parlare di fatti del quotidiano mentre quelli evoluti sono propri di testi scientifici comporta un maggiore utilizzo di termini astratti per quelli evoluti e di termini concreti per quelli colloquiali.

L'oggettivazione, favorita dalla scrittura, viene concretamente realizzata con il processo di nominalizzazione, largamente presente nei testi evoluti. La nominalizzazione è un caso particolare di una metafora grammaticale in cui una classe grammaticale viene sostituita da un'altra (ad esempio un aggettivo viene sostituito da un avverbio). Nella nominalizzazione una categoria grammaticale viene trasformata in un sostantivo. Un caso particolare è la trasformazione di un verbo in un sostantivo, e quindi di un processo in un oggetto, attraverso la quale le *forme congruenti* vengono trasformate in *forme metaforiche* (ad esempio l'enunciato "La soluzione dell'equazione ha portato alla risposta" è la forma metaforica corrispondente alla forma congruente "Dopo che hanno risolto l'equazione, gli studenti sono riusciti a rispondere.")

### Linguaggio matematico e registri matematici evoluti

Per quanto riguarda la matematica, e l'algebra in particolare, con il termine "linguaggio" non ci si riferisce soltanto a quello simbolico: un rilevante ruolo viene attribuito anche al linguaggio verbale. Pertanto di seguito, per *linguaggio matematico* si intenderà "un sistema multimodale (che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali) e multivariato (che include un ampio spettro di registri)" (Ferrari, 2004).

La contemplazione di diversi registri è giustificata dal fatto che i registri utilizzati in discorsi e testi matematici dipendono ad esempio dal grado scolastico a cui il testo o il discorso matematico è indirizzato. I registri matematici evoluti sono quelli utilizzati a partire dalla scuola secondaria di secondo grado. In questi testi le caratteristiche dei registri evoluti descritti nel paragrafo precedente sono presenti al massimo grado, per questo motivo il registro matematico evoluto può essere considerato un caso estremo di registro evoluto.

La funzione principale dei registi matematici evoluti è quella ideazionale con in più la caratteristica di avere un forte orientamento all'applicazione degli algoritmi. Per questo motivo le scelte nell'organizzazione di un testo sono dettate più dalla necessità di applicare un certo algoritmo che da scopi legati alla comunicazione di un'informazione. Lo stile è quindi prevalentemente sintattico: la posizione delle varie parti del testo svolge un ruolo secondario nell'attribuzione dei significati e la struttura tema-rema è sostituita da quella predicato-argomenti, ovvero la posizione degli argomenti rispetto al predicato non attribuisce loro ruoli diversi ma è dettata solitamente da esigenze di trattamento.

Come evidenziato dalla definizione di linguaggio matematico data sopra, un registro matematico comprende le componenti verbale, simbolica e figurale. Le scritture simboliche vengono usate a volte come proposizioni e a volte come atti linguistici. La componente verbale svolge per lo più una funzione metalinguistica o di parafrasi delle scritture simboliche che sono spesso un modello per la componente verbale che può surrogare quella simbolica.

I registri matematici evoluti sono caratterizzati da un'altissima nominalizzazione: nelle componenti simboliche (e quindi anche in quelle verbali che sono per lo più parafrasi di queste) vengono usati pochissimi predicati, mentre sono possibili complesse costruzioni di gruppi nominali. Questo è vero in forma estrema per la notazione algebrica, in cui c'è solo il predicato di uguaglianza.

Anche la lessicalizzazione è estrema: ogni termine utilizzato è ben definito esplicitamente e non lascia spazio a fraintendimenti o ambiguità.

La comprensione della matematica richiede quindi competenze linguistiche che non si riducono alla sola componente simbolica. Inoltre la padronanza dei soli registri colloquiali non è sufficiente poiché, come si è visto, alcune regole di attribuzione dei significati valide nei registri colloquiali, non valgono più in quelli evoluti e in particolare in quelli matematici evoluti. Quindi la padronanza dei registri evoluti è necessaria per comprendere un discorso sulla matematica a partire almeno dalla scuola secondaria di secondo grado. D'altra parte spesso gli studenti non si rendono conto della necessità di passare dal registro colloquiale a quello evoluto, così affermazioni che sarebbero accettabili in un contesto orale vengono utilizzate anche nei testi scritti, nei quali risultano inaccettabili perché matematicamente false o ambigue o fuorvianti (Ferrari, 2007). La padronanza dei registri evoluti è quindi necessaria sia per comprendere un testo matematico, sia per produrlo utilizzando tutte le sue componenti: verbale, simbolica e figurale.

Uno degli scopi di questo studio è l'analisi dei registri utilizzati dagli studenti coinvolti nella produzione di testi matematici scritti, finalizzati alla descrizione generale di un algoritmo di calcolo applicato per risolvere un problema proposto.

Le ipotesi formulate in merito e che vanno ad aggiungersi a quelle già illustrate nei Paragrafi 2.5 e 3.1.2, sono:

v) la necessità di spiegare con chiarezza i passaggi necessari a risolvere un problema generale porta, attraverso discussioni collettive opportunamente guidate dall'insegnante, all'abbandono di alcune caratteristiche dei registri colloquiali verso la produzione di testi che utilizzano registri evoluti;

vi) la capacità di scrivere autonomamente l'espressione algebrica corrispondente ad un algoritmo di calcolo è legata alla capacità di descrivere con chiarezza, già mediante il linguaggio verbale, l'algoritmo stesso e quindi alla padronanza dei registri evoluti.

## 3.2 Caratteristiche principali dell'apparato sperimentale

Come mostrato nel paragrafo 2.1 alcuni studi sostengono che le difficoltà incontrate dagli studenti nell'affrontare l'algebra elementare, attribuite principalmente alla mancanza di senso delle espressioni algebriche e delle relative regole di manipolazione, sono dovute alle pratiche attuali degli insegnanti. Nel paragrafo 2.4 è stato spiegato come questa convinzione ha portato alla ricerca di nuovi tipi di approcci che si ipotizza possano essere utili per restituire un senso agli oggetti del calcolo letterale.

In questo studio è stata quindi presa in considerazione l'ipotesi dell'ostacolo didattico ed è stata progettata un'attività con lo scopo di verificare se gli studenti, in una certa situazione didattica e guidati in maniera opportuna, siano in grado di costruire espressioni algebriche dotate di significato.

Per quanto riguarda la concezione delle espressioni algebriche, ci si è basati su quella di espressione algebrica come algoritmo di calcolo proposta da Chevallard (2007). Per questo motivo l'attività è progettata intorno alla risoluzione di problemi per cui ha senso la descrizione in termini generali di un algoritmo individuato per uno o più casi particolari, che può portare alla costruzione di una formula, ovvero di una espressione algebrica.

Nel paragrafo 3.1.1 si è mostrato come la generalizzazione sia la caratteristica comune delle diverse definizioni di pensiero algebrico individuate nella letteratura analizzata. Per questo motivo la focalizzazione sui processi di generalizzazione sarà il filo conduttore che guiderà la costruzione dei quesiti posti nei problemi.

Analogamente, la scelta delle variabili da osservare e dei relativi criteri di analisi sarà basata sulla decisione di considerare un'attività del pensiero algebrico anche la descrizione attraverso il solo linguaggio verbale, di relazioni o algoritmi che non riguardino un valore preciso ma una grandezza considerata incognita o variabile.

L'attività sperimentale principale, descritta a partire dal Paragrafo 4.2, è stata preceduta da uno studio pilota i cui risultati, parzialmente analizzati, hanno portato alla formulazione definitiva dei problemi e alla definizione di alcuni dettagli della progettazione del percorso sperimentale successivo.

Nei paragrafi che seguono saranno descritte le caratteristiche dello studio sperimentale che sono comuni allo studio pilota e a quello principale, mentre le caratteristiche specifiche di ciascuno dei due studi saranno descritte nei rispettivi Paragrafi 4.1 e 4.2.

### 3.2.1 I problemi

La tipologia di problemi scelta si basa sulle proposte che Bell (1995) ritiene efficaci per produrre un apprendimento significativo in ambito algebrico. Come anticipato nel Paragrafo 2.4, Bell individua tre modalità principali dell'attività algebrica scolastica: generalizing, forming and solving equations, working with functions and formulae e, per ciascuna di queste tre modalità, propone esempi concreti di problemi.

Per quando riguarda il lavoro con le funzioni e con le formule, che è quello che si vuole utilizzare in questo studio, scrive:

> In work on functions and formulae, the typical situation is either a practical situation that generates a sequence of numbers in some way, for example, a row of squares made with matchsticks, or polygons of increasing size made on pegboard, or sets of practical or experimental data, such as prices of a ferry crossing for cars of different lengths. The usual task is to determine the rule defining the function, to express it verbally (and later, symbolically) so as to be able to interpolate and extrapolate from the data actually given to predict other cases.(ivi, pag. 64)

Sono stati dunque utilizzati problemi che descrivono situazioni che, a partire da successioni di figure o di altri oggetti, danno luogo a successioni numeriche. Le attività di questo studio saranno dunque progettate secondo l'approccio funzionale poiché ciò su cui si punta l'attenzione è la relazione fra due grandezze, ovvero fra la posizione, ad esempio, della figura e il numero di oggetti, ad esempio stuzzicadenti, che la compongono. Si farà in modo che tale relazione sia individuata a partire dagli algoritmi, ovvero dalla sequenza di "azioni", necessari a risolvere i problemi posti, puntando quindi sulla dimensione di *processo* delle funzioni piuttosto che su quella di *oggetto*.[5]

Per quanto riguarda i quesiti, non è mai stato chiesto esplicitamente di determinare la regola che definisce la funzione né di esprimerla simbolicamente. Questa scelta, che si discosta da quanto suggerito da Bell come "usual task", è dovuta al fatto che si voleva studiare da una parte la propensione alla generalizzazione, e quindi vedere quanti studenti, spontaneamente, descrivessero la relazione funzionale senza far uso di esempi; dall'altra l'uso spontaneo del linguaggio simbolico.

Per lo stesso motivo tutti i problemi sono stati formulati senza fare uso di simboli ma soltanto mediate il linguaggio verbale e figurale.

I testi dei problemi sono riadattamenti di problemi tratti da diversi ambiti della didattica o della valutazione matematica.

### 3.2.2 Gli studenti coinvolti

Poiché usualmente il calcolo letterale viene presentato a studenti di 13-14 anni, ovvero durante quello che nel sistema scolastico italiano è l'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado, la questione relativa all'assenza di un ostacolo di natura ontogenica nella comprensione del senso delle espressioni algebriche, illustrata nel paragrafo 2.3, sarà verificata coinvolgendo nello studio anche allievi più giovani. Ciò che si ipotizza è che in realtà già a 11-12 anni gli studenti abbiano sviluppato capacità di astrazione sufficienti a parlare in termini generali di relazioni fra grandezze e a produrre espressioni algebriche utilizzando lettere o altri simboli non convenzionali per indicare quantità variabili o incognite.

La scelta delle fasce di età degli studenti è stata guidata inoltre dal voler focalizzare l'attenzione sullo sviluppo del pensiero algebrico nei momenti di transizione fra livelli scolastici. Sono state quindi scelte classi dell'ultimo anno della scuola primaria, del primo e dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado.

[5]Riguardo alla caratterizzazione delle due dimensioni dei concetti matematici si veda pag. 2.4.

### 3.2.3 L'attività in classe

Poiché si voleva che lo studio fosse il più vicino possibile alle caratteristiche reali di una normale lezione a scuola, tutte le attività si sono svolte con intere classi di studenti (non con gruppi di studenti scelti), nell'orario curricolare delle lezioni di matematica. Le attività sono state condotte dal ricercatore in alcuni casi con la collaborazione dell'insegnante della classe che comunque era sempre presente in aula. Ogni incontro è stato audioregistrato e le registrazioni sono state trascritte.

Gli incontri sono stati progettati in modo da realizzare *esperienze laboratoriali di apprendimento* (vedi paragrafo 3.1.2), dunque ogni incontro era incentrato sulla risoluzione di un problema da parte degli studenti. L'organizzazione della classe in questa fase è stata diversa a seconda degli scopi che si volevano perseguire e dei dati che si volevano raccogliere. Dunque quando si volevano osservare variabili considerando i singoli studenti si è scelto il lavoro individuale; quando si aveva bisogno di osservare in che modo la soluzione del problema veniva elaborata mediante il lavoro collaborativo e si volevano analizzare i discorsi durante una discussione fra pari, la classe è stata divisa in gruppi o in coppie. In alcune occasioni, per lo stesso problema, gli studenti hanno lavorato prima individualmente e poi in gruppo.

Il testo del problema era riportato in una scheda che veniva distribuita agli studenti a cui veniva chiesto di non usare altri fogli in modo da poter tenere traccia di tutte le prove e i calcoli che precedevano la scrittura delle risposte.

I criteri utilizzati nella formazione dei gruppi e delle coppie sono stati discussi anche con l'insegnante e sono dipesi dai fini che si volevano perseguire o da motivazioni legate alle abitudini di lavoro di ciascuna classe.

Durante la fase di risoluzione del problema, l'insegnante e il ricercatore hanno avuto solo il ruolo di osservatori e in qualche caso hanno fornito chiarimenti riguardanti la comprensione del testo a chi li richiedeva ma senza fornire indicazioni sulla risoluzione.

Alla risoluzione del problema è sempre seguita la seconda fase di discussione collettiva gestita dall'insegnante in collaborazione col ricercatore, o dal solo ricercatore.

In alcuni casi le due fasi hanno avuto luogo durante lo stesso incontro, in altri la discussione veniva rimandata all'incontro successivo.

### 3.2.4 Le variabili analizzate

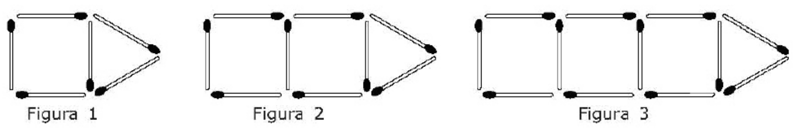
Come ribadito anche all'inizio di questo capitolo, i processi di generalizzazione sono il focus di questo studio. Quindi le variabili che sono state analizzate sono state messe in relazione innanzitutto con questo aspetto.

Nel paragrafo precedente è stato evidenziato che le attività sono modulate in modo da centrare l'attenzione sull'algoritmo utilizzato per risolvere il problema. La prima variabile analizzata, direttamente legata alle abilità di generalizzazione, è quindi la modalità con cui gli algoritmi possono essere descritti. La classificazione di tali modalità è stata guidata dalla definizione di *pensiero algebrico* utilizzata in questo studio[6] ovvero prendendo in considerazione il fatto che la descrizione dell'algoritmo non facesse riferimento a casi particolari e illustrasse chiaramente la relazione fra le grandezze in gioco, ovvero la posizione dell'elemento della successione e il valore dell'elemento.

La prima variabile che si è cercato di rapportare ai processi di generalizzazione riguarda le diverse strategie che possono essere messe in atto per risolvere problemi sulle successioni. Da qui in avanti si parlerà di "strategia" intendendo qualsiasi procedimento che possa essere utilizzato per risolvere un quesito e si considereranno diverse due strategie in cui intervengano conoscenze e competenze appartenenti a diversi ambiti. Per chiarire questo punto si propone l'esempio che segue.

> Si consideri il quesito riportato in Figura 3.1, tratto dalla prova INVALSI di matematica per la terza secondaria di primo grado relativa all'anno scolastico 2007/2008.

C12. Alcuni fiammiferi sono disposti come indicato nelle figure.




Se si continua la sequenza delle figure, quanti fiammiferi verranno usati per fare la figura 10?

A. 30
B. 33
C. 36
D. 42

Figura 3.1: Esempio di quesito sui pattern di figure.

[6] Si veda pag. 48.

Alcuni possibili *procedimenti* che possono essere utilizzati per determinare la risposta al quesito sono i quattro che seguono.

**Procedimento 1.** Determinare il numero dei fiammiferi per tutte le figure precedenti alla numero 10, partendo dalla figura 1:

| | |
|---|---|
| Fig. 1: 6 fiammiferi | Fig. 6: 18 + 3 = 21 fiammiferi |
| Fig. 2: 6 + 3 = 9 fiammiferi | Fig. 7: 21 + 3 = 24 fiammiferi |
| Fig. 3: 9 + 3 = 12 fiammiferi | Fig. 8: 24 + 3 = 27 fiammiferi |
| Fig. 4: 12 + 3 = 15 fiammiferi | Fig. 9: 27 + 3 = 30 fiammiferi |
| Fig. 5: 15 + 3 = 18 fiammiferi | Fig. 10: 30 + 3 = 33 fiammiferi |

**Procedimento 2.** Determinare il numero dei fiammiferi per tutte le figure precedenti alla numero 10, partendo dalla prima figura non rappresentata già nel testo, ovvero la figura 4:

| | |
|---|---|
| Fig. 4: 12 + 3 = 15 fiammiferi | Fig. 8: 24 + 3 = 27 fiammiferi |
| Fig. 5: 15 + 3 = 18 fiammiferi | Fig. 9: 27 + 3 = 30 fiammiferi |
| Fig. 6: 18 + 3 = 21 fiammiferi | |
| Fig. 7: 21 + 3 = 24 fiammiferi | Fig. 10: 30 + 3 = 33 fiammiferi |

**Procedimento 3.** Moltiplicare il numero della figura per 3 per ottenere il numero dei fiammiferi che formano i quadrati e aggiungere i 3 fiammiferi del triangolo:

$$10 \times 3 = 30$$
$$30 + 3 = 33$$

**Procedimento 4.** Sommare il numero di fiammiferi posti in orizzontale con quelli centrali posti in verticale e quindi sommare i 2 fiammiferi che formano la punta:

$$10 + 10 + 11 = 31$$
$$31 + 2 = 33$$

I quattro procedimenti sono evidentemente diversi ma il primo e il secondo sono di tipo ricorsivo, mettono quindi in gioco lo stesso tipo di competenze. Quindi la strategia utilizzata nel Procedimento 1 e nel Procedimento 2, nei quali $f_n = f_{n-1} + 3$, è considerata la stessa, ovvero ricorsiva.

Analogamente, il terzo e il quarto procedimento sono differenti ma entrambi utilizzano un procedimento aritmetico che consente di ricavare il numero dei fiammiferi applicando delle operazioni al numero che corrisponde alla posizione della figura nella successione, rispettivamente $f(n) = 3n + 3$ e $f(n) = 2n + (n + 1) + 2$. Per questo motivo, dal punto di vista della strategia, i due procedimenti sono classificanti entrambi fra le strategie dirette.

Fra tutte le possibili strategie, discusse nel dettaglio per ogni problema utilizzato[7], l'attenzione è stata focalizzata sulle strategie ricorsive, in cui la risposta al quesito è determinata calcolando ciascun elemento della successione in base a quello precedente, e sulle strategie dirette, in cui viene individuata una regola esplicita che lega l'elemento della successione numerica con la sua posizione.

Già Lannin et al. (2006) avevano realizzato uno studio in cui studenti di livello 8 (corrispondente al primo anno della scuola secondaria di primo grado italiana) hanno affrontato problemi in cui successioni numeriche scaturivano da problemi immersi in uno scenario reale. Nella discussione finale scrivono:

> What is not clear is how the use of these strategies affects the development of student understanding of algebraic generalization. (ivi, pag. 315)

Dunque, la prima domanda che ci si pone a questo proposito è: quale tipo di strategia favorisce la generalizzazione? Ovvero: quale strategia porta uno studente verso una descrizione generale?

Per rispondere a questa domanda gli elaborati e le risposte degli studenti del percorso sperimentale sono stati analizzati andando ad osservare quali modalità di descrizione dell'algoritmo sono state usate dagli studenti che hanno applicato una strategia diretta e quali da quelli che hanno applicato invece una strategia ricorsiva.[8]

La seconda variabile che si vuole mettere in relazione con i processi di generalizzazione riguarda il linguaggio e, più precisamente, la tipologia di registro, colloquiale o evoluto, utilizzata dagli studenti per rispondere ad uno dei quesiti posti.

L'analisi dei registri è stata realizzata utilizzando la griglia riportata nella Tabella 3.1. Tale griglia di analisi è stata costruita sulla base della caratterizzazione dei registri colloquiali ed evoluti elaborata da Ferrari (2004, 2007, 2012) e riassunta nel Paragrafo 3.1.3.

[7]Si vedano il Paragrafo 4.1 per i problemi utilizzati nello studio pilota, il Paragrafo 4.2 per il percorso sperimentale con le classi prime e il Paragrafo 4.3 per l'indagine con la classe terza.

[8]La sintesi e i risultati di questa analisi sono descritti a partire da pag. 158.

Tabella 3.1: Griglia di analisi dei registri utilizzati nei testi prodotti dagli studenti.

| REGISTRI COLLOQUIALI | REGISTRI EVOLUTI |
|---|---|
| STRUTTURA DEL TESTO | |
| – struttura dei periodi semplice | – struttura dei periodi complessa |
| – relazioni di causalità rappresentate in modo iconico mediante l'organizzazione spaziale e temporale | – largo uso di proposizioni causali e periodi ipotetici |
| – bassa gerarchizzazione, le congiunzioni hanno solo la funzione di unire due proposizioni | – alta gerarchizzazione |
| *Variabili considerate*<br>Numero di proposizioni principali<br>Numero di proposizioni subordinate<br>Presenza di proposizioni causali, coordinate di periodi ipotetici | |
| SINTASSI | |
| – sintassi povera, con eventuale omissione di verbi o altre parti del discorso | – sintassi ricca |
| – struttura del tipo tema-rema dettata da motivazioni pragmatiche | |
| *Variabili considerate*<br>Numero frasi minime: *soggetto-verbo-complemento*<br>Presenza di più complementi<br>Omissioni di parti del discorso | |
| GRAMMATICA | |
| – scarso uso della morfologia grammaticale | – uso elaborato della morfologia grammaticale |
| – rapporto *verbi-sostantivi* 1:1 | – maggiore presenza di sostantivi rispetto a verbi |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 3.1: continua dalla pagina precedente*

| Registri colloquiali | Registri evoluti |
|---|---|
| *Variabili considerate*<br>Numero di sostantivi<br>Numero di verbi<br>Presenza di altre categorie grammaticali | |
| PROCESSO vs PRODOTTO | |
| – significato costruito come processo<br>– bassa nominalizzazione: prevalenza di frasi verbali<br>– forme congruenti | – significato costruito come prodotto<br>– alta nominalizzazione: prevalenza di espressioni nominali<br>– forme metaforiche |
| *Variabili considerate*<br>utilizzo di nominalizzazioni<br>utilizzo di frasi verbali | |
| RUOLO DEL CONTESTO | |
| – forte dipendenza dal contesto di situazione | – dipendenza dal contesto di cultura<br>– scarsa dipendenza dal contesto di situazione |
| – largo uso di riferimenti deittici | – scarso uso di riferimenti deittici |
| – espressione instabile rispetto al tempo e al contesto | – espressione stabile: il significato non dipende dal momento o dal contesto |
| – bassa lessicalizzazione, uso di termini comuni per esprimere termini tecnici | – alta lessicalizzazione: lessico preciso, presenza di termini ben definiti |
| *Variabili considerate*<br>presenza di riferimenti deittici<br>presenza di termini precisi/definiti<br>uso di termini comuni per concetti specifici | |

Nella progettazione della tabella le caratteristiche che distinguono i registri colloquiali ed evoluti sono state divise in categorie così da poter verificare se eventuali evoluzioni dei registri durante il percorso progettato, riguardino o meno specifici campi. Nella suddivisioni delle varie voci, oltre alle categorie classiche di analisi del testo (struttura, sintassi e grammatica) sono state aggiunte due categorie, *processo vs prodotto* e *ruolo del contesto* che riprendono gli altri aspetti rispetto ai quali le due tipologie di registro sono state confrontate nel Paragrafo 3.1.3. Per questo motivo alcune voci che apparterrebbero naturalmente a una delle tre categorie classiche sono state invece classificate diversamente. Ad esempio la presenza di nominalizzazioni, che riguarda le categorie grammaticali utilizzate e quindi apparterrebbe alla categoria *grammatica*, è stata invece inserita in *processo vs prodotto* poiché è una delle caratteristiche del testo che indica se il concetto espresso nel messaggio è pensato come un processo o come un prodotto.

Il fatto che la caratterizzazione del registro utilizzato in un testo dipenda da diverse categorie porta ad ipotizzare che, nella maggior parte dei testi analizzati, non sarà possibile etichettare un registro come colloquiale o evoluto in assoluto. Ci si aspetta infatti che uno stesso testo contenga indicatori di entrambi i tipi di registri.

L'analisi sarà quindi effettuata non con il fine di stabilire se in ciascun testo si utilizzi un registro evoluto o colloquiale ma mediante il confronto dei testi prodotti da uno stesso studente con lo scopo di mettere in luce eventuali variazioni nel tipo di registro utilizzato, eventualmente anche in una sola delle categorie individuate nella griglia.

Alcuni degli indicatori illustrati nel paragrafo 3.1.3, ovvero l'utilizzo di termini astratti o concreti e la funzione principale del testo, non sono stati presi in considerazione nella costruzione della griglia in quanto la loro presenza nei testi analizzati può essere prevista a priori poiché dovuta alla situazione descritta nei problemi utilizzati e al modo in cui sono formulati i quesiti di cui i testi costituiscono la risposta. Questo aspetto sarà approfondito nel paragrafo 4.2.1 in cui vengono descritti nel dettaglio i testi dei problemi somministrati.

La relazione fra la tipologia di registro utilizzata e i processi di generalizzazione è stata analizzata innanzitutto realizzando dei raggruppamenti stabiliti mettendo insieme studenti che si comportavano in maniera analoga dal punto di vista dei registri utilizzati. Quindi, per ciascun gruppo, si è osservato quale tipologia di spiegazione dell'algoritmo utilizzavano gli studenti che vi appartenevano.[9]

[9]La sintesi e i risultati di questa analisi sono descritti nel Paragrafo 4.2.3.

Per completare l'analisi delle relazioni fra i processi di generalizzazione, le strategie e i registri, i gruppi formati nell'analisi di questi ultimi sono stati analizzati anche dal punto di vista delle strategie applicate dagli studenti che vi appartenevano per rispondere ai quesiti aritmetici.

Infine, stabilite le relazioni fra tipo di strategia e i processi di generalizzazione o l'evoluzione del linguaggio, si è provato ad individuare alcune delle variabili dell'apparato sperimentare che hanno favorito l'utilizzo di una strategia piuttosto che un'altra, cercando di verificare l'esistenza di una relazione fra le caratteristiche dei problemi e le strategie utilizzate.[10]

[10] L'analisi di come le caratteristiche dei problemi abbiano influenzato il tipo di strategia applicata è descritta nel Paragrafo 4.2.2.

# Capitolo 4

# Lo studio sperimentale

L'analisi degli studi esistenti nell'ambito dell'insegnamento/apprendimento dell'algebra, riportata nel Capitolo 2, e lo studio di alcuni quadri teorici riguardanti la didattica della matematica in generale, sviluppato nel Capitolo 3, hanno portato alla formulazione delle ipotesi di ricerca dello studio sperimentale. Tali ipotesi, già formulate e discusse nei Paragrafi 2.5, 3.1.2 e 3.1.3, vengono ricordate di seguito:

i) costruire la scrittura in linguaggio simbolico di un'espressione algebrica a partire dalla formulazione a parole dell'algoritmo di calcolo aritmetico corrispondente favorisce la comprensione del significato dell'espressione;

ii) i problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali che possono essere poi riscritti mediante il linguaggio simbolico;

iii) il passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico nella descrizione di un algoritmo può essere favorito dall'*esempio paradigmatico*, ovvero applicando l'algoritmo in un certo numero di casi particolari che, dando luogo ad espressioni numeriche aventi la stessa struttura, inducono la produzione di una espressione letterale avente la stessa struttura di quelle aritmetiche già scritte;

iv) la discussione collettiva in cui gli studenti cercano di descrivere ai compagni il procedimento seguito per risolvere un problema favorisce la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa;

v) la necessità di spiegare con chiarezza i passaggi necessari a risolvere un problema generale porta, attraverso discussioni collettive opportunamente guidate dall'insegnante, all'abbandono di alcune caratteristiche dei registri colloquiali verso la produzione di testi che utilizzano registri evoluti;

vi) la capacità di scrivere autonomamente l'espressione algebrica corrispondente ad un algoritmo di calcolo è legata alla capacità di descrivere con chiarezza mediante il linguaggio verbale l'algoritmo stesso e quindi alla padronanza dei registri evoluti.

Le ipotesi elencate sono scaturite dall'ipotesi più generale secondo cui le difficoltà che gli studenti incontrano nell'affrontare l'algebra elementare non siano dovute ad un ostacolo di origine ontogenica bensì ad un ostacolo di origine didattica. Per verificare questa prima ipotesi generale è stato realizzato inizialmente uno studio pilota, i cui risultati sono stati parzialmente utilizzati per progettare un secondo studio sperimentale, descritto nel paragrafo che segue.

## 4.1 Lo studio pilota

La fase preliminare della sperimentazione comprende cinque attività realizzate con una quinta della scuola primaria e tre prime e una terza della scuola secondaria di primo grado.

In linea con l'ipotesi generale sull'origine degli ostacoli nell'affrontare l'algebra elementare, ricordata nel paragrafo precedente, gli obiettivi principali di questa fase preliminare erano:

a) verificare l'ipotesi, sostenuta da alcuni[1] e condivisa in questo studio,[2] secondo cui gli studenti siano in grado di utilizzare simboli per rappresentare quantità incognite o variabili, ad un età inferiore rispetto a quella in cui, tradizionalmente, vengono introdotti al calcolo letterale;

b) individuare alcune delle variabili didattiche che possono favorire o ostacolare l'insorgere di processi di generalizzazione, soprattutto dal punto di vista delle caratteristiche dei problemi e dei quesiti proposti.

Le attività consistevano in un incontro di due ore con ciascuna classe durante il quale agli studenti veniva chiesto di risolvere uno o due problemi lavorando individualmente o in gruppo o durante una discussione collettiva.

Le insegnanti delle classi erano tutte diverse ad eccezione di una prima e una terza che avevano la stessa insegnante.

[1]Si veda il Paragrafo 2.3.

[2]Si veda il Paragrafo 2.5.

### 4.1.1 L'attività con la quinta primaria

#### La classe

La scuola primaria a cui appartiene la quinta che ha partecipato all'attività fa parte di un istituto comprensivo di Cagliari che comprende, oltre alla scuola primaria, anche scuola dell'infanzia e secondaria di primo grado.

La classe è composta da 24 alunni di cui 18 maschi e 6 femmine. Due dei bambini sono DSA ma l'insegnante ha segnalato la presenza di altri 6 studenti con difficoltà di apprendimento.

La modalità del laboratorio è utilizzata spesso dell'insegnante di questa classe, gli studenti sono quindi abituati a lavorare in gruppo. L'aula è infatti concretamente organizzata in "isole" formate dai banchi raggruppati. Problemi sulle successioni di figure erano già stati proposti dall'insegnante durante l'anno scolastico.

#### I problemi

La risoluzione del problema è stato divisa in due fasi: una prima fase di lavoro individuale e una seconda fase di lavoro di gruppo.

Durante il lavoro individuale e di gruppo agli studenti è stato chiesto di rispondere a domande diverse relative però alla stessa successione di figure consistente in griglie quadrate formate da quadretti tutti uguali.

I testi delle schede utilizzate durante il lavoro individuale e di gruppo sono riportati rispettivamente nelle Tabelle 4.1 e 4.2.

Le due schede sono state costruite rielaborando il quesito 7 della prova INVALSI per la classe quinta primaria dell'anno scolastico 2008/2009.

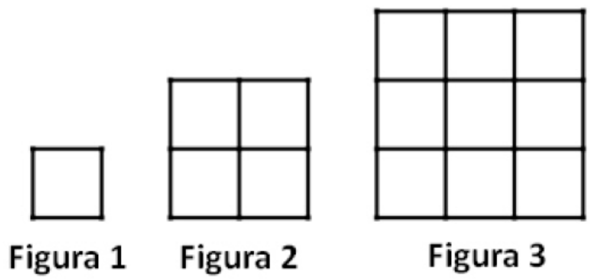
Si è deciso di far risolvere individualmente il quesito relativo alla figura 10 in modo che ogni studente potesse individuare autonomamente la struttura della successione e potesse scegliere da solo la strategia con cui individuare la risposta.

Le strategie possibili, individuate a priori, erano le seguenti:

- disegnare successivamente ogni figura e contarne i quadretti fino ad arrivare alla figura richiesta dal quesito;
- disegnare solo la figura richiesta e contare i quadretti;
- determinare il numero dei quadretti di ogni figura utilizzando una strategia ricorsiva;

Tabella 4.1: Testo del problema delle grigie quadrate usato nella fase di lavoro individuale nella quinta primaria.

**Problema:** Le tre figure seguenti sono formate da quadretti tutti uguali.




Da quanti quadretti è formata la **Figura 10**?

- determinare il numero dei quadretti di ogni successiva figura calcolando il prodotto del numero dei quadretti della base e dell'altezza;
- determinare il numero dei quadretti della figura richiesta moltiplicando il numero dei quadretti della base per quello dei quadretti nell'altezza senza calcolare quello delle figure precedenti.

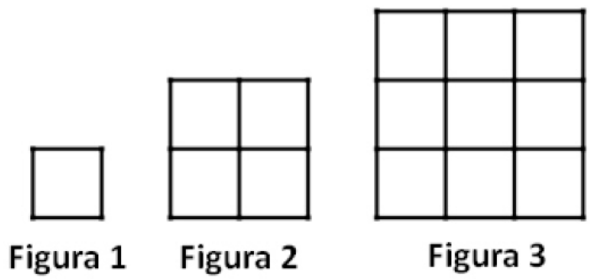
Nella scheda utilizzata per il lavoro di gruppo una parte del quesito richiede che si scriva la motivazione delle risposte fornite. La richiesta "Spiegate perché" non è stata posta per ciascuna figura ma è stata inserita dopo le domande relative alle due figure. Questo perché si voleva indurre a cercare una giustificazione unica per entrambe le risposte che portasse quindi ad una spiegazione generale non riferita all'operazione specifica eseguita per ciascuna figura.

Le tipologie di risposta attese erano dunque le seguenti:

- motivazione basata sul risultato delle operazioni svolte ma senza spiegazione o giustificazione del procedimento utilizzato;
- spiegazione o giustificazione a parole del procedimento utilizzato con riferimento ai calcoli specifici effettuati sulla figura oggetto del quesito;
- spiegazione o giustificazione generale, ovvero senza riferimento alla particolare figura utilizzata, del procedimento o dell'algoritmo utilizzato,

Tabella 4.2: Testo del problema delle grigie quadrate usato nella fase di lavoro di gruppo nella quinti primaria.

**Problema:** Le tre figure seguenti sono formate da quadretti tutti uguali.




Marco afferma: "La **Figura 12** sarà composta da 144 quadretti!!!"

Marta aggiunge: "La **Figura 25** sarà formata da 225 quadretti!!"

Siete d'accordo con Marco? E con Marta? Spiegate perché.

senza far riferimento al numero della figura ma solo a "base", "altezza" o "lato";

- spiegazione o giustificazione generale, ovvero senza riferimento alla particolare figura utilizzata, del procedimento o dell'algoritmo utilizzato, facendo riferimento al numero della figura o alle figure precedenti;
- spiegazione o giustificazione generale dell'algoritmo utilizzato anche mediante linguaggio simbolico, eventualmente con simboli non canonici, con riferimento al numero della figura.

Per i quesiti del lavoro di gruppo sono state scelte figure per le quali il numero di quadretti aumentasse notevolmente rispetto alla precedente: l'ipotesi era che una figura più grande scoraggiasse l'utilizzo della stratega del disegno e del conteggio in chi l'avesse eventualmente utilizzata per le figure precedenti. Lo scopo era infatti quello di favorire una strategia aritmetica che potesse quindi essere giustificata attraverso la descrizione, mediante linguaggio verbale o simbolico, dell'algoritmo applicato.

### Organizzazione del laboratorio

L'attività è stata suddivisa in quattro fasi.

Come anticipato, la prima fase è stata di lavoro individuale sul problema in Tabella 4.1. Questa fase è durata poco più di dieci minuti dopo i quali tutti gli studenti avevano risposto al quesito.

La successiva discussione collettiva, gestita dal ricercatore, aveva sia lo scopo di verificare che tutti avessero individuato la risposta corretta, sia di dare l'opportunità agli studenti di condividere la strategia utilizzata in modo che tutti potessero riflettere sull'esistenza di altre strategie corrette. Tutti gli studenti erano concordi su quale fosse la risposta esatta e anche la descrizione delle diverse strategie non ha richiesto molto tempo. Quindi anche questa fase di discussione ha richiesto pochi minuti.

Durante la terza fase gli studenti, suddivisi in gruppi, hanno lavorato sulla scheda in Tabella 4.2. Ogni gruppo ha ricevuto una scheda collettiva in cui scrivere la risposta condivisa elaborata dopo la discussione. Oltre a questa scheda è stata distribuita ad ogni componente del gruppo una scheda individuale su cui poter scrivere durante la discussione, prima di elaborare la risposta collettiva. La suddivisione in gruppi era quella abituale della classe, realizzata utilizzando criteri di omogeneità, quindi ogni gruppo era formato da studenti considerati dello stesso livello. Il lavoro in gruppo ha occupato 25 minuti.

L'ultima fase è stata finalizzata alla discussione collettiva sulle risposte date ai quesiti durante il lavoro di gruppo.

La prima parte della discussione è stata dedicata alla spiegazione da parte di ciascun gruppo, del procedimento utilizzato per rispondere ai due quesiti: il portavoce di ciascun gruppo ha quindi riportato sulla LIM la risposta scritta nella scheda.

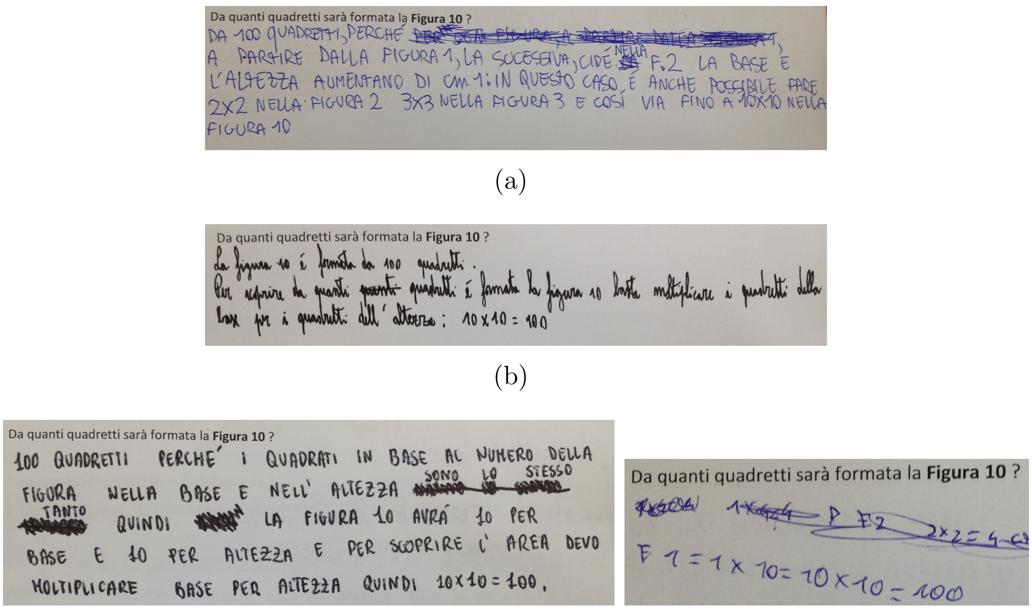
La seconda parte è stata dedicata a eventuali chiarimenti, forniti dagli alunni stessi, e discussioni sui procedimenti illustrati.

### Dati raccolti con l'analisi degli elaborati

Le risposte fornite durante il lavoro individuale sono state classificate, sulla base dell'analisi a priori riportata a pag. 71, sia in base alla strategia risolutiva adottata, sia in base al tipo di spiegazione fornita. Nonostante non fosse esplicitamente richiesto nel testo del quesito, infatti, tutti gli studenti hanno fornito una giustificazione della risposta data.

Tutti gli studenti tranne uno hanno fornito la risposta corretta. Delle 5 strategie contemplate solo tre sono state effettivamente utilizzate per rispondere alla domanda sulla figura 10: un unico studente, che è lo stesso che ha fornito la risposta errata, ha disegnato la figura 10 e ha contato i quadretti, tutti gli altri hanno determinato la risposta moltiplicando $10 \times 10$.

Per quanto riguarda la tipologia di spiegazione fornita si sono verificate 4 delle 5 possibilità previste: 18 studenti hanno fornito una giustificazione facendo esclusivamente riferimento al caso particolare della figura 10 che era l'oggetto del quesito (un esempio è mostrato in Figura 4.1(a)); 2 studenti hanno scritto una spiegazione generale utilizzando proprietà geometriche delle figure ovvero base e altezza (Figura 4.1(b)); uno studente ha fornito una spiegazione generale facendo anche riferimento al numero della figura (Figura 4.1(c)); un solo studente non ha giustificato a parole il risultato scrivendo solamene l'operazione effettuata (Figura 4.1(d)).

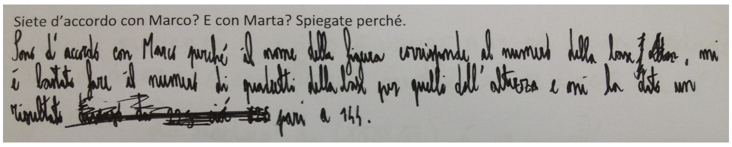



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.1: Esempi di giustificazione della risposta fornita.

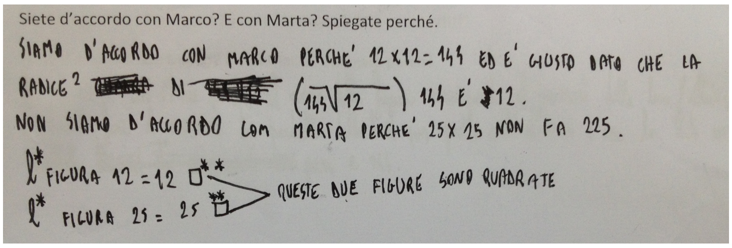
Nella seconda parte dell'attività, tutti i gruppi hanno fornito la risposta corretta eseguendo la moltiplicazione per determinare esclusivamente il numero di quadretti della figura richiesta nei quesiti. Le tipologie di spiegazione che si trovano nelle scheda collettiva sono solo due: tre gruppi hanno fornito una spiegazione per ciascuna delle due figure, facendo riferimento al caso specifico; due gruppi hanno giustificato separatamente le due risposte riferendosi esclusivamente al risultato della moltiplicazione effettuata senza spiegare la scelta dell'operazione.

Le risposte che si trovano nei fogli individuali di ciascun gruppo sono pressoché le stesse, se non addirittura identiche, di quelle riportate nella scheda collettiva. Questo accade in tutti i gruppi tranne in quello che l'insegnante aveva presentato come formato dai più forti della classe. Nelle schede individuali di questo gruppo infatti le tipologie di spiegazione sono varie e tra queste si trova quella più vicina alla generalizzazione fra tutte quelle prodotte nell'intera attività con questa classe, mostrata in Figura 4.2(a). La giustificazione che però è stata riportata nella risposta condivisa, mostrata in Figura 4.2(b) fa solo riferimento al risultato delle moltiplicazioni, senza ulteriori spiegazioni.


Siete d'accordo con Marco? E con Marta? Spiegate perché.

Sono d'accordo con Marco perché il nome della figura corrisponde al numero della base / altezza, mi è bastato fare il numero di quadretti della base per quello dell'altezza e mi ha dato un risultato ~~[illegible]~~ pari a 144.

(a) Giustificazione fornita da un componente del gruppo.


Siete d'accordo con Marco? E con Marta? Spiegate perché.

SIAMO D'ACCORDO CON MARCO PERCHE' 12 X 12 = 144 ED E' GIUSTO DATO CHE LA RADICE² ~~[illegible]~~ DI ~~[illegible]~~ (144√12) 144 E' 12.

NON SIAMO D'ACCORDO COM MARTA PERCHE' 25 X 25 NON FA 225.

l* FIGURA 12 = 12 □**

l* FIGURA 25 = 25 □**

QUESTE DUE FIGURE SONO QUADRATE

(b) Giustificazione collettiva.

Figura 4.2: Alcune risposte del gruppo formato dagli studenti segnalati come più forti.

## Osservazioni

Il fatto che sia nella parte del lavoro individuale che in quella del lavoro di gruppo sostanzialmente tutti abbiano risposto correttamente determinando la risposta con la sola moltiplicazione, insieme al poco tempo utilizzato per individuare le risposte corrette, indicano che il problema era particolarmente facile per il livello di competenze della classe. Il problema infatti era strettamente connesso con le competenze riguardanti il concetto di area di una figura piana, in particolare del quadrato, che quindi è ben noto e radicato negli studenti di questa quinta.

Quasi tutti hanno fornito una buona e completa giustificazione del procedimento utilizzato ma restando però nell'ambito aritmetico della figura specifica, fornendo una giustificazione per ciascuna figura. Questo comportamento è indice del fatto che la tendenza è di restare nell'ambito aritmetico, solo in rari casi si ha uno spontaneo spostamento verso un pensiero più algebrico, secondo la definizione usata in questo studio (si veda il Paragrafo 3.1.1) spiegando in termini generali come operare con una qualsiasi figura della successione.

### 4.1.2 L'attività con la prima A

La prima A è una classe di una scuola secondaria di primo grado di Assemini. Viene descritta dall'insegnate come eterogenea ma con un livello medio alto. Gli studenti presenti, e che quindi hanno partecipato al laboratorio, erano 22 di cui un DSA. La metodologia del laboratorio è spesso utilizzata dall'insegnate quindi la classe è abituata a risolvere autonomamente problemi, anche lavorando in gruppo, e a condividere e discutere risultati e strategie. Durante l'anno scolastico avevano già affrontato problemi sulle regolarità e sulle successioni di figure.

Delle attività con le classi della prima secondaria di primo grado questa è stata la prima in ordine cronologico.

#### I problemi

Sono stati utilizzati due problemi. Il primo riguardava la stessa successione di figure delle griglie quadrate utilizzata con la quinta ma le domande sono state somministrate tutte insieme utilizzando una sola scheda mostrata nella Tabella 4.3.

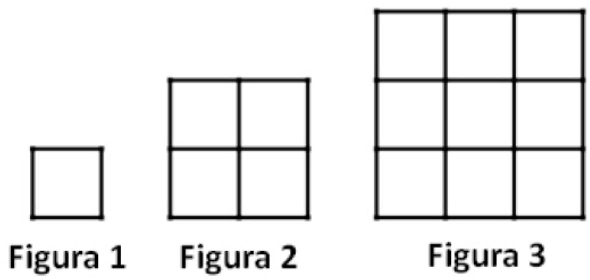
Il secondo problema, che usa una successione di griglie rettangolari formate da quadretti tutti uguali, è un riadattamento del problema delle griglie quadrate utilizzato dal Centro CRSEM[3] di Cagliari durante le attività di sperimentazione realizzate nell'anno scolastico 2010-2011 con insegnanti della scuola secondaria di primo grado.[4] La struttura è la stessa del problema delle griglie quadrate con la differenza che, anche per il primo quesito, si chiede esplicitamente di fornire la giustificazione della risposta data. Il testo è mostrato nella Tabella 4.4.

[3]Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica.

[4]La descrizione dell'intera attività è reperibile all'indirizzo `http://cli.sc.unica.it/crsem/images/pdf2/Sperimentazione/Lab_alunni/2010_2011/come$%$20una$%$20verifica$%$20pu$%$F2$%$20diventare$%$20laboratorio.pdf`.

Tabella 4.3: Testo del problema delle grigie quadrate usato nella prima fase di risoluzione collettiva con la prima A.

**Problema:** Le tre figure seguenti sono formate da quadretti tutti uguali.




Da quanti quadretti sarà formata la **Figura 10**?

Marco afferma: "La **Figura 12** sarà composta da 144 quadretti!!!"

Marta aggiunge: "La **Figura 25** sarà formata da 225 quadretti!!"

Sei d'accordo con Marco? E con Marta? Spiega perché.

Le possibili strategie e le tipologie attese di giustificazione delle risposte date sono le medesime del problema con la quinta primaria, riportate a pag. 72.

### Organizzazione del laboratorio

Il primo problema delle griglie quadrate è stato utilizzato nella prima fase del laboratorio ed è stato risolto durante una discussione collettiva gestita dall'insegnante della classe. Le immagini relative alle figure sono state disegnate alla lavagna e le domande sono state lette a voce alta. Questa modalità è stata concordata con l'insegnante che ha valutato il problema molto facile rispetto al livello degli studenti che, inoltre, ne avevano affrontato già uno simile all'inizio dell'anno scolastico. Il tempo previsto per questa fase era di 15 minuti.

Tabella 4.4: Testo del problema delle grigie rettangolari usato nella seconda fase del laboratorio con la prima A.

**Problema:** Osservate le figure in sequenza.

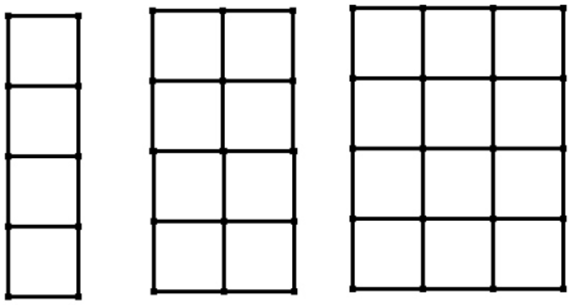


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Da quanti quadretti sarà formata la **Figura 10**? Spiega come hai trovato la risposta.

b) Claudio afferma che la **Figura 14** sarà formata da 60 quadretti.

Silvia dice che la **Figura 30** sarà formata da 120 quadretti.

Siete d'accordo con Claudio? E con Silvia? Giustificate la vostra risposta.

L'attività sul secondo problema delle griglie rettangolari è stata suddivisa nelle tre fasi abitualmente programmate dall'insegnante per le attività di laboratorio.

Durante la prima fase gli studenti hanno lavorato individualmente rispondendo a tutti i quesiti del problema. Il tempo concesso era di 10 minuti. È seguita una breve discussione per il confronto dei risultati e delle strategie utilizzate.

La seconda fase è stata di lavoro di gruppo. La consegna era di confrontare le risposte scritte da ciascuno nella fase individuale per produrre una risposta condivisa, eventualmente individuando diverse strategie risolutive. I 6 gruppi sono stati formati dall'insegnate secondo un criterio di omogeneità. Per questa fase era previsto un tempo di 20 minuti.

La fase successiva di discussione collettiva è stata organizzata sulla base di ciò che era stato osservato durante le due fasi precedenti. Sono state quindi stabilite tre parti: una prima parte di esposizione, da parte dei gruppi, della risposta condivisa e della relativa motivazione; una seconda parte avviata con l'introduzione della nuova domanda *sareste in grado di determinare il numero dei quadretti per una figura qualsiasi della successione?* con lo scopo di indurre gli studenti ad una formulazione generale dell'algoritmo seguito per rispondere alle domande della scheda, eventualmente anche mediante l'utilizzo del linguaggio simbolico; la terza parte di riproposta della medesima domanda ma variando la numerazione delle figure chiamando la prima "Figura 0" anziché "Figura 1" con lo scopo di far insorgere la necessità di esplicitare il legame fra il numero che indica la posizione della figura e il numero di quadretti.

### Dati raccolti dall'analisi degli elaborati

Benché diminuisca negli ultimi due quesiti, il numero di risposte corrette è molto alto: 19 su 22 per il primo quesito, in cui tutti forniscono comunque una risposta, e 17 su 22 nel secondo e nel terzo dove 3 studenti non forniscono nessuna risposta.

In Tabella 4.5 sono mostrate le frequenze delle strategie utilizzate per rispondere a ciascun quesito.

Tabella 4.5: Dati relativi alle strategie utilizzate per rispondere a ciascun quesito del problema delle griglie rettangolari.

| strategia | Figura 10 | Figura 14 | Figura 30 |
|---|---|---|---|
| non risponde | 1 | 6 | 3 |
| disegno | 1 | 0 | 0 |
| ricorsiva | 1 | 1 | 2 |
| moltiplicazione | 19 | 14 | 16 |
| lineare | 0 | 1 | 1 |

La possibilità di calcolare mediante moltiplicazione il numero di quadretti di tutte le figure fino a quella oggetto del quesito, contemplata fra le strategie a priori, non si è verificata pertanto non viene presa in considerazione nella tabella. Si sono verificati invece due casi di utilizzo della proprietà di linearità della funzione che associa alla posizione della figura il numero di quadretti corrispondente: nel primo caso è stata utilizzata l'additività relativamente alla figura 14, partendo dal numero di quadretti della figura 10 che era noto; nel secondo caso è stata usata l'omogeneità per determinare il numero di quadretti della figura 30 determinando prima quelli della figura 15 e raddoppiandoli.

Tabella 4.6: Dati relativi alle modalità di spiegazione fornite per giustificare le risposte ai quesiti.

| modalità di spiegazione | Figura 10 | Figure 14 e 30 |
|---|---|---|
| non fornisce spiegazione | 1 | 3 |
| basata sul risultato delle operazioni | 9 | 13 |
| a parole con riferimento al caso particolare | 4 | 2 |
| a parole generale senza riferimento al numero della figura | 4 | 3 |
| a parole generale con riferimento al numero della figura o a figure precedenti | 4 | 1 |
| anche mediante linguaggio simbolico | 0 | 0 |

La Tabella 4.6 mostra che la maggioranza degli studenti fornisce motivazioni basate sul risultato dell'operazione effettuata. Nella maggior parte delle risposte la giustificazione delle operazioni effettuate fa chiaro riferimento alla base e all'altezza dei rettangoli e in alcuni casi la moltiplicazione è preceduta dalla formula per il calcolo dell'area di un rettangolo come nell'esempio in Figura 4.3. È quindi evidente il forte ruolo delle competenze e conoscenze geometriche nella determinazione della soluzione del problema. È chiaro anche il ruolo del contenuto aritmetico radicato delle tabelline moltiplicative: alcune giustificazioni dell'utilizzo della moltiplicazione sono del tipo "perché ad ogni figura vengono aggiunti 4 quadretti".

Nelle risposte relative alle prime due righe della tabella non c'è alcun tentativo di generalizzazione poiché le spiegazioni sono riferite esclusivamente al caso specifico trattato nel quesito. Un tentativo di generalizzazione si ha invece nelle risposte che fanno parte della penultima modalità riportata nella

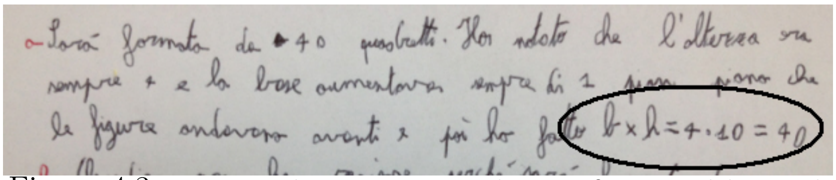



Figura 4.3: Esempio di risposta in cui la giustificazione del procedimento seguito è basata esclusivamente sulle proprietà geometriche della figura specifica.

tabella. La Figura 4.4 mostra due esempi: la prima immagine è relativa a una delle due risposte in cui si fa riferimento al numero della figura ma senza esplicitare la relazione di questo con il numero di quadretti di cui la figura è composta; la seconda è la spiegazione generale della strategia ricorsiva utilizzata per rispondere al quesito.

La spiegazione generale senza riferimento al numero della figura può essere considerata una posizione intermedia fra le due.

In questa classe, dunque, la maggior parte degli studenti fornisce una spiegazione senza tentare di descrivere un algoritmo generale.

La possibilità di descrivere l'algoritmo mediante il linguaggio simbolico non si è verificata. Solo quattro studenti hanno fatto riferimento al numero della figura o hanno descritto in termini generali un procedimento ricorsivo. Si deve sottolineare però che gli studenti che hanno fatto riferimento alla posizione della figura, che sono 2, non hanno esplicitato la relazione fra questa e il numero di quadretti che la compone.

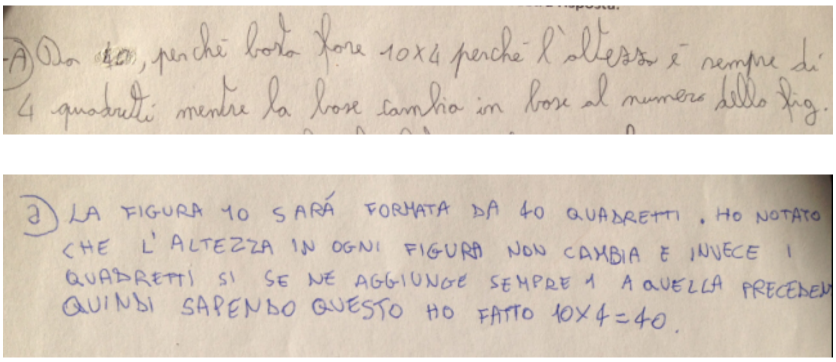



Figura 4.4: Due esempi delle risposte che fanno parte della penultima modalità.

Il fatto che il numero di risposte che rientrano nella categoria *alta generalizzazione* diminuisca ulteriormente per le ultime due figure non è dovuto alle caratteristiche dei quesiti ma piuttosto al fatto che molti, avendo già fornito una spiegazione generale per il primo quesito tendono, a non ripetere la stessa spiegazione in quelli successivi.

### La discussione sulla *figura qualsiasi*

È possibile con questi dati affermare che gli studenti di questo gruppo abbiano basse capacità di generalizzazione ovvero che non siano in grado di parlare di quantità generali o variabili? O la quasi assenza di descrizioni generali dell'algoritmo potrebbe essere dovuta ad altri fattori?

L'ipotesi formulata con l'insegnante nell'osservare le risposte scritte nelle schede durante il lavoro individuale era che, se i quesiti fanno riferimento solo a particolari figure, gli studenti non sono portati a descrivere un algoritmo generale e neanche a formulare esplicitamente il legame con la posizione della figura, questo soprattutto se la grandezza a cui applicano una formula (geometrica o aritmetica nota) corrisponde esattamente alla posizione della figura nella successione come succede nei due problemi proposti relativamente alla misura della base.

In Tabella 4.7 è riportato un estratto della discussione collettiva finale, che è seguita al lavoro di gruppo. L'estratto mostra cosa succede quando l'insegnante propone una nuova situazione in cui non si fa riferimento ad una specifica figura.

Tabella 4.7: Estratto della discussione successiva al lavoro di gruppo sul problema delle griglie quadrate.

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Praticamente la formula di questo è base per altezza |
| | Insegnante | Per trovare... |
| | Studente 1 | Per trovare... questa... |
| | Insegnante | Qualunque figura... e se non conosci la base come faresti? |
| | Studente 1 | In che senso se non conosci la base? |
| | Insegnante | Eh! Noi ve l'abbiamo data... vi abbiamo detto Figura 30, Figura... Giusto? Quindi fino ad ora avete ragionato sulla base perché la base c'era, giusto? E se noi non vi avessimo dato la base? Voi l'avete dedotta dal numero della figura |
| | Studente 2 | [*sovrapponendosi*] dal numero della figura! |
| | Insegnante | Dal numero della figura, giusto? E se noi non vi diciamo il numero della figura? |
| | Studente 2 | ce la dovevamo calcolare noi. |
| | Insegnante | e come avreste fatto? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.7: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 2 | Eee... più che altro io avrei sostituito il numero, come abbiamo fatto anche in altri esercizi, per esempio con una lettera, per esempio quattro per $x$, $x$ è un'incognita. |
| | Ricercatore | È $x$... per cosa la stai mettendo? Al posto di cosa la stai mettendo? |
| | Studente 2 | Perché lei ha detto: se non vi diamo il numero del... |
| | Studente 3 | Della base. |
| | Ricercatore | Quindi la stai usando per cosa? |
| | Studente 4 | $x$ è la base |
| | Ricercatore | $x$ è la base? |
| | Studente 4 | Anziché mett... se non sai il numero... la $x$... |
| | Studente 5 | Fai l'altezza per $x$ che è l'incognita del... |
| | Studente 4 | della base |
| | | *Parlano tutti insieme* |
| | Studente 4 | Se non sai neanche l'altezza $a$ per $b$ |
| | Ricercatore | Se non sai neanche l'altezza |
| | Studente 4 | [*sovrapponendosi*] o se no $a$ per quattro |
| | Ricercatore | ok $a$ per quattro... $a$ per quattro ci dà il numero... di che cosa? |
| | Studente 6 | È una formula |
| | Studente 4 | Devi applicarla perché base per altezza dà l'area |
| | Ricercatore | Di quale figura? |
| | Studente 4 | Della figura che stai calcolando... del rettangolo! |
| | Ricercatore | Ma di quale? Di quale figura della successione? |
| | Studente 6 | Di una qualunque |

Da questo estratto si capisce che gli studenti sono in grado produrre una formula generale per determinare il numero dei quadretti di una qualsiasi figura della successione ed è bastato che l'insegnante ponesse la domanda affinché qualcuno pensasse subito di utilizzare una lettera al posto del dato mancante, che in questo caso era la lunghezza della base.

Nell'ultima parte dell'estratto si nota che, nonostante la richiesta di chiarimenti sul dato rappresentato dalla $x$ (o dalla $a$), nessuno ha fatto riferimento alla posizione della figura: la variabile viene intesa come la misura della base anziché come il numero della figura come dovrebbe essere. A questo proposito, già durante il lavoro di gruppo, l'insegnante aveva osservato che la ragione di tale mancanza sarebbe potuta risiedere nel fatto che il dato necessario a determinare il numero di quadretti, ovvero la lunghezza del lato della figura, coincida con la posizione della figura nella successione. Per questo motivo, come anticipato, la domanda su come fare a determinare il numero di quadretti per una figura qualsiasi è stata riproposta variando però la numerazione delle figure e quindi nominando “Figura 0” quella che prima era la “Figura 1”. La discussione relativa è stata però gestita con l’obiettivo di modificare la formula trovata per il caso precedente (ovvero $4 \times x$) in modo che funzionasse anche nella nuova situazione. La discussione ha portato alla scrittura di $4 \times x + 4$ a cui però non è seguita un’argomentazione sul significato di tale formula o sul perché fosse effettivamente corretta.

La variazione della numerazione della successione non ha portato quindi il risultato sperato ma il motivo di ciò è stato attribuito al modo in cui la discussione era stata gestita. Per questo motivo, come si spiegherà nelle osservazioni che seguono, è stato ipotizzato che la relazione fra il numero che rappresenta la posizione della figura e il dato a cui si applica la formula (geometrica o aritmetica) nota sia una variabile significativa per far insorgere l’esigenza della descrizione generale dell’algoritmo da applicare al numero della figura per determinare la risposta.

### Osservazioni

L’alta percentuale di risposte corrette e le strategie utilizzate, così come le relative spiegazioni fornite negli elaborati hanno portato alla conclusione che il livello di difficoltà del problema fosse basso rispetto al livello di competenze della classe. Le risposte erano ottenute facendo ricorso ai contenuti geometrici (formule per il calcolo dell’area di quadrati e rettangoli) e aritmetici (tabelline moltiplicative) ben noti agli studenti. La facilità con cui si giungeva alla risposta, anche per le figure ordinate con i numeri più grandi, non ha fatto insorgere l’esigenza della ricerca di una relazione generale fra la posizione della figura e il numero di quadretti di cui era composta. Ciò che invece è successo nel momento della discussione, durante la quale una domanda diversa ha portato gli studenti a pensare in termini generali e a proporre l’uso di una lettera per indicare un dato non noto, ha portato ad ipotizzare che il mancato utilizzo di un linguaggio simbolico fosse dovuto non ad un’incapacità da parte degli studenti di pensare in termini generali e di utilizzare simboli per grandezze variabili, ma piuttosto alla natura del problema e dei quesiti.

All’inizio di questo capitolo si erano preannunciati i due obiettivi dello studio pilota:

a) verificare l'ipotesi, sostenuta da alcuni,[5] secondo cui gli studenti siano in grado di utilizzare simboli per rappresentare quantità incognite o variabili, ad un età inferiore rispetto a quella in cui, tradizionalmente, vengono introdotti al calcolo letterale;

b) individuare alcune delle variabili didattiche che possono favorire o ostacolare l'insorgere di processi di generalizzazione, soprattutto dal punto di vista delle caratteristiche dei problemi proposti.

Relativamente al punto a), come già osservato, l'unica occasione in cui alcuni studenti hanno proposto l'uso di una lettera, e quindi la scrittura di un'espressione algebrica, è stata durante la discussione mentre erano guidati dall'insegnante. Non è possibile quindi affermare che questa ipotesi sia stata confutata dai risultati dell'attività con la prima A. Questi piuttosto rinforzano quella secondo cui il modo in cui l'attività in classe viene gestita dall'insegnante favorisce la comprensione del senso delle espressioni algebriche. Le ipotesi i), iii) e iv) formulate a questo proposito, e riportate all'inizio di questo Capitolo, saranno oggetto del percorso sperimentale descritto nel Paragrafo 4.2.

Per quanto riguarda il punto b) se è vero che, come suggerito da Bell (1995)[6], i problemi che danno origine a successioni numeriche sono utili per introdurre il lavoro con funzioni e formule, i risultati ottenuti nell'attività appena descritta hanno portato la formulazione di due ipotesi: $\alpha$) affinché negli studenti insorga la necessità di una generalizzazione non è sufficiente che i problemi riguardino successioni numeriche ma un ruolo fondamentale è giocato anche dalla tipologia dei quesiti posti e $\beta$) il modo in cui tali successioni sono generate, ovvero la relazione che il numero che rappresenta la posizione della figura ha con le caratteristiche della figura stessa, può avere un ruolo nel favorire l'individuazione e l'esplicitazione della relazione fra la posizione della figura nella successione e l'elemento corrispondente.

Queste due ipotesi sono andate quindi a completare l'ipotesi ii) formulata prima della realizzazione dello studio,[7] che è diventata: i problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali che possono essere poi riscritti mediante il linguaggio simbolico *se formulati con determinati criteri.*

[5]Si veda il Paragrafo 2.3.
[6]Si veda il Paragrafo 3.2.1
[7]Si veda pag. 69

L'ipotesi che tali *criteri* siano quelli individuati da $\alpha$) e $\beta$) è stata verificata modificando le successioni di figure così come la tipologia dei quesiti posti per i problemi utilizzati nei due laboratori successivi realizzati con due diverse classi prime e descritti nel paragrafo che segue.

### 4.1.3 L'attività con la prima L e la prima M

I laboratori con le altre due prime saranno trattati insieme poiché la struttura dell'attività nonché i problemi utilizzati sono i medesimi.

#### Le classi

La prima M appartiene alla stessa scuola di Assemini della prima A ma ha una diversa insegnante di matematica. Gli studenti presenti all'attività erano 19. La prima L invece è una classe di una scuola secondaria di primo grado di Cagliari. Gli studenti della prima L coinvolti sono 26.

In entrambe le classi le due insegnanti programmano lezioni di tipo laboratoriale durante l'anno, quindi gli studenti erano abituati a lavorare secondo tale modalità.

#### I problemi

I risultati del laboratorio realizzato con la prima A hanno portato alla modifica dei problemi utilizzati, sia per quanto riguarda le successioni di figure scelte, sia per quanto riguarda la tipologia di quesiti posti.

Una delle ipotesi scaturite da tali risultati era che gli studenti non avessero sentito l'esigenza di cercare esplicitamente una relazione generale fra la posizione della figura e i quadretti di cui era composta perché tale relazione è stata individuate velocemente (e implicitamente/inconsciamente) probabilmente a causa sia del forte legame che questa aveva con conoscenze geometriche (la formula per determinare l'area del quadrato) o aritmetiche (la tabellina moltiplicativa del 4) ben note e radicate negli studenti, ma anche del fatto che la lunghezza del lato delle figure corrispondesse con il numero che indicava la posizione della figura nella successione.

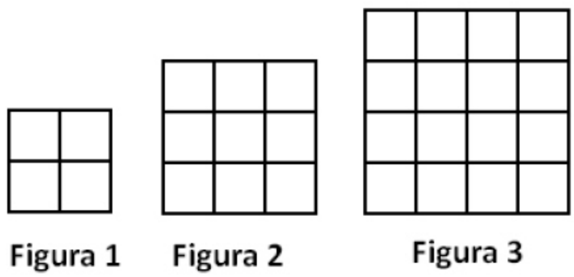
Per questo motivo la prima successione delle griglie quadrate è stata modificata in modo che la posizione della figura nella successione non coincidesse con la lunghezza del lato della figura. La successione del secondo problema è stata completamente cambiata: è stata scelta una successione in cui l'applicazione di un'unica formula o conoscenza già nota (geometrica o aritmetica) non fosse sufficiente a calcolare il dato cercato. Si tratta di una successione realizzata modificando il quesito C12 della prova INVALSI per la classe terza della scuola secondaria di primo grado dell'anno scolastico 2007/2008.

Si era inoltre ipotizzato che la necessità di cercare una relazione non fosse sufficiente a portare gli studenti a descrivere tale relazione esplicitamente. Per questo motivo è stato aggiunto un quesito, corrispondente alla domanda posta a voce durante la discussione con la prima A, con lo scopo di portare gli studenti a fornire una formulazione generale dell'algoritmo applicato per rispondere agli altri quesiti, ovvero della relazione individuata.

I testi dei problemi utilizzati sono riportati nelle Tabelle 4.8 e 4.9.

Tabella 4.8: Testo del problema delle grigie quadrate utilizzato durante la fase individuale dei laboratori con la prima L e la prima M.

**Problema:** Le tre figure seguenti sono formate da quadretti tutti uguali.




a) Marco dice: "La Figura 12 sarà formata da 144 quadretti!!". Sei d'accordo con Marco? Spiega perché.

b) Marta afferma: "La Figura 25 sarà forata da 576 quadretti!!". Sei d'accordo con Marta? Spiega perché.

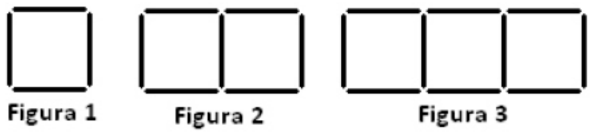
c) Secondo te, si può determinare il numero di quadretti di qualsiasi figura della successione? Se pensi di sì, spiega come. Se pensi di no, spiega perché.

Le strategie di soluzione attese per i quesiti a) e b) erano le seguenti

- disegnare:
  - ∗ tutte le figure della successione fino a quella oggetto del quesito e contarne i quadretti o gli stuzzicadenti;

Tabella 4.9: Testo del problema degli stuzzicadenti utilizzato durante la fase di lavoro di gruppo nei laboratori con la prima L e la prima M

**Problema:** Giocando con gli stuzzicadenti Mara e Claudio formano una successione di figure. Le prime tre figure della successione sono rappresentate qui sotto.




a) Mara dice: "La Figura 20 sarà formata da 62 stuzzicadenti!!". Siete d'accordo con Mara? Spiegate perché.

b) Stefano afferma: "La Figura 32 sarà formata da128 stuzzicadenti!!". Siete d'accordo con Stefano? Spiegate perché.

c) Secondo voi si può determinare il numero di stuzzicadenti di qualsiasi figura della successione? Se pensate di sì, spiegate come. Se pensate di no, spiegate perché.

∗ solo la figura richiesta dal quesito e contarne i quadretti o gli stuzzicadenti;

- applicare una strategia ricorsiva:

  per il problema delle griglie quadrate la strategia ricorsiva corretta consiste nel determinare il numero di quadretti di una figura aggiungendo al numero di quadretti di quella precedente lo stesso numero di quadretti aggiunti nel passaggio precedente aumentato di due. Ovvero, detto $q_n$ il numero di quadretti dell'$n-$esima figura: $q_n = q_{n-1} + (q_{n-1} - q_{n-2}) + 2$. Equivalentemente si può generare questa successione partendo da $q_1 = 4$ e aggiungendo la successione dei numeri dispari a partire da 5, quindi $q_n = q_{n-1} + (2n + 1)$. Ci si aspettava comunque l'utilizzo di altre strategie ricorsive (errate) consistenti nell'aggiungere lo stesso numero a ciascuna figura per ottenere la successiva, come se la successione numerica fosse aritmetica.

per il problema degli stuzzicadenti la strategia ricorsiva corretta consiste nell'aggiungere 3 al numero degli stuzzicadenti della figura precedente, ovvero detto $s_n$ il numero di stuzzicadenti dell'$n-$esima figura: $s_n = s_{n-1} + 3$. Ci si aspettava però che alcuni studenti potessero determinare la successione aggiungendo 4 [$s_n = s_{n-1} + 4$] anziché 3 per via della forma delle figure.

- applicare una regola esplicita determinando il numero di quadretti o stuzzicadenti in base alla posizione della figura nella successione:

  per il problema delle griglie quadrate la regola esplicita corretta consiste nell'elevare al quadrato il successore del numero che rappresenta la posizione della figura [$q_n = (n + 1)^2$]. Le strategie dirette errate attese consistono nell'elevare al quadrato il numero della figura (ovvero senza prima aggiungergli 1, $q_n = n^2$) oppure nell'elevare al quadrato il numero precedente del numero della figura [$q_n = (n - 1)^2$].

  per il problema degli stuzzicadenti le strategie dirette corrette sono più di una:

  ∗ $s_n = 1 + 3n$
  ∗ $s_n = 4 + 3(n - 1)$
  ∗ $s_n = 2n + (n + 1)$
  ∗ $s_n = 4n - (n - 1)$

Le strategie illustrate consentono, se utilizzate applicando un procedimento corretto, di arrivare alla risposta giusta. È però contemplata a priori un'ulteriore strategia che, per nessuna di queste successioni, consente di ottenere la risposta corretta e che consiste nello

- attribuire una proprietà di linearità alla successione applicandovi:[8]

  ∗ la proprietà addittiva: $f_{n+m} = f_n + f_m$

  o

  ∗ la proprietà di omogeneità: $f_{kn} = kf_n$.

Le tipologie di risposta attese per il quesito c) erano le seguenti:

[8]Nelle formule che seguono si è denotato con $f_n$ il numero di oggetti (quadretti o stuzzicadenti) di cui è composta la figura $n-$esima.

- affermare l'impossibilità di determinare il numero di quadretti o stuzzicadenti per qualsiasi figura;
- giustificare la possibilità di determinare il numero di quadretti o stuzzicadenti fornendo un esempio;
- descrivere mediante linguaggio verbale l'algoritmo che consente di calcolare il numero di quadretti o stuzzicadenti a partire dalla posizione della figura nella successione;
- fornire una formula algebrica che descrive l'algoritmo utilizzato per il calcolo, eventualmente insieme ad una spiegazione con il linguaggio verbale.

### Analisi dei dati ricavati dagli elaborati

Nelle tabelle che seguono sono riassunti i dati ricavati dall'analisi degli elaborati, basata sulle risposte attese ai quesiti.

Si anticipa che nessuno studente o gruppo di studenti ha mai applicato una strategia basata sull'additività o sull'omogeneità, per questo motivo le tabelle non riportano questa voce.

Per il quesito c) ciò che interessava era la modalità con cui veniva descritto l'algoritmo utilizzato per rispondere ai primi due quesiti. Per questo motivo chi affermava l'impossibilità di determinare il numero di quadretti o stuzzicadenti per qualsiasi figura è stato considerato allo stesso modo di chi non forniva una risposta poichè effettivamente non forniva la descrizione dell'algoritmo. Le risposte che contenevano una descrizione mediante il linguaggio verbale sono state invece suddivise in due gruppi a seconda che la descrizione fornisse effettivamente un algoritmo chiaro in cui fossero ben esplicitate le operazioni da eseguire e a quale oggetto dovessero essere applicate o meno. Queste due modalità sono state classificate rispettivamente come *a parole completa* e *a parole incompleta*. Infine, sono state incluse nella modalità *formula* anche quelle risposte in cui veniva utilizzato un linguaggio simbolico anche non canonico o che contenesse parole o abbreviazioni (sono mostrati degli esempi in Figura 4.5).

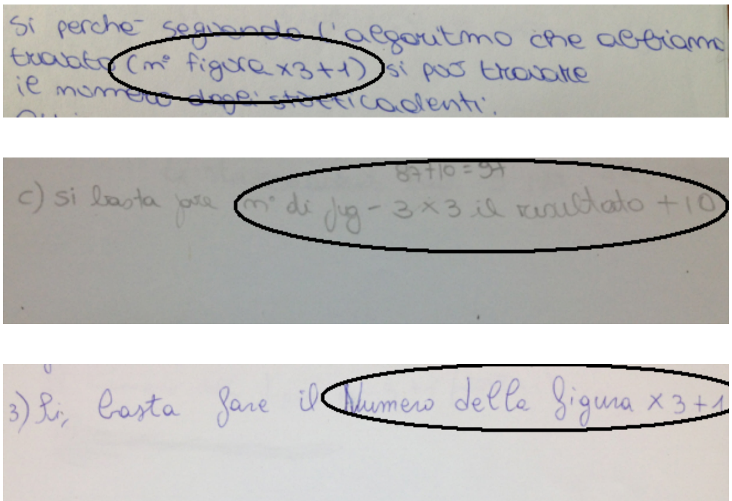



Figura 4.5: Esempi di descrizione dell'algoritmo considerati *formula*.

Tabella 4.10: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema delle griglie quadrate, risolto individualmente. Classe: prima L.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito A | Esito | Corretto | 15 |
| | | Errato | 9 |
| | Strategia | Diretta | 22 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 1 |
| | Non risponde | | 2 |
| Quesito B | Esito | Corretto | 17 |
| | | Errato | 5 |
| | Strategia | Diretta | 21 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 4 |
| Quesito C | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 0 |
| | | A parole completa | 8 |
| | | A parole incompleta | 12 |
| | | Esempio | 2 |
| | | Non risponde | 4 |

Tabella 4.11: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema degli stuzzicadenti, risolto lavorando in gruppo. Classe: prima L.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito A | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 0 |
| | Strategia | Diretta | 4 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito B | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 0 |
| | Strategia | Diretta | 4 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito C | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 3 |
| | | A parole completa | 2 |
| | | A parole incompleta | 0 |
| | | Esempio | 0 |
| | | Non risponde | 0 |

Tabella 4.12: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema delle griglie quadrate, risolto individualmente. Classe: prima M.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito A | Esito | Corretto | 10 |
| | | Errato | 6 |
| | Strategia | Diretta | 14 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 1 |
| | Non risponde | | 3 |
| Quesito B | Esito | Corretto | 9 |
| | | Errato | 5 |
| | Strategia | Diretta | 13 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 5 |
| Quesito C | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 0 |
| | | A parole completa | 2 |
| | | A parole incompleta | 7 |
| | | Esempio | 4 |
| | | Non risponde | 6 |

Tabella 4.13: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema degli stuzzicadenti, risolto lavorando in gruppo. Classe: prima M.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito A | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 0 |
| | Strategia | Diretta | 1 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 3 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito B | Esito | Corretto | 4 |
| | | Errato | 1 |
| | Strategia | Diretta | 1 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 3 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito C | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 0 |
| | | A parole completa | 0 |
| | | A parole incompleta | 3 |
| | | Esempio | 2 |
| | | Non risponde | 0 |

Il primo aspetto che si vuole analizzare riguarda il fatto che le ipotesi formulate sul modo di costruire la successione di figure e sulla tipologia dei quesiti posti siano state confermate dai dati raccolti.

Rispetto ai risultati ottenuti nel precedente laboratorio con la prima A si registra una diminuzione della percentuale di risposte corrette ai primi due quesiti. Infatti, mentre nell'attività precedente le risposte corrette sono state, rispettivamente, 19 su 22 e 17 su 22, in questo caso si hanno 15 su 26 e 17 su 26 risposte corrette per la prima L e 10 su 19 e 9 su 19 per la prima M.

Per quanto riguarda la strategia utilizzata, se si considera il problema delle griglie quadrate, anche in questa attività, in entrambe le classi, la strategia maggiormente utilizzata è quella diretta. Nel problema degli stuzzicadenti, che è stato risolto lavorando in gruppo, si ha un comportamento molto diverso nella prima M dove 3 gruppi su 5 utilizzano il disegno, uno una strategia ricorsiva e l'ultimo (che è l'unico che ha fornito una risposta errata) utilizza una strategia diretta.

Ciò che interessava maggiormente delle modifiche apportate ai testi dei problemi era l'ipotesi che, modificando le successioni di figure e in particolare aggiungendo un quesito che esplicitamente chiedesse se, e soprattutto come, fosse possibile determinare il numero di quadretti (o stuzzicadenti) di una figura qualsiasi, si portassero gli studenti ad una descrizione generale dell'algoritmo utilizzato per rispondere ai primi due quesiti.

Nell'attività con la prima A, dei 22 studenti coinvolti, nessuno aveva fornito una descrizione generale completa dell'algoritmo e nessuno aveva esplicitato la relazione generale fra il numero della figura e il numero di quadretti e solo 4 avevano fornito una descrizione incompleta dell'algoritmo generale. Nella prima L invece 20 studenti su 26 forniscono una descrizione a parole e solo due forniscono un esempio. Nella prima M 9 su 19 forniscono una descrizione a parole e 4 un esempio.

In alcune delle risposte relative al problema delle griglie quadrate della prima M e della prima L che sono state considerate incomplete viene comunque esplicitata la relazione fra il numero della figura e le caratteristiche della figura stessa, aspetto che invece manca in tutte le risposte della prima A. In alcune risposte si legge infatti:

> Il numero totale dei quadretti della successione si trova aggiungendo 1 al numero della figura. (Classe 1L)
>
> Bisogna aumentare di un numero i quadretti della figura. (Classe 1M)
>
> Al lato di ogni quadrato c'è sempre 1 quadrato in più del numero della figura. (Classe 1M)
>
> I quadretti andranno sempre con un numero in più rispetto al numero della figura. (Classe 1M)
>
> Ho notato che ogni numero di quadretti di un lato corrisponde a una cifra in più del numero della figura. (Classe 1M)

Tutti questi studenti hanno fornito risposte corrette ai primi due quesiti, svolgendo correttamente il calcolo completo. È come se l'importante nel descrivere l'algoritmo sia dire come dal numero della figura si ricava la lunghezza del lato del quadrato corrispondente, come se il fatto di dover poi moltiplicare il numero ottenuto per se stesso (o calcolarne il quadrato) fosse scontato e non fosse quindi necessario esplicitarlo nella spiegazione. Questo, insieme all'incremento delle spiegazioni a parole, in particolare quelle complete, porta a considerare corretta l'ipotesi secondo cui il fatto che, nei problemi utilizzati con la prima A, il numero della figura coincidesse con la misura del lato del rettangolo abbia inibito la necessità di esplicitare il legame fra questi due elementi che, in alcuni casi di questo successivo laboratorio, sembra essere la parte essenziale della descrizione dell'algoritmo.

Oltre a osservazioni relative al confronto fra il primo laboratorio e questo, i dati rivelano delle differenze significative fra le due classi, nonostante i problemi somministrati fossero identici. Nella prima M, infatti, la classe si divide sostanzialmente a metà fra chi fornisce una spiegazione a parole (completa o incompleta) e chi invece non risponde o risponde solo con un esempio. Mentre nella prima L questo succede solo per 6 studenti su 26.

La differenza fra la prima L e la prima M si vede anche nei risultati del lavoro di gruppo: in entrambe le classi tutti i gruppi forniscono una risposta ma nessuno dei gruppi della prima L fornisce una descrizione incompleta o un esempio a differenza di ciò che succede nella prima M in cui questo succede per 3 gruppi su 5. Inoltre, nella prima L accade un fatto interessante se si confrontano i risultati del lavoro individuale con quelli del lavoro di gruppo: mentre nel lavoro individuale nessuno studente aveva utilizzato il linguaggio simbolico per descrivere l'algoritmo, nell'attività successiva questo succede per 3 gruppi su 5.

Nel lavoro di gruppo gli studenti della prima L hanno risposto al terzo quesito o con una descrizione a parole completa dell'algoritmo o mediante il linguaggio simbolico. Questo è indice del fatto che il passaggio dal lavoro individuale al lavoro di gruppo abbia in qualche modo favorito il processo di generalizzazione. Lo stesso però non è successo nella prima M.

Questo potrebbe essere giustificato ragionevolmente dalla differenza iniziale fra le due classi, evidenziata dai diversi risultati del lavoro individuale,[9] ma anche dalle strategie utilizzate dalla prima M nel lavoro di gruppo per rispondere ai primi due quesiti. Tre gruppi su cinque, infatti, risolvono entrambi i quesiti disegnando tutte le figure, due di questi rispondono al quesito c) fornendo un esempio e l'altro con una descrizione incompleta a parole. Anche l'unico gruppo che utilizza una strategia diretta comunque fornisce una descrizione incompleta dell'algoritmo applicato, descrivendo in realtà come disegnare ogni figura con un procedimento di fatto ricorsivo. Scrivono infatti:

> Sì perchè ad ogni figura si aggiunge un quadrato di cui si toglie un lato perché è attaccato agli altri quadrati.

Si può però ipotizzare che abbia contribuito al mancato progresso nelle risposte del quesito c) della prima M, anche una differenza nel modo in cui le

[9]Si vedano le Tabelle 4.10 e 4.12.

attività nelle due classi si sono svolte. Nella prima L infatti, alla risoluzione del problema individuale è seguita una breve discussione in cui gli studenti hanno condiviso le risposte date ai tre quesiti. Un estratto della discussione relativo al quesito c) è riportato nella Tabella 4.14.

Nella prima M la discussione non ha potuto avere luogo poiché il tempo rimasto dopo la risoluzione del problema individuale era sufficiente solo per la risoluzione del secondo problema.

Nel caso della prima L quindi, la discussione e le risposte esibite dagli studenti che avevano fornito una descrizione completa hanno portato la classe alla condivisione della descrizione dell'algoritmo generale.

Si può quindi considerare la variabile "discussione", cioè la modalità di organizzazione dell'attività laboratoriale di apprendimento, come fondamentale per la genesi di processi di generalizzazione.

Tabella 4.14: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate. Gli studenti stanno riportando il calcolo eseguito per rispondere ai primi due quesiti.

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Ho notato che la figura aveva un nome, prendiamo figura 4, però il lato superava, di quadretti, di uno il numero che c'era nel nome. Quindi figura 4 e aveva il lato di 5. E allora, costantemente, mi aveva chiesto la figura 12, dalla figura 12 ho aggiunto 1 e mi ha dato il lato. Poi ho fatto lato per lato e ho trovato l'area. |
| | | *Gli altri affermano di aver utilizzato lo stesso procedimento* |
| | Ricercatore | Quindi quando chiede se siete in grado di calcolarlo per tutte le figure... ci riuscireste? |
| | Tutti | Siii! |
| | Ricercatore | E chi ci spiega come? |
| | Studente 2 | Se nella figura 1 il lato è da 2, per esempio nella figura 40, il lato sarà di 41. Quindi basta fare 41 per 41 e scopri l'area. Così per tutte le figure. Per esempio per la figura 200, il lato sarà 201: 201 per 201. |
| | Ricercatore | L'avete spiegato tutti così? |
| | Studente 3 | Io ho fatto un esempio |
| | Studente 4 | Il numero della figura più uno |
| | Insegnante | Il numero della figura più uno? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.14: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 4 | Per calcolare l'area il numero dei quadratini dovrebbero essere il numero della figura più uno al quadrato. |
| | Insegnante | Tu hai trovato questo? Numero della fig... enne? che cosa è enne? Ha detto enne? |
| | Ricercatore | No. Numero della figura più uno al quadrato |
| | Studente 5 | Ma io non ho capito neanche il primo! |
| | Studente 4 | Allora... il numero della figura, ad esempio figura 1 è fatta da un quadrato 2 per 2 e ha un quadrettino in più rispetto all'uno... Cioè fai 1 più 1 e ti esce il lato. Figura 2, fai 2 più 1 e ti esce il lato che è 3. Cioè praticamente tu devi aggiungere 1 al numero della figura. |
| | Studente 5 | Eh. |
| | Studente 4 | E poi lo devi moltiplicare al quadrato e ottieni il numero dei quadratini. |
| | Studente 5 | Allora ho fatto giusto! |

### 4.1.4 Osservazioni

Come già osservato analizzando i risultati dell'attività con la prima A,[10] indubbiamente problemi riguardanti successioni di figure creano situazioni che favoriscono la messa in atto di processi di generalizzazione nel senso che inducono la ricerca di relazioni fra grandezze che variano secondo un legame funzionale.

Confrontando i risultati della prima A e delle prime L e M[11], rispetto alle tipologie di giustificazione dell'algoritmo, si osserva che spiegazioni generali e complete che non si riferiscono a valori particolari e che esplicitano la relazione fra il numero della figura e il numero di quadretti (o stuzzicadenti) sono comparse solo dopo:

- aver inserito un quesito che facesse esplicitamente riferimento a "qualsiasi figura";
- aver scelto pattern di figure che non richiamassero un'unica formula geometrica già nota o in cui la grandezza variabile da utilizzare nella formula non corrispondesse esattamente alla quantità variabile (ovvero alla posizione della figura nella successione).

[10] Si veda pag. 85.

[11] Si vedano rispettivamente pag. 80 e 91.

Le osservazioni seguite all'analisi dei dati relativi all'attività con la prima A avevano portato alla formulazione di due ipotesi che sono state evidentemente verificate, ovvero:

$\alpha$) affinché negli studenti insorga la necessità di una generalizzazione non è sufficiente che i problemi riguardino successioni numeriche ma un ruolo fondamentale è giocato anche dalla tipologia di quesiti posti e

$\beta$) il modo in cui tali successioni sono generate, ovvero la relazione che il numero che rappresenta la posizione della figura ha con le caratteristiche della figura stessa, può avere un ruolo nel favorire l'individuazione della relazione fra la posizione della figura nella successione e l'elemento corrispondente.

Le differenze riscontrate invece fra i risultati del lavoro di gruppo della prima L e della prima M, ovviamente tenendo conto del fatto che la variabile classe ha sicuramente un ruolo nei risultati ottenuti, sono una prima conferma di una delle ipotesi formulate prima della realizzazione delle attività e riportate all'inizio di questo Capitolo, ovvero che iv) la discussione collettiva sulle diverse risposte fornite porti un progresso nella generalizzazione ovvero nelle modalità di spiegazione di un algoritmo utilizzato per rispondere ad un quesito numerico.

### 4.1.5 L'attività con la terza L

L'ultima attività del progetto pilota nella scuola secondaria di primo grado è stata realizzata con una terza. Questa scelta è stata dettata dal voler analizzare l'utilizzo del linguaggio simbolico in studenti che hanno già affrontato il calcolo letterale e le equazioni di primo grado. L'attività è stata pertanto svolta alla fine dell'anno scolastico.

#### La classe

La scuola di appartenenza della classe coinvolta è ancora la scuola secondaria di secondo grado "V. Alfieri" di Cagliari. Gli studenti che hanno partecipato sono 23 e l'insegnante della classe è la stessa della prima L, coinvolta nelle attività precedenti.

#### I problemi e l'organizzazione dell'attività laboratoriale

Il laboratorio è stato condotto dalla docente della classe ed è stato suddiviso in due fasi: la prima di lavoro individuale e la seconda di lavoro di gruppo.

Alla fine di ciascuna delle due fasi i risultati del lavoro sono stati discussi con l'intera classe.

Tabella 4.15: Testo del problema degli stuzzicadenti utilizzato durante la fase individuale del laboratorio con la terza

**Problema:** Giocando con gli stuzzicadenti Mara forma una successione di figure. Le prime tre sono rappresentate qui sotto.

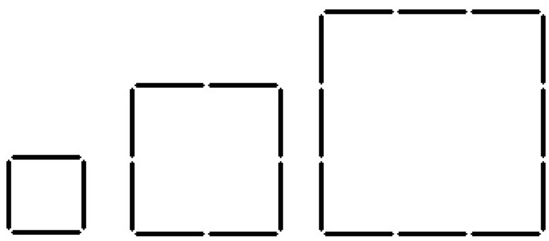


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Quanti stuzzicadenti dovrà usare Mara per formare la Figura 10? Spiega come hai trovato la risposta.

b) Mara dice che per costruire la Figura 15 dovrà usare 225 stuzzicadenti. Sei d'accordo con Mara?

c) Sei in grado di determinare il numero di stuzzicadenti necessari per qualsiasi figura? Se sì, spiega come.

La formazione dei gruppi è stata stabilita dalla docente secondo criteri di eterogeneità in modo che in ciascun gruppo fosse presente almeno un "elemento trainante".

Il problema utilizzato per la fase di lavoro individuale (mostrato in Tabella 4.15) è analogo a quelli utilizzati nelle prime L e M: la successione di figure è stata cambiata ma i quesiti sono i medesimi quindi le strategie e le risposte attese sono analoghe.

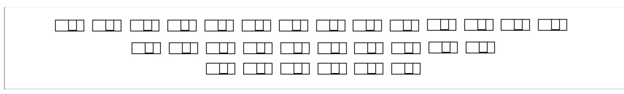
Per quanto riguarda la strategia ricorsiva, che consite nell'aggiungere 4 al numero di stuzzicadenti della figura precedente [$s_n = s_{n-1} + 4$], in realtà non ci si aspettava che venisse utilizzata anche se contemplata fra le strategie a priori. Il motivo di questa ipotesi è che ci si aspettava che la maggior parte degli studenti rispondesse al quesito mettendo in gioco le proprie conoscenze geometriche e quindi utilizzando la formula per determinare il perimetro.

Pertanto fra le strategia dirette attese una, quella corretta, consiste nel moltiplicare il numero che rappresenta la posizione della figura nella successione per 4 [$s_n = 4n$]. È stata considerata anche una strategia diretta errata corrispondente al calcolo dell'area della figura in luogo del perimetro, ovvero l'elevamento al quadrato del numero della figura [$s_n = n^2$].

Nel lavoro di gruppo è stato utilizzato il problema riportato in Tabella 4.16, scritto modificando uno dei problemi illustrati in Lannin et al. (2006). In questo caso la successione numerica non è generata da una successione di figure ma dal numero di macchinine da disporre nelle file.

Tabella 4.16: Testo del problema delle macchinine utilizzato durante la fase di lavoro di gruppo del laboratorio con la terza.

**Problema:** Claudio ha una collezione di macchinine e vuole disporle su un grande tavolo nella sua stanza nel seguente modo: nella prima fila sistema 6 macchinine, nella seconda ne mette quattro in più rispetto alla prima, nella terza quattro in più rispetto alla seconda e così via....



a) Quante macchinine dovrà mettere Claudio nella fila 10? Spiegate come avete trovato la risposta.

b) Quante nella fila 35? Spiegate come avete trovato la risposta.

c) Sapreste determinare il numero di macchinine per qualsiasi fila? Se sì, spiegate come.

d) In quale fila ci saranno 94 macchinine? E in quale fila 200? Spiegate come avete trovato le risposte.

Anche in questo caso le strategie attese per rispondere ai primi due quesiti erano: il disegno; la strategia ricorsiva, la strategia diretta e l'applicazione della linearità.

In particolare la strategia ricorsiva corretta consiste nel determinare il numero delle macchinine dell'$n-$esima fila ($m_n$) aggiungendo 4 a quello della fila precedente. Le strategie ricorsive errate contemplate fra quelle a priori consistono:

∗ nell'aggiungere 2 anziché 4, se si considerano nella figura le macchine che, per ogni fila, "sporgono" da un lato: $m_n = m_{n-1} + 2$

∗ nell'aggiungere 6 anziché 4, se si utilizza il numero di macchinine nella prima fila: $m_n = m_{n-1} + 6$.

Le strategie dirette attese a priori erano invece:

∗ moltiplicare il numero precedente del numero della fila per 4 e aggiungere 6: $m_n = 6 + 4(n - 1)$;

∗ moltiplicare il numero della fila per 4 e aggiungere 2: $m_n = 2 + 4n$

oltre ai procedimenti errati di

∗ moltiplicare il numero della fila per 4: $m_n = 4n$;

∗ moltiplicare il numero della fila per 6: $m_n = 6n$;

∗ moltiplicare il numero della fila sia per 6 che per 4 e sommare i risultati: $m_n = 6n + 4n$

In questo problema è stato aggiunto un quarto quesito, il quesito d), che corrisponde a risolvere un'equazione di primo grado. Quello che ci si aspettava era infatti che, avendo gli studenti già affrontato il tema delle equazioni, almeno in qualche caso la risposta a questo quesito sarebbe stata determinata mediante l'impostazione e la risoluzione di un'equazione. Le strategie attese erano dunque le seguenti:

- procedere per prove ed errori determinando il numero di macchinine in diverse file usando la stessa strategia utilizzata per i primi due quesiti;
- applicare la strategia ricorsiva fino al raggiungimento o superamento del numero di macchinine richiesto;
- determinare una formula inversa di quella utilizzata per i primi due quesiti;
- impostare e risolvere la corrispondente equazione di primo grado.

Tabella 4.17: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema degli stuzzicadenti, risolto individualmente. Classe: terza L.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito a) | Esito | Corretto | 21 |
| | | Errato | 2 |
| | Strategia | Diretta | 19 |
| | | Ricorsiva | 2 |
| | | Disegno | 2 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito b) | Esito | Corretto | 21 |
| | | Errato | 1 |
| | Strategia | Diretta | 21 |
| | | Ricorsiva | 1 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 1 |
| Quesito c) | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 4 |
| | | A parole completa | 3 |
| | | A parole incompleta | 6 |
| | | Esempio | 8 |
| | | Non risponde | 2 |

**Analisi dei dati ricavati dagli elaborati**

In Tabella 4.17 sono riportati i risultati del lavoro individuale. Come si vede solo due studenti forniscono una risposta errata ai primi due quesiti, segno che il problema fosse alla portata degli studenti che lo hanno risolto in quindici minuti. La strategia utilizzata sostanzialmente da tutti è stata quella diretta: ovvero la moltiplicazione del numero degli stuzzicadenti di un lato per 4. Alcuni hanno giustificato questa strategia parlando di perimetro del quadrato, altri osservando che per ogni figura si aggiungono 4 stuzzicadenti e che quindi sia sufficiente utilizzare la tabellina moltiplicativa del 4. Il numero delle risposte corrette e il fatto che la strategia maggiormente utilizzata sia quella diretta confermano le aspettative a priori.

Lo stesso non si può dire per i successivi due quesiti. Nel quesito c) la spiegazione con la frequenza maggiore è stato l'esempio e 16 dei 23 studenti non hanno fornito una spiegazione generale completa dell'algoritmo. Inoltre anche i 4 studenti che hanno utilizzato il linguaggio simbolico lo hanno fatto comunque mediante abbreviazioni o parole intere: nessuno ha scritto un'espressione algebrica utilizzando il simbolismo canonico. Le risposte in cui viene utilizzato il linguaggio simbolico con parole o abbreviazioni sono riportate in Figura 4.6.

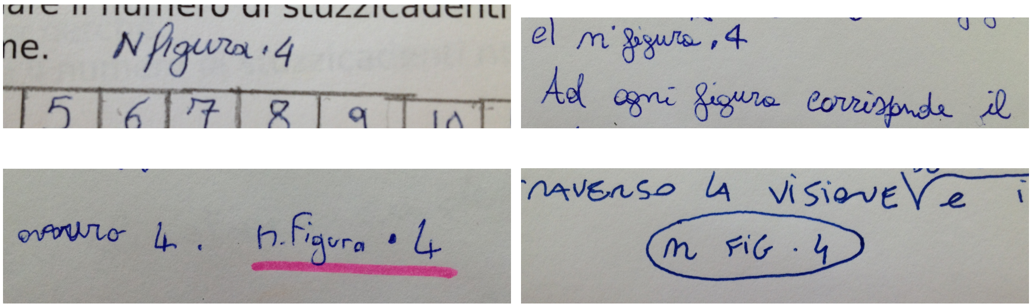



Figura 4.6: Le quattro risposte al quesito c) del problema degli stuzzicadenti in cui viene utilizzato anche il linguaggio simbolico.

Degli studenti che hanno provato a fornire una spiegazione a parole, solo 3 hanno descritto correttamente l'algoritmo. Gli altri 6 hanno fornito una descrizione incompleta in cui non si faceva riferimento al numero della figura ma solo al numero degli stuzzicadenti in un lato.

Nel lavoro di gruppo si nota un progresso per quanto riguarda le modalità di spiegazione dell'algoritmo seguito. Nel secondo problema infatti tutti i gruppi forniscono una spiegazione completa o mediante il solo linguaggio verbale o anche utilizzando il linguaggio simbolico ma ancora non convenzionale (Figura 4.7). Probabilmente conseguenza di ciò, al contrario di quello che ci si aspettava, nessun gruppo imposta e risolve una equazione per rispondere al quarto quesito.

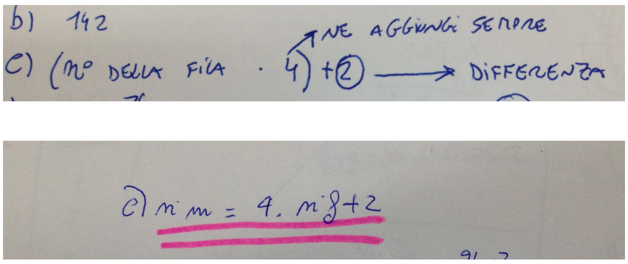



Figura 4.7: Linguaggio simbolico utilizzato nella spiegazione generale dell'algoritmo fornita da due dei gruppi per rispondere al quesito c) del problema delle macchinine.

### Osservazioni

Come anticipato, le risposte fornite al quesito c) si sono rivelate molto lontane dalle aspettative. Ci si aspettava innanzitutto che gli studenti della terza

Tabella 4.18: Tabella riassuntiva dei dati relativi al problema delle macchinine, risolto durante il lavoro di gruppo. Classe: terza L.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito a) | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 0 |
| | Strategia | Diretta | 3 |
| | | Ricorsiva | 2 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito b) | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 0 |
| | Strategia | Diretta | 3 |
| | | Ricorsiva | 0 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 1 |
| Quesito c) | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 3 |
| | | A parole completa | 2 |
| | | A parole incompleta | 0 |
| | | Esempio | 0 |
| | | Non risponde | 0 |
| Quesito d) | Esito 94 | Corretto | 4 |
| | | Errato | 1 |
| | Esito 200 | Corretto | 2 |
| | | Errato | 3 |
| | Strategia | Equazione | 0 |
| | | Formula inversa | 5 |
| | | Ricorsiva | 0 |
| | | Prove ed errori | 0 |
| | Non risponde | | 0 |

sappia lavorare con i polinomi e le espressioni algebriche.

Questo, insieme al fatto che nessuno studente abbia pensato di impostare un'equazione per risolvere il quarto quesito, conferma le affermazioni che si trovano nella letteratura, alcune delle quali riportate nel paragrafo 2.1, riguardo alla percezione che gli studenti hanno del calcolo letterale: un insieme di regole prive di significato e anche di utilità.

### 4.1.6 Conclusioni sullo studio pilota

Gli obiettivi che ci si era posti di raggiungere con lo studio pilota[12] erano due:

a) verificare l'ipotesi, sostenuta da alcuni,[13] secondo cui gli studenti siano in grado di utilizzare simboli per rappresentare quantità incognite o variabili, ad un età inferiore rispetto a quella in cui, tradizionalmente, vengono introdotti al calcolo letterale;

b) individuare alcune delle variabili didattiche che possono favorire o ostacolare l'insorgere di processi di generalizzazione, soprattutto dal punto di vista delle caratteristiche dei problemi proposti.

In merito a tali obiettivi, i risultati ottenuti nell'attività con la quinta primaria consentono solo di affermare che studenti così piccoli non sentono il bisogno di descrivere una generalizzazione dell'algoritmo utilizzato per rispondere ad un quesito aritmetico se non gli viene loro esplicitamente chiesto. Ma questo non sorprende visto che ciò è accaduto raramente anche con gli studenti della prima A, di un anno più grandi. Sarebbe interessante verificare se una modifica dei quesiti e delle successioni di figure analoga a quella apportata per le classi prime e utilizzata nei laboratori con la prima L e la prima M, porti modifiche significative in questo senso anche con studenti più piccoli, compresa la scrittura di espressioni simboliche mediante abbreviazioni per rappresentare le grandezze variabili. Un tale studio non è stato però realizzato nell'ambito di questo lavoro in cui l'unica attività che ha interessato una quinta primaria è appunto quella già descritta dello studio pilota.

È stato realizzato invece un percorso sperimentale con cinque classi prime della scuola secondaria di primo grado. Lo studio è stato progettato anche sulla base delle conclusioni tratte dalle attività con le prime dello studio pilota relativamente agli obiettivi posti e sopra citati, in merito ai quali si afferma quanto segue.

[12]Si veda pagina 70.

[13]Si veda il Paragrafo 2.3.

a) Il fatto che, per rispondere al quesito sulla figura qualsiasi, nel lavoro di gruppo alcuni studenti della prima M abbiano utilizzato un linguaggio simbolico non convenzionale consente di affermare che già a 11-12 anni siano in grado di rappresentare in modo simbolico relazioni fra grandezze utilizzando abbreviazioni per le grandezze incognite o variabili. Le espressioni simboliche sono però comparse solo nel lavoro di gruppo, ovvero dopo la discussione collettiva, e non sono mai state utilizzate singole lettere per rappresentare le variabili. Anche sulla base di questo risultato, alla fine della descrizione del percorso sperimentale con le prime, si discuteranno le ipotesi i) e iv) (di cui la seconda già parzialmente confermata da questo studio) formulate nei Paragrafi 2.5 e 3.1.2 e riguardanti la progettazione e la conduzione di un'esperienza di apprendimento in classe.

b) Il confronto fra i risultati della prima A con quelli delle prime L e M porta una prima conferma della nuova ipotesi ii), formulata alla fine dell'attività con la prima A, secondo cui i problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali che possono essere poi riscritti mediante linguaggio simbolico, se formulati con determinati criteri. Due di questi criteri sono:

   - porre quesiti che richiedano di ragionare su una figura qualsiasi della successione;
   - utilizzare successioni di figure in cui non sia sufficiente applicare un'unica formula (geometrica o aritmetica) nota o in cui la grandezza a cui applicare tale formula non sia esattamente il numero che rappresenta la posizione della figura nella successione.

L'attività con la terza, quindi con studenti che già conoscevano le basi del calcolo letterale quali le operazioni fra monomi e polinomi e le equazioni di primo grado, ha mostrato che i problemi proposti non hanno fatto insorgere la necessità di utilizzare questi strumenti per rispondere ai quesiti. Gli studenti hanno messo in gioco le loro conoscenze e competenze in ambito aritmetico evidentemente e anche ragionevolmente, visto che sono quelle che hanno utilizzato per la maggior parte della loro carriera scolastica fino a quel momento, più radicate e solide. Questi risultati sono stati ripresi per una seconda indagine con una classe terza (diversa da quella coinvolta nello studio pilota) in cui il problema posto è stato modificato con il fine di mettere in crisi le potenzialità delle loro conoscenze aritmetiche per favorire l'utilizzo degli strumenti algebrici a loro noti. I dettagli relativi ai testi dei problemi e all'intera attività sono riportati nel Paragrafo 4.3.

## 4.2 La sperimentazione con le prime della scuola secondaria di primo grado

Le osservazioni scaturite dall'analisi dei risultati del progetto pilota hanno in parte già confermato alcune delle ipotesi formulate in seguito allo studio della letteratura. In particolare hanno rinforzato la posizione assunta in questo lavoro secondo cui la mancata comprensione del senso delle espressioni algebriche non sia dovuta ad un ostacolo di origine ontologica ma piuttosto ad un ostacolo di origine didattica.

Sulla base di questa convinzione e dei risultati del progetto pilota è stato quindi progettato un breve percorso da attuare, durante il successivo anno scolastico, con studenti di cinque classi prime di un scuola secondaria di primo grado fra le quali una comprendeva cinque degli studenti della quinta primaria coinvolta nel progetto pilota.

Le ipotesi che si volevano verificare e sulla base delle quali è stato progettato il percorso, sono quelle anticipate all'inizio di questo capitolo, delle quali la ii) è stata ampliata secondo quanto scaturito in seguito al laboratorio con la prima A e già parzialmente confermata, così come l'ipotesi iv), dai risultati dell'intero studio pilota[14]. Le ipotesi vengono qui riportate per chiarezza:[15]

i) Costruire la scrittura in linguaggio simbolico di un'espressione algebrica a partire dalla formulazione a parole dell'algoritmo di calcolo aritmetico corrispondente favorisce la comprensione del significato dell'espressione;

ii) I problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali, che possono essere poi riscritti mediante il linguaggio simbolico, purché formulati seguendo alcuni criteri fra cui: porre quesiti che richiedano di ragionare su una figura qualsiasi della successione e utilizzare successioni di figure in cui non sia sufficiente applicare un'unica formula nota (geometrica o aritmetica) o in cui la grandezza a cui applicare tale formula non sia esattamente il numero che rappresenta la posizione della figura nella successione.

iii) Il passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico nella descrizione di un algoritmo può essere favorito dall'*esempio paradigmatico*, ovvero applicando l'algoritmo in un certo numero di casi particolari

[14] Si veda il paragrafo 4.1.6.

[15] Le ipotesi che vengono qui ripetute sono state argomentate e inquadrate nella letteratura analizzata nei Paragrafi 2.5, 3.1.2 e 3.1.3.

che, dando luogo ad espressioni numeriche aventi la stessa struttura, inducono la produzione di una espressione letterale avente la stessa struttura di quelle aritmetiche già scritte;

iv) La discussione collettiva in cui gli studenti cercano di descrivere ai compagni il procedimento seguito per risolvere un problema favorisce la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa;

v) La necessità di spiegare con chiarezza i passaggi necessari a risolvere un problema generale porta, attraverso discussioni collettive opportunamente guidate dall'insegnante, all'abbandono di alcune caratteristiche dei registri colloquiali verso la produzione di testi che utilizzano registri evoluti;

vi) La capacità di scrivere autonomamente l'espressione algebrica corrispondente ad un algoritmo di calcolo è legata alla capacità di descrivere con chiarezza mediante il linguaggio verbale l'algoritmo stesso e quindi alla padronanza dei registri evoluti.

Il paragrafo che segue descrive la progettazione dell'attività laboratoriale di apprendimento del percorso sperimentale con le prime.

### 4.2.1 L'attività in classe

L'attività sperimentale con tali classi è stata realizzata da febbraio a marzo 2015 nell'arco di un mese e mezzo nel secondo quadrimestre dell'anno scolastico. Durante questo periodo, per ciascuna classe sono stati realizzati quattro incontri che avevano come oggetto la risoluzione di tre problemi.

#### Le classi

Le classi coinvolte sono cinque e provengono tutte dalla scuola secondaria di primo grado "Vittorio Alfieri" di Cagliari. In totale hanno partecipato a questa attività 112 studenti.

Poiché questo studio è stato realizzato l'anno scolastico successivo a quello dello studio pilota, le classi non sono le stesse ma l'insegnante di una di queste, precisamente della prima D, è la stessa insegnante della prima L dello studio pilota.

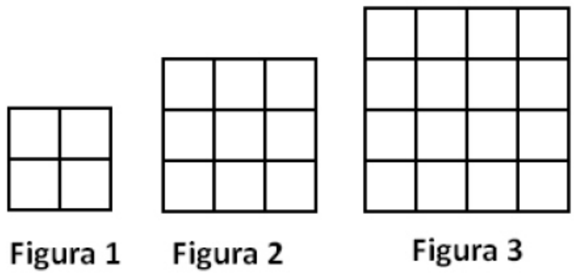
Ognuna delle classi coinvolte ha una diversa insegnante di matematica ma, nel momento in cui è iniziata l'attività, tutte le classi stavano trattando le potenze con i numeri naturali.

### I problemi

Due dei tre problemi utilizzati durante il percorso sono gli stessi, a parte l'inserimento di un quarto quesito, utilizzati con la prima M e con la prima L del progetto pilota. Il terzo problema era invece stato utilizzato per il lavoro di gruppo dell'attività con la terza. Il testo di questi problemi, soprattutto in relazione alle successioni numeriche che vengono generate, sarà comunque nuovamente analizzato in questo paragrafo per due motivi. Innanzitutto alcune caratteristiche non discusse precedentemente saranno prese in considerazione per definire i criteri di analisi dei dati. In secondo luogo perché alcuni aspetti dei tre problemi saranno messi a confronto.

Tabella 4.19: Testo del problema delle grigie quadrate

**Problema:** Le tre figure seguenti sono formate da quadretti tutti uguali e sono le prime tre figure di una successione




a) Marco dice: "La Figura 12 sarà formata da 144 quadretti!!". Sei d'accordo con Marco? Spiega perché.

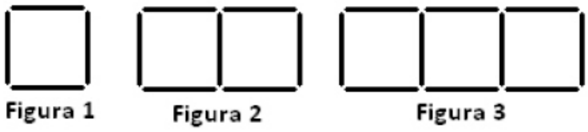
b) Marta afferma: "La Figura 25 sarà formata da 576 quadretti!!". Sei d'accordo con Marta? Spiega perché.

c) Claudio sostiene che sia possibile determinare il numero di quadretti di qualsiasi figura della successione. Sei d'accordo con Claudio? Spiega perché.

d) Luisa pensa che esista una figura della successione formata da 400 quadretti. Sei d'accordo con Luisa? Spiega perché.

Tabella 4.20: Testo del problema degli stuzzicadenti

**Problema:** Giocando con gli stuzzicadenti Mara, Stefano, Fabio e Claudia formano una successione di figure. Le prime tre figure della successione sono rappresentate qui sotto.




a) Mara dice: "La Figura 20 sarà formata da 62 stuzzicadenti!!". Siete d'accordo con Mara? Spiegate perché.

b) Stefano afferma: "La Figura 32 sarà formata da128 stuzzicadenti!!". Siete d'accordo con Stefano? Spiegate perché.

c) Fabio sostiene che sia possibile determinare il numero di quadretti di qualsiasi figura della successione. Siete d'accordo con Fabio? Spiegate perché.

d) Claudia pensa che nella successione ci sia una figura formata da 213 stuzzicadenti. Siete d'accordo con Claudia? Spiegate perché.

Nei primi due problemi - il "Problema delle griglie quadrate" (Tabella 4.19) e il "Problema degli stuzzicadenti" (Tabella 4.20) - la successione numerica è generata a partire da successioni di figure con la differenza che nello scenario descritto dal primo problema le figure sono disegni osservati dai protagonisti mentre nel secondo problema la successione è costruita dai protagonisti utilizzando degli stuzzicadenti. Anche il "Problema delle macchinine" è immerso in uno scenario reale ma non riguarda una successione di figure: il protagonista deve disporre una collezione di macchinine in un certo ordine (Tabella 4.21). Quest'ultimo problema è stato somministrato in tre diverse versioni: nella prima non era presente la figura corrispondente alla descrizione della situazione mentre nelle altre due la figura era stata costruita in due modi diversi riportati in Figura 4.8.

Lo scenario descritto in ciascun problema induce, nella produzione delle

Tabella 4.21: Testo del problema delle macchinine

**Problema:** Claudio ha una collezione di macchinine e vuole disporle su un grande tavolo nella sua stanza nel seguente modo: nella prima fila sistema 6 macchinine, nella seconda ne mette quattro in più rispetto alla prima, nella terza quattro in più rispetto alla seconda e così via ...

a) Quante macchinine dovrà mettere Claudio nella fila 35? Spiega come hai trovato la risposta.

b) Sapresti determinare il numero di macchinine per qualsiasi fila? Se si, spiega come. Se no, spiega perché.

c) In quale fila ci saranno 94 macchinine? E in quale fila 200? Spiega come hai trovato la risposta.

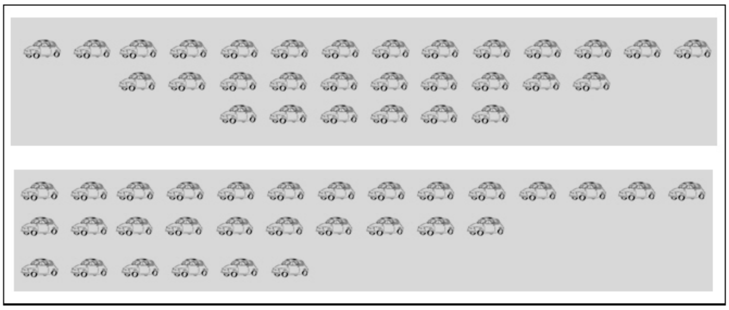


Figura 4.8: Le due diverse versioni dell'immagine del problema delle macchinine.

risposte ai quesiti, l'utilizzo dei termini concreti già presenti nel testo (stuzzicadenti, macchinine, ecc...). Poiché però le risposte riguardano comunque un discorso matematico, esse conterranno anche termini astratti. Per questo motivo, come anticipato nel paragrafo 3.2.4, la natura dei termini utilizzati non è stata presa in considerazione nell'analisi dei registri visto che l'utilizzo delle due tipologie di termini è dovuto allo scenario descritto in ciascun problema piuttosto che ad una predisposizione dello studente verso l'utilizzo di un registro o di un altro.

Nel secondo e nel terzo problema le successioni numeriche che vengono generate sono entrambe successioni aritmetiche, con ragioni diverse, che danno quindi luogo a funzioni lineari. Il primo problema genera invece la successione dei quadrati perfetti, che evidentemente non è una successione aritmetica, corrispondente ad una funzione non lineare.

In ciascun problema vengono posti tre tipi di quesiti. I quesiti del primo tipo richiedono la verifica che un determinato elemento della successione[16] sia composto da un certo numero di *oggetti*.[17] Per distinguerli dagli altri, nel seguito si farà riferimento a questo tipo di quesiti come *quesiti aritmetici* anche se la strategia aritmetica non è l'unica che può essere utilizzata per determinare la risposta. Precisamente le strategie attese erano tre: disegnare l'elemento della successione richiesto dal quesito - o tutti gli elementi della successione fino a quello richiesto - e contare gli oggetti di cui era composto; calcolare il numero degli oggetti di tutti gli elementi della successione applicando un algoritmo ricorsivo fino all'elemento da determinare; calcolare direttamente il numero degli oggetti che compongono l'elemento di interesse individuando una relazione fra la posizione dell'elemento nella successione e il numero di oggetti di cui è composto.[18]

Questi quesiti sono inseriti per primi in modo che gli studenti, cercando un modo per risolverli, capiscano come è stata costruita la successione e siano spinti a trovare un algoritmo che consenta loro di trovare la risposta. Nel problema delle griglie quadrate e in quello degli stuzzicadenti i quesiti di questo tipo sono due. Nel secondo di tali quesiti vengono utilizzati numeri più grandi con lo scopo di indurre gli studenti che utilizzerebbero la strategia del disegno o quella ricorsiva, ad individuare un metodo più conveniente o dal punto di vista del tempo necessario ad applicarla o della quantità di calcoli da svolgere. Nel problema delle macchinine si è voluto utilizzare uno solo di questi quesiti perché si voleva che gli studenti avessero più tempo per rispondere a quelli successivi.

Lo scopo del secondo tipo di quesito è quello di portare gli studenti alla formulazione dell'algoritmo generale che consente di determinare il numero di oggetti per un elemento qualsiasi della successione. Per questo motivo tali quesiti saranno indicati come *quesiti di generalizzazione*. Le tipologie di risposte attese erano tre: esibizione di un esempio; descrizione a parole del procedimento seguito per rispondere al/ai quesito/i aritmetici; descrizione dell'algoritmo seguito utilizzando il linguaggio simbolico, non necessaria-

[16]Gli elementi della successione sono figure nei problemi delle griglie quadrate e dei fiammiferi e file nel problema delle macchinine

[17]Gli oggetti sono quadratini, stuzzicadenti o macchinine a seconda del problema.

[18]I procedimenti specifici attesi per ciascun problema sono gli stessi già illustrati e giustificati nel Paragrafo 4.1 quindi non saranno nuovamente discussi.

mente canonico, quindi eventualmente una formula algebrica avente come variabile la posizione dell'elemento nella successione, quindi una formula del tipo $O = f(n)$ dove si è indicato con $O$ il numero di oggetti, ovvero il dato da determinare, e con $n$ la posizione dell'elemento nella successione.
Nei problemi delle griglie quadrate e degli stuzzicadenti il quesito di generalizzazione include due richieste: si chiede prima se lo studente sia d'accordo con l'affermazione fatta da un personaggio, dopodiché viene richiesto di motivare la risposta a questa prima parte. La prima richiesta induce una risposta in cui la componente interpersonale della funzione del testo prodotto è quella principale mentre la seconda parte richiede una risposta la cui funzione principale è quella ideazionale. Per questo motivo, come anticipato nel paragrafo 3.2.4, la funzione principale non è stata presa in considerazione nell'analisi dei registri dei testi prodotti per rispondere al quesito di generalizzazione.

L'ultimo quesito corrisponde a risolvere un'equazione di primo grado della forma $f(n) = o$ dove $o$ è noto essendo il dato fornito dal testo del problema mentre l'incognita $n$ è la posizione dell'elemento della successione. In riferimento a tali quesiti si parlerà quindi di *quesito inverso*.

Poiché gli studenti coinvolti non erano ancora stati introdotti al calcolo letterale, non ci si aspettava che rispondessero al quesito risolvendo un'equazione. Le strategie attese erano quindi tre: l'applicazione delle operazione inverse di quelle utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici; l'applicazione di una regola ricorsiva fino ad ottenere l'elemento della successione composto dal numero di oggetti richiesto dal quesito, procedere per tentativi applicando l'eventuale strategia diretta individuata per rispondere ai quesiti aritmetici fino a trovare l'elemento della successione che dà luogo al numero di oggetti richiesto. Lo scopo di questo quesito era quello di indagare le strategie applicate spontaneamente dagli studenti per risolvere problemi equivalenti ad equazioni di primo grado e per costruire l'algoritmo inverso ad uno già utilizzato.

### Descrizione del lavoro in classe

Per ogni classe, sono stati realizzati quattro incontri. I primi due incontri hanno avuto luogo nella stessa settimana. Il terzo incontro è stato programmato dopo circa due settimane dal secondo mentre il quarto dopo due settimane dal terzo. La Tabella 4.22 riporta la scansione e l'organizzazione degli incontri, illustrati più dettagliatamente nel seguito.

Tabella 4.22: Schema degli incontri realizzati per lo studio con le prime.

| | |
|---|---|
| Primo incontro | Introduzione del termine “successione”<br>Lavoro individuale di risoluzione del problema delle griglie quadrate<br>Discussione collettiva di condivisione delle risposte fornite per i quesiti aritmetici |
| Secondo incontro | Discussione collettiva sul problema delle griglie quadrate:<br>*fase a) Riassunto e confronto delle strategie per rispondere ai quesiti aritmetici*<br>*fase b) Formalizzazione a parole dell'algoritmo corrispondente alla strategia diretta*<br>*fase c) Applicazione dell'algoritmo per determinare il numero di quadretti per diverse figure della successione*<br>*fase d) Scrittura della formula algebrica corrispondente all'algoritmo*<br>Lavoro in coppia di risoluzione del problema degli stuzzicadenti |
| Terzo incontro | Discussione collettiva sul problema degli stuzzicadenti:<br>*fase a) Riassunto e confronto delle strategie per rispondere ai quesiti aritmetici*<br>*fase b) Formalizzazione a parole degli algoritmi corrispondenti alla strategie dirette*<br>*fase c) Applicazione degli algoritmi per determinare il numero di quadretti per diverse figure della successione*<br>*fase d) Scrittura delle formule algebriche corrispondenti agli algoritmi* |
| Quarto incontro | Lavoro individuale di risoluzione del problema delle macchinine |

A differenza di quanto accaduto nel progetto pilota, tutti gli incontri sono stati interamente gestiti dal ricercatore. L'insegnante della classe era comunque sempre presente in aula e aveva il ruolo di osservatore.

L'attività principale del primo incontro, durato due ore, ha riguardato la risoluzione individuale del "Problema delle griglie quadrate" (Tabella 4.19). Per tutti i problemi, il testo era riportato in una scheda distribuita agli studenti che non dovevano usare altri fogli in modo da poter tenere traccia di tutte le prove e i calcoli che precedevano la scrittura delle risposte.

La somministrazione del problema è stata preceduta da una discussione collettiva preliminare che aveva il fine di verificare la familiarità degli studenti con la parola "successione" presente nel testo del problema. La necessità di utilizzare la parola "successione" è dovuta alle risposte date da alcuni alunni delle sperimentazioni precedenti alla domanda "Secondo te, si può determinare il numero di quadretti di qualsiasi figura?". Alcuni hanno infatti interpretato "qualsiasi figura" non come qualsiasi figura della successione presentata nel testo del problema, ma come qualsiasi tipo di figura, non necessariamente un quadrato. A tal scopo sono state disegnate alla lavagna le prime figure relative alla successione dei numeri triangolari (Figura 4.9). Quindi è stato chiesto agli studenti, che intervenivano volontariamente, di provare a descrivere le figure successive. L'obiettivo era di assicurarsi che fosse chiaro a tutti che se le figure costituiscono una successione, devono essere costruite utilizzando la stessa regola. Si è avuto cura di non pronunciare la parola "regola" in quanto durante il progetto pilota, è emerso che molti studenti utilizzavano la parola "regola" in riferimento alla descrizione generale degli algoritmi utilizzati (sia che la descrizione avvenisse a parole sia che utilizzassero una formula); si è quindi evitato l'uso di tale termine per non indurre alla generalizzazione o alla ricerca di una formula. Questa prima parte ha occupato circa 10 minuti per ciascuna classe.

Per la risoluzione del problema, invece, il tempo necessario ad ogni classe è variato dai 45 agli 80 minuti a seconda della classe.

Al lavoro individuale di risoluzione del problema è seguita una discussione collettiva sui primi due quesiti con lo scopo di giungere ad una risposta condivisa per prime due domande. Gli studenti sono stati invitati a condividere le proprie risposte con la classe e a giustificarle.

La discussione dei quesiti del problema delle griglie quadrate è proseguita nel secondo incontro. Tale discussione ha riguardato principalmente la costruzione di una risposta condivisa al quesito di generalizzazione alla quale

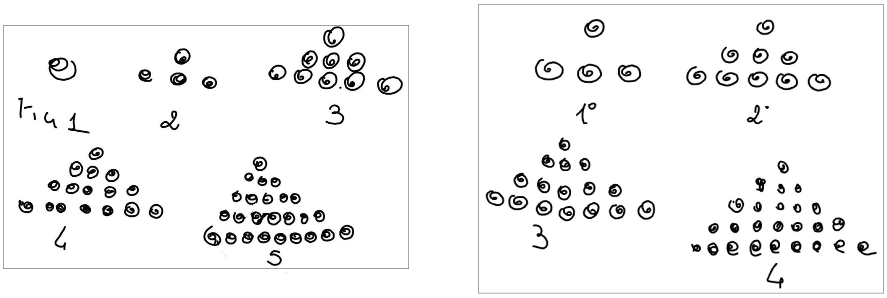



Figura 4.9: Due esempi delle figure realizzate alla lavagna prima della somministrazione dei problemi come esempio di successione di figure.

si è arrivati procedendo attraverso diverse fasi progettate in precedenza sulla base delle risposte scritte negli elaborati.

Le fasi principali erano comunque comuni in tutte le classi: a) riassunto e confronto delle diverse strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici; b) formalizzazione a parole dell'algoritmo corrispondente alla strategia diretta; c) applicazione dell'algoritmo per determinare il numero di quadretti per diverse figure della successione; d) scrittura della formula algebrica corrispondente all'algoritmo utilizzato.

a) *Riassunto e confronto delle diverse strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici.* Questa fase veniva introdotta con il pretesto di spiegare a chi era stato assente di cosa parlava il problema affrontato la volta precedente. Gli studenti descrivevano la situazione presentata nel problema e spiegavano quale fosse la richiesta del primo quesito. La descrizione era accompagnata dalla proiezione sulla LIM dell'immagine raffigurata nel testo del problema e del primo quesito. Seguiva quindi l'elencazione e la spiegazione per gli assenti delle diverse strategie corrette, individuate durante la discussione dell'incontro precedente, utilizzate per rispondere al quesito.

   In Figura 4.10 sono riportate le immagini degli schemi, compilati alla lavagna dal ricercatore, risultato di questa fase di elencazione. Le foto sono relative rispettivamente ai laboratori con la prima A e la prima D.

   Poiché lo scopo finale dell'intera discussione era quello di scrivere una formula algebrica che descrivesse l'algoritmo relativo alla strategia diretta, dopo aver riassunto le diverse strategie si proponeva, se non avveniva spontaneamente, un confronto fra esse con il fine di far osservare che quelle dirette erano le più convenienti dal punto di vista del tempo utilizzato e della quantità di calcoli effettuati. Osservazioni

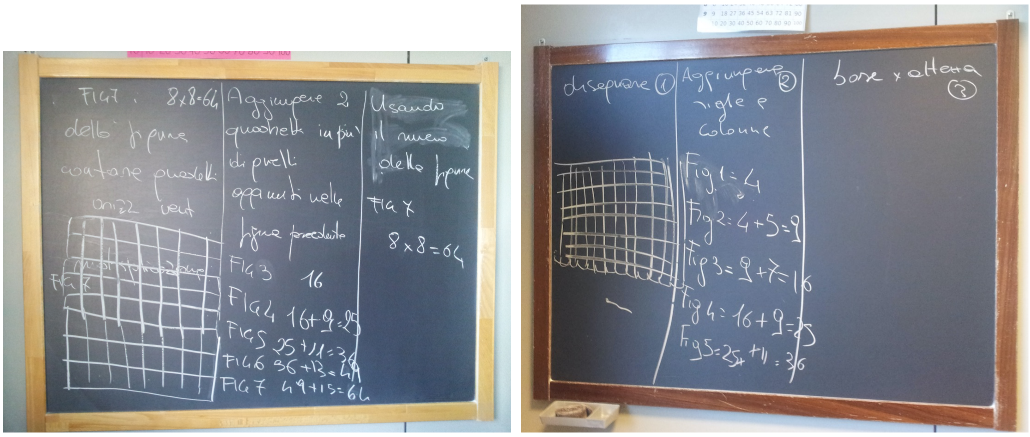



Figura 4.10: Fase a) della discussione sul problema delle griglie quadrate: Riassunto e confronto delle diverse strategie utilizzate per rispondere ai quesiti numerici.

relative alla discussione sul confronto delle strategie sono riportate nel primo sottoparagrafo del Paragrafo 4.2.2 in cui si discute l'evoluzione delle strategie utilizzate nel corso dell'intera attività sperimentale.

b) *Formalizzazione a parole dell'algoritmo corrispondente alla strategia diretta.* Dopo la prima fase di discussione delle diverse strategie tutti gli studenti erano d'accordo sul fatto che fosse possibile determinare il numero di quadretti di qualsiasi figura della successione - gli eventuali studenti che non ne erano sicuri venivano presto convinti dagli altri che il metodo diretto individuato consentiva di rispondere positivamente alla domanda. A questo punto si focalizzava l'attenzione sul *come si fa?* Dopo l'intervento di alcuni studenti si mostravano, utilizzando una slide, alcune delle risposte scritte negli elaborati. Le risposte scelte erano sbagliate (nel senso che descrivevano un algoritmo sbagliato) o incomplete (nel senso che erano un tentativo di descrivere l'algoritmo giusto ma mancavano di alcune parti o di riferimenti precisi all'oggetto a cui occorreva applicare l'algoritmo descritto) oppure fornivano un esempio anziché una spiegazione generale.

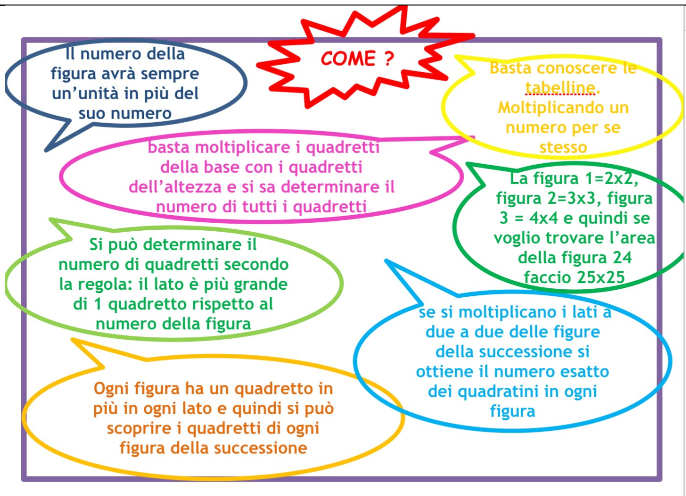
   Lo scopo era l'individuazione dei difetti delle spiegazioni fornite. In alcune classi gli studenti provavano a scrivere sul quaderno una possibile risposta completa. Le nuove risposte venivano lette a voce alta e commentate insieme ad altre risposte più complete estrapolate dagli elaborati e proiettate sulla LIM. Questa fase si concludeva con la realizzazione di una nuova slide con una descrizione condivisa dell'algoritmo corretto. La Tabella 4.23 riporta come esempio l'estratto della discussione avvenuta nella prima A relativo alla fase b). Le trascrizione delle altre classi per questa fase sono riportate nell'Allegato A.1.

Tabella 4.23: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima A durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Nella domanda c) c'era Claudio che sosteneva di essere in grado di determinare il numero di una qualsiasi figura di questa successione... cioè lui diceva, se voi mi chiedete una figura qualsiasi io vi riesco a dire quanti quadretti ci sono. Adesso, io non ricordo cosa avete scritto nei fogli, però adesso dopo che abbiamo fatto tutto questo discorso, secondo voi Claudio ha ragione o no? |
| | Tutti | Ha ragione! |
| | Ricercatore | Chi è che mi vuole dire come si fa? Daniela tu cosa avevi scritto nel foglio? |
| | Daniela | Io avevo scritto che io l'avrei fatto disegnando ma se la figura era troppo alta non ci sarei riuscita però adesso ho capito.. basta prendere quella figura, aggiungerne uno e fare |
| | Ricercatore | Aggiungere uno a cosa? |
| | Daniela | Aggiungere un quadretto... al nome della figura e poi moltiplicare |
| | Ricercatore | ok quindi mi sa che abbiamo risposto anche alla domanda che ho scritto prima ... come si può fare? Vi faccio vedere quello che hanno scritto alcuni di voi |
| | | *Viene proiettata la slide in figura* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.23: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | |   |
| | Ricercatore | Facciamo così, due minuti per leggerle e poi se avete qualcosa da dire su qualcuna di quelle la diciamo. |
| | Federico | Sono praticamente uguali secondo me quella viola, quella verde scura e quella celeste... il risultato è sempre aggiunge sempre uno ai quadretti però nella viola ... |
| | Ricercatore | Però qui [*indicando il fumetto viola*] c'è scritto aggiunge sempre uno ai quadretti? |
| | Federico | No... stavo per dire quello... che secondo me la viola non è tantissimo esatta perché non dice che deve aggiungere uno al numero della figura perché dicendo così vuol dire che la figura 3...quanti lati aveva? Sarebbe 3 per 3 e dovrebbe dare il risultato di tutti i quadretti invece se aggiungi uno... |
| | Ricercatore | Qualcuno è d'accordo con quello che dice Federico? |
| | Studente 1 | Secondo me questa è sbagliata perché devi avere almeno il numero della base o dell'altezza per trovare... |
| | Studente 2 | Secondo me non è giusta perché è troppo generico... |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.23: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 3 | Secondo me quella gialla in alto è troppo generica perché dice basta conoscere le tabelline perché moltiplicando un numero per se stesso ma così non puoi trovare per esempio la figura sette? moltiplicando un numero ma quale? |
| | Ricercatore | Quale numero? Non mi dice quale tabellina devo usare |
| | Studente 3 | Si può usare secondo me quanto tu hai già la figura pronta e devi calcolare l'area.. ma se tu devi scoprire quali sono i dati della figura quella la non va bene perché dà per scontato che tu hai già tutti i dati |
| | Ricercatore | Quindi è incompleta? |
| | | *Rispondono "Sì" parlando tutti insieme* |
| | Ricercatore | Ce ne sono altre incomplete? |
| | | *Rispondono "Sì" parlando tutti insieme* |
| | Studente 4 | Anche secondo me la gialla è incompleta perché non dice di aggiungere uno prima di moltiplicare |
| | Ricercatore | Non dice di aggiungere uno alla figura, giusto? Ce ne sono altre incomplete? |
| | Studente 5 | Secondo me quella celeste è incompleta perché non dice se si aggiunge o no il quadretto |
| | Ricercatore | Manca sempre la stessa cosa, giusto? |
| | Federico | Secondo me quelle complete potrebbero essere quella verde scura un pochino perché un po' lo spiega e... e basta... e forse... Si anche la verde chiara |
| | Ricercatore | *Propone di analizzare la verde chiara e la legge a voce alta* |
| | Ricercatore | C'è scritto tutto qui? |
| | Federico | No manca... manca la moltipicazione |
| | Ricercatore | Manca la moltiplicazione... dopo che so il lato cosa devo fare? |
| | Federico | Anche nella figura giallo scura... |
| | Ricercatore | Chiara tu cosa pensi di questa giallo scura? |
| | Chiara | Ehm... che poi bisogna moltiplicare il numero dei quadretti |
| | Ricercatore | bisogna dire che poi bisogna moltiplicare |

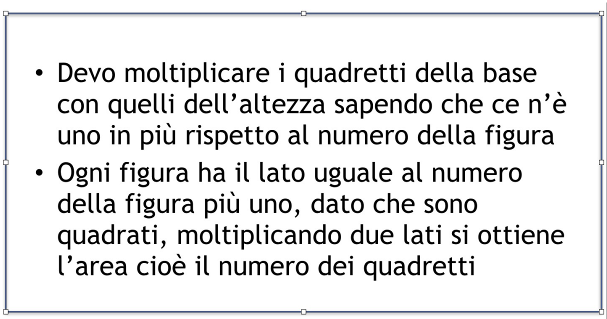
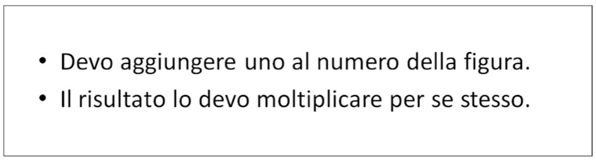
*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.23: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Tommaso | Allora la verde scura è la più giusta perché tutte un po' ti spiegano però non ti dicono i numeri... cosa devi moltiplicare invece la verde scura dice [*la legge*] questa ti dice i numeri precisi precisi quindi sai cosa devi fare |
| | Ricercatore | Vi posso fare una domanda? Secondo voi che differenza c'è... io vedo una differenza fra tutte... a parte completa e incompleta, però fra tutte queste e quella verde scura... |
| | Studente 6 | La verde scura c'è anche l'operazione da fare... c'è la moltiplicazione... |
| | Viola | Ha fatto un esempio |
| | Ricercatore | Viola ha detto una parola che non avevamo ancora detto... Viola dice c'è l'esempio. È vero che in questa verde ce lo spiegano con l'esempio invece in tutte le altre cercano di spiegarlo senza l'esempio? Allora è vero che da qui si capisce tutto ma secondo voi ci riusciamo a scriverne una senza l'esempio però che è completa e si capisce tutto? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |
| | | *Viene proiettata una slide bianca su cui scrivere* |
| | Ricercatore | Chi vi vuole provare? Laura? |
| | Laura | Sapendo che il numero dei quadretti è uno in più rispetto al numero della figura... |
| | Ricercatore | Ok quindi cosa devo fare sapendo questa cosa? |
| | Laura | Dobbiamo moltiplicare... i quadretti... della base... con quelli dell'altezza... sapendo che ce n'è uno più rispetto al numero della figura. |
| | | *Il ricercatore scrive nella slide mentre Laura parla* |
| | Ricercatore | Ok, ci piace scritta così? Qualcuno ha qualche altra proposta? |
| | Daniela | Secondo me dicendo così dà per scontato che nella figura tre ci sono quattro di base e quattro di altezza. |
| | Ricercatore | Ok tu come la scriveresti? |
| | Daniela | Io scriverei la prima parte di quella verde scuro... |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.23: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *Gli altri obiettano, parlando tutti insieme, che in quella verde ci fosse l'esempio che invece non si voleva utilzzare* |
| | Daniela | E allora ogni figura ha il lato uguale al numero della figura più uno e dato che sono quadrati moltiplicando due lati si ottiene l'area cioè il numero dei quadretti |
| | | *La figura sottostante mostra la slide con le due proposte*   |
| | Federico | [*Provando ad applicare l'algoritmo descritto alla figura 16*] Però nella prima spiegazione per svolgerla te la devi leggere tutta... non devi fare passo passo. Invece nella seconda puoi seguirla man mano che la leggi |
| | Ricercatore | Perché è scritta in ordine... quindi cosa devo fare? Se devo scrivere cosa devo fare... |
| | | *La figura sottostante mostra la slide con la descrizione dell'algoritmo proposta da Federico*   |

c) *Applicazione dell'algoritmo per determinare il numero di quadretti per diverse figure della successione.* Iniziando a volte dalla richiesta del secondo quesito, l'algoritmo condiviso scritto nella nuova slide veniva applicato a diverse figure della successione proposte anche dagli studenti. Lo scopo di questa fase era duplice. Da una parte si voleva essere sicuri che tutti, anche gli studenti che avevano scarsamente partecipato alla discussione così come quelli segnalati come deboli dall'insegnante, avessero chiaro come l'algoritmo funzionasse. Dall'altra si voleva costruire alla lavagna uno schema che creasse le condizioni per attivare il meccanismo dell'*Esempio paradigmatico* illustrato da Linchevski (1995).[19] I calcoli dettati dagli studenti venivano scritti alla lavagna, in ordine. Le due operazioni necessarie venivano svolte separatamente in successione. La proposta successiva di riscrivere i calcoli in un modo "più breve" portava all'impostazione, per tutte le figure considerate, di un'espressione. La Figura 4.11 mostra ciò che è stato scritto alla lavagna durante questa fase rispettivamente nella prima A e nella prima E.

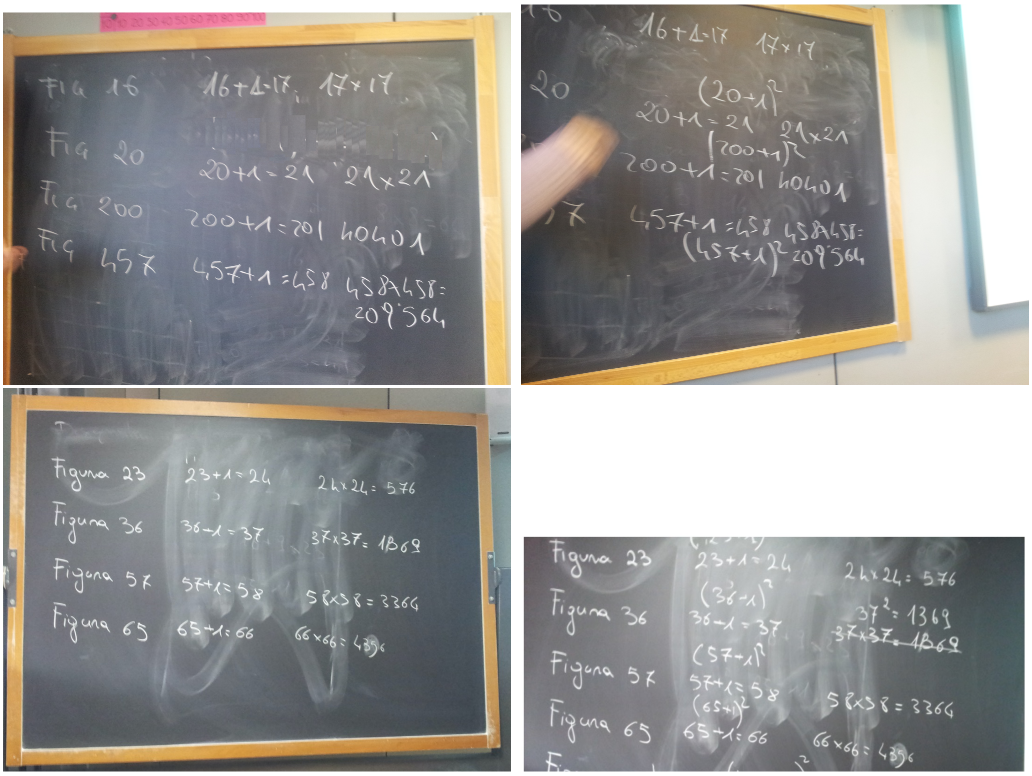


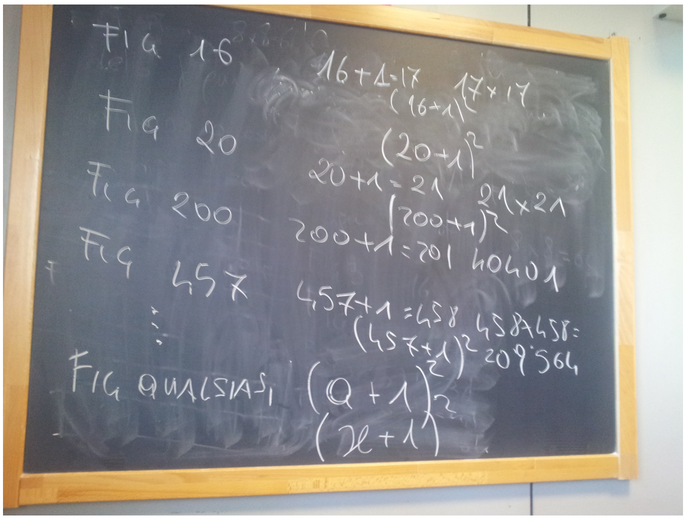

Figura 4.11: Fase c) Applicazione dell'algoritmo per diverse figure e scrittura delle espressioni aritmetiche.

d) *Scrittura della formula algebrica corrispondente all'algoritmo utilizzato.* Quando alla lavagna erano presenti diverse espressioni per diverse figure veniva chiesto come si poteva quindi rispondere al quesito che chiedeva come calcolare il numero di quadretti di una figura qualsiasi. Questa domanda portava alla scrittura di una formula algebrica

[19] Si veda pagina 43.

del tutto analoga alle espressioni già scritte in cui i numeri delle figure venivano sostituiti con lettere. Nella Tabella 4.24, è riportato come esempio l'estratto relativo a questa fase della discussione avvenuta nella prima A. Gli estratti per le altre classi sono riportati nell'Allegato A.2

Tabella 4.24: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima A durante la fase d).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Quindi Claudio ci chiedeva una figura qualsiasi giusto? Quindi se devo fare il calcolo di una figura qualsiasi cosa scrivo secondo voi? [*Scrive "Fig. qulasiasi" sotto i nomi delle altre figure a cui è stato applicato l'algoritmo*] |
| | Studente 1 | Cioè non ho capito? La regola? |
| | Daniela | Scrivo tra parentesi $q$ per indicare qualsiasi |
| | Alcuni | [*Sovrapponendosi*] $x$/ oppure $x$ |
| | Daniela | più uno chiusa parentesi... alla seconda |
| | | *I suggerimenti di usare la x si fanno più insistenti* |
| | Studente 2 | $x$ per l'incognita |
| | Ricercatore | *Propone di scriverlo in entrambi i modi* |
| | | *L'immagine sottostante mostra ciò che era scritto alla lavagna alla fine di questa fase*   |
| | Ricercatore | Daniela tu la $q$... per che cosa l'avevamo scelta? |
| | Daniela | Per qualsiasi |
| | Ricercatore | Per qualsiasi... e la $x$? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.24: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Federico | Perché indica un numero incognito che non si conosce |
| | Ricercatore | Indica un numero incognito. Li avete mai usati a scuola? |
| | Studente 3 | La professoressa ci ha detto per il "per" di usare il puntino e non la $x$ |
| | Ricercatore | Vi ha detto che la $x$ si usa per le incognite? |
| | Alcuni | *Rispondono di sì* |

Nella seconda parte di questo secondo incontro, gli studenti hanno risolto, lavorando a coppie, il problema degli stuzzicadenti (Tabella 4.20). La durata variabile della discussione ha avuto come conseguenza una differenza nel tempo che gli studenti di ciascuna classe avevano a disposizione per risolvere il problema: il lavoro in coppia ha occupato infatti dai 20 ai 40 minuti a seconda della classe.

Il terzo incontro, della durata di un'ora, è servito per discutere il problema degli stuzzicadenti. La discussione ha toccato gli stessi punti e aveva gli stessi obiettivi di quella riguardante il problema delle griglie quadrate con l'unica differenza che, poiché le strategie dirette che consentivano di rispondere ai quesiti erano più di una, sono stati scritti gli algoritmi e le formule relativi a tutte le strategie che erano state individuate.

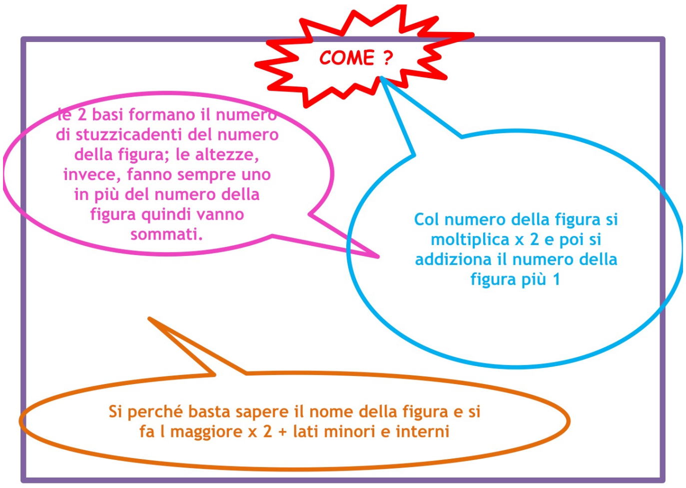
Le immagini in Figura 4.12 mostrano gli schemi costruiti alla lavagna dal ricercatore durante la fase a) di elencazione e confronto delle diverse strategie per il problema degli stuzzicadenti, nella prima A e nella prima E. In queste immagini si vede che, per il problema degli stuzzicadenti, in alcune classi l'espressione veniva scritta già durante la fase a) del confronto dei vari procedimenti.

In Tabella 4.25 è riportato un'estratto relativo alla fase b) della prima D, in cui, partendo dalle risposte scritte negli elaborati, si arriva a costruire una slide che contiene le descrizioni elaborate durante la discussione di tutte le strategie dirette e della strategia ricorsiva proposte durante la fase a). Le trascrizioni per le altre classi sono riportate nell'Allegato B.1

Tabella 4.25: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima D durante la fase b).

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.25: continua dalla pagina precedente*

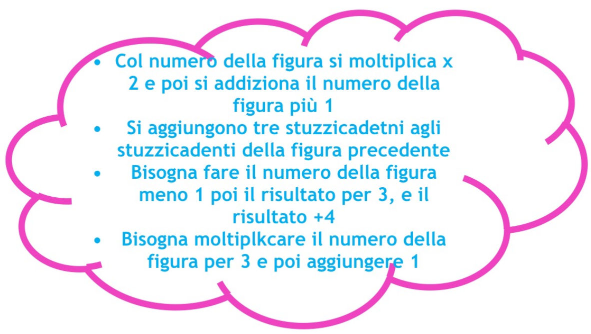
| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ok allora facciamo così... li scriviam... rispondiamo a Fabio... Vediamo queste e vediamo se ci piacciono poi ce ne scriviamo una nostra nuova |
| | | *Viene proiettata la slide mostrata nella figura sottostante*   |
| | | *Gli studenti riconosco che tutti i fumetti descrivono il procedimento proposto durante la fase a) da una compagna, Gaia*[20] |
| | Ricercatore | Facciamo così, prendete un quaderno, un foglio... vogliamo provare a scrivere una frase che descriva i metodi? Per esempio questa secondo me [*indica il fumetto blu*] per il metodo di Gaia va bene |
| | Studente 1 | È perfetta! |
| | | *La frase del fumetto blu viene riportata nella slide vuota* |
| | Studente 2 | Per il metodo di Serena che è quello che ho usato anch'io scriverei: si aggiungono tre stuzzicadenti alla figura precedente |
| | | *Il ricercatore scrive la proposta nella slide.* |
| | Ricercatore | Chi vuole provare a descrivere un altro metodo? |
| | Studente 3 | Quello che ha usato Gabriele |

*continua nella pagina seguente*

[20] I procedimenti proposti nella fase a) a cui gli studenti fanno riferimento sono: *Gaia*: $s(n) = 2n+(n+1)$; *Serena*: ricorsivo aritmetico con ragione 3; *Gabriele*: $s(n) = 3(n-1)+4$; *Gaia 2*: $s(n) = 3n + 1$.

*Tabella 4.25: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Quello che ha usato Gabriele... come lo descriveresti? Cosa bisogna fare per quello di Gabriele? |
| | Studente 3 | Che bisogna fare il numero della figura meno uno, poi per tre |
| | Ricercatore | Scriviamo il risultato per tre? |
| | Studente 3 | Sì il risultato per tre, e il risultato eeh... più quattro |
| | Ricercatore | Poi qualcun altro? Quale ci manca da scrivere? |
| | Studente 1 | Gaia due |
| | Ricercatore | Gaia due... Chi vi vuole provare? |
| | Studente 4 | Allora... bisogna moltiplicare... il numero de... allora... il numero della figura per tre e poi aggiungere 1<br>*La frase viene scritta nella slide* |
| | | *La slide costruita durante questa fase è mostrata nella figura sottostante* |




Infine in Tabella 4.26 è riportato un estratto della fase d) della discussione con la classe prima D durante la quale vengono scritte le espressioni algebriche corrispondenti alle diverse strategie dirette proposte durante la fase a) per il problema degli stuzzicadenti. La prima espressione viene prodotta dopo che l'algoritmo è stato applicato ad alcune figure sfruttando, anche in questo caso, l'esempio paradigmatico. Per le successive però questo passaggio non è necessario infatti le espressioni algebriche vengono prodotte a partire direttamente dalla descrizione a parole degli algoritmi riportata nella slide costruita nella fase precedente.

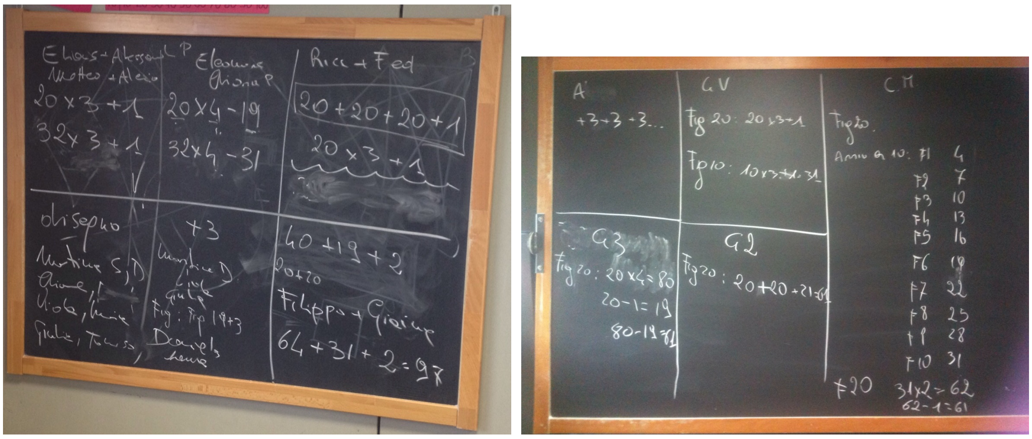



Figura 4.12: Fase a) della discussione sul problema degli stuzzicadenti: Riassunto e confronto delle diverse strategie utilizzate per rispondere ai quesiti numerici.

Tabella 4.26: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima D durante la fase d).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Anna... e quindi per una figura qualsiasi [*Scrive "Fig qualsiasi sotto le figure a cui è stato applicato uno degli algoritmi:* $s(n) = 3(n-1)+4$*"*] cosa devo fare? |
| | Anna | Il numero della figura qualsiasi meno uno per tre più 4 |
| | Ricercatore | E come lo posso scrivere? |
| | Studente 1 | [*Sovrapponendosi ad Anna*] $x$ meno 1 |
| | Anna | $x$ meno 1 per 3 più 4 |
| | Ricercatore | [*Dopo aver scritto la proposta di Anna*] È vero che questa cosa vuol dire quello che abbiamo detto prima? |
| | Alcuni | *Rispondono affermativamente* |
| | Ricercatore | E che cosa è $x$ Jessica? |
| | Jessica | *Non risponde* |
| | Studente 1 | Non ho capito la domanda |
| | Ricercatore | La domanda è se io a Fabio gli dico: guarda per calcolare la figura qualsiasi devi fare questo... [*indica la formula scritta alla lavagna*] e lui mi dice: ma che cosa è questo $x$? Cosa dici? |
| | Jessica | È un numero qualsiasi |

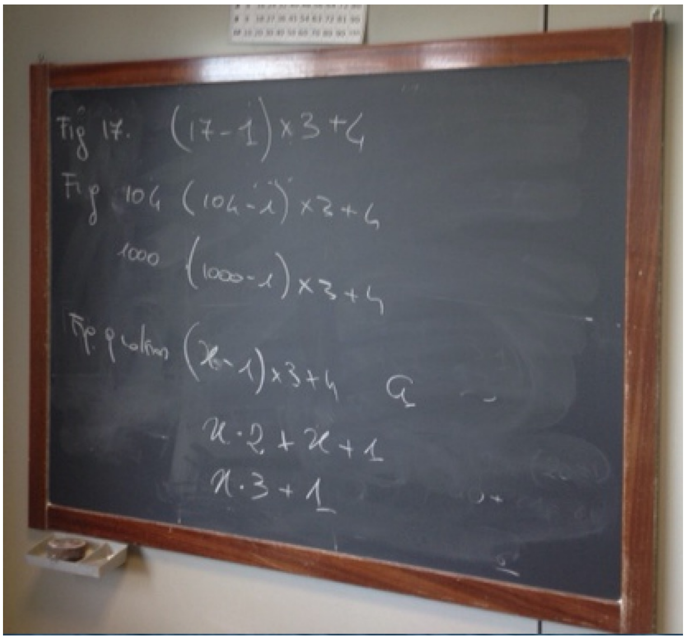
*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.26: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | È un numero qualsiasi... un numero qualsiasi in che senso? È il numero... |
| | Studente 3 | È il numero della figura |
| | Ricercatore | È il numero della figura che voglio calcolare? Giusto? |
| | Alcuni | *Rispondono affermativamente* |
| | Ricercatore | Ci riusciamo a scrivere questo per tutti i metodi? |
| | Alcuni | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | Allora questo era il metodo di Gabriele, giusto? [*Scrive "G" accanto alla formula*] |
| | Ricercatore | Poi? quali altri metodi abbiamo? Iniziamo dal primo? [*Si riferisce agli algoritmi scritti nella slide creata durante la fase b)*] |
| | Nicola | Faccio... $x$ per 2 più $x$... no allora per... no più... |
| | Ricercatore | Leggi qua... si moltiplica il numero della figura per due e poi si addiziona... |
| | Nicola | E poi si addiziona per uno |
| | Ricercatore | Leggi qui... cosa si addiziona? |
| | Nicola | Allora devo fare $x$ per 2 più $x$ più 1 |
| | [...] | |
| | Ricercatore | allora alzi la mano chi vuole provare a scrivere questa cosa [*indica le formule giù scritte*] per l'ultimo? |
| | Ricercatore | ok, Tommaso, vuoi provare tu a scrivere? A scrivere così? Dettami che cosa scrivere |
| | Tommaso | Una figura qualsiasi? |
| | Studente 4 | No! |
| | Studente 5 | $x$! |
| | Ricercatore | Vogliamo scriverlo per una figura <u>qualsiasi</u>... senza usare un esempio |
| | Alessandro | Ah ho capito! |
| | Ricercatore | Hai capito Alessandro? Ci vuoi provare? Dai... |
| | Alessandro | $x$ per 3 più 1 |
| | | *La figura sottostante mostra la lavagna alla fine della discussione* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.26: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | |  |



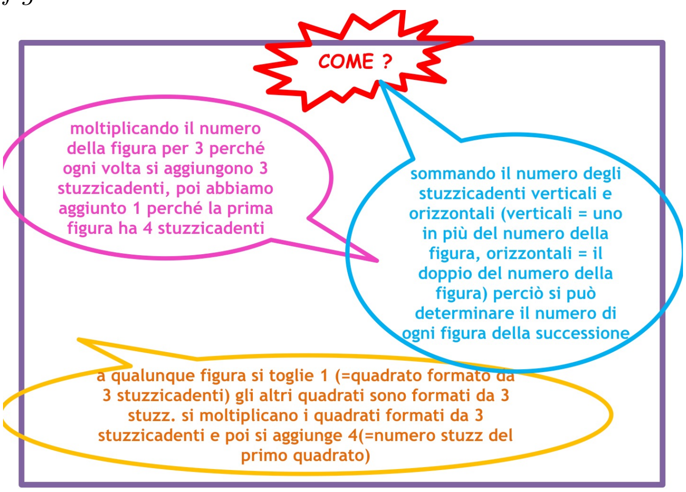
In alcune classi, le espressioni algebriche corrispondenti alle diverse strategie dirette individuate per il problema degli stuzzicadenti sono state proposte già durante la fase b) in cui si voleva arrivare a scrivere una risposta condivisa per il quesito di generalizzazione. In Tabella 4.27 è riportato uno di questi casi, estratto della discussione nella prima G.

Tabella 4.27: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima G durante la fase b) in cui, già cercando una risposta condivisa al quesito di generalizzazione, vengono proposte delle formule algebriche.

| | | |
|---|---|---|
| | | *Viene proiettato il quesito di generalizzazione alla lavagna* |
| | Ricercatore | Matteo, secondo te Fabio ha ragione? |
| | Matteo | Sì |
| | Ricercatore | E come si fa? |
| | Matteo | Basta usare uno di quei metodi e ripeterlo semplicemente cambiando il numero 20 o 32 con il numero che si vuole |
| | Ricercatore | Ok, siete tutti d'accordo che si può fare per tutte le figure? |
| | Tutti | *Rispondono affermativamente parlando insieme* |
| | Augusto | [*Coperto dalle altre voci*] Numero più 3 meno 1 |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.27: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | *Chiede ad Augusto di ripetere ciò che ha detto* |
| | Augusto | La regola però sarebbe: numero per 3 più 1 |
| | Ricercatore | Dettamela |
| | Augusto | Numero |
| | Ricercatore | Scrivo numero? |
| | Augusto e altri | $n$ |
| | Augusto | $n$ per 3 più 1 |
| | Studente 1 | Ma è meglio $f$ di figura |
| | Alcuni | *Obiettano che è la stessa cosa* |
| | [...] | |
| | Ricercatore | Ok quindi abbiamo trovato un modo di dire a Fabio come si deve fare usando questo metodo. C'è qualcuno che vuole trovare un modo di dire a Fabio, di spiegare a Fabio questo metodo? [*Indica una delle strategie dirette scritte alla lavagna durante la fase a)*] |
| | | *Nessuno si fa avanti* |
| | Ricercatore | Allora come facciamo? vi faccio vedere cosa avete scritto voi per rispondere alla domanda di Fabio |
| | | *Viene proiettata la diapositiva mostrata nella figura sottostante*  |
| | | *Riconoscono subito che il fumetto blu corrisponde alla strategia proposta da un compagno* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.27: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora se voi lo volete dire a Fabio che passa in corridoio, glielo direste così oppure potete semplificarlo, scriverlo in un altro modo... c'è qualcuno che vuole provare a descriverlo in un altro modo? |
| | | *Nessuno si fa avanti* |
| | Matteo | Ma cosa vuol dire $n$ per 3 più uno? |
| | Ricercatore | *Chiede se qualcuno vuole spiegare a Matteo cosa vuol dire n per 3 più 1* |
| | Molti | Numero della figura! |
| | Davide | Il numero della figura! |
| | Ricercatore | chi è il numero della figura? |
| | Studente 1 | $n$ |
| | Ricercatore | $n$, giusto? Quindi Matteo, Davide dice $n$ è il numero della figura quindi come gliela dovresti spiegare a parole, questa?[*Indica la formula proposta da Augusto*] |
| | Davide | Che il numero della figura... |
| | Augusto | Si moltiplica per 3 |
| | Davide | Si moltiplica per 3 |
| | Ricercatore | E poi? |
| | Davide | Più... più uno |
| | Ricercatore | E poi si aggiunge uno.. ok Matteo? Praticamente è un modo ristretto, riassunto, di dire tutto quello che Davide a detto a parole, ok? |
| | Ricercatore | *Chiede se qualcuno vuole provare a descriverne un altra* |
| | Alcuni | *Dicono di voler spiegare la strategia proposta dal compagno Alberto* |
| | Studente 2 | Io ho scritto 20 si sottrae a 1 e si moltiplica per 3 e si addiziona per 4. |
| | Ricercatore | Ok però hai usato venti, per spiegare la figura venti. |
| | Davide | Allora , al numero della figura si sottrae 1 e poi si moltiplica per 3 e infine si... la somma... si somma a 4<br>*Il ricercatore scrive sulla slide ciò che dice Davide* |
| | Davide | E poi ho messo la formula |
| | Ricercatore | Ah ok |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.27: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Davide | Aperta parentesi, enne punto effe punto gi meno uno chiusa parentesi per tre più quattro. |
| | Ricercatore | Ok quali metodi ci mancano da descrivere? |
| | Augusto | *Dice di aver descritto la strategia proposta dal compagno Stefano:* $s(n) = 4n - (n - 1)$ |
| | Augusto | Numero figura per 4 meno numero figura p |
| | Ricercatore | [*Interrompendolo*] Come l'hai scritto? |
| | Augusto | $nf$ per quattro... Chiusa pa ah quello fra parentesi... meno aperta parentesi $nf$ meno uno chiusa parentesi |
| | Ricercatore | Ok, allora va bene secondo voi? |
| | Alcuni | *Rispondono affermativamente* |
| | Ricercatore | Veronica se lo dovessimo dire a parole questo... abbiamo scritto solo la formula... e a parole come sarebbe? |
| | Veronica | il numero della figura? Allora bisogna moltiplicare il numero della figura per quattro e poi il risultato dobbiamo sottrarlo a 1 |
| | Studente 3 | Nooo!! Dobbiamo sottrargli uno |
| | Ricercatore | Al risultato cosa dobbiamo togliere? Questo pezzo [*indica la seconda parte della formula scritta nella slide*] |
| | Studente 4 | Uno |
| | Ricercatore | Ma non c'è scritto uno, cosa c'è scritto? |
| | Veronica | Numero della figura meno uno |
| | Ricercatore | Ok, quindi... allora bisogna moltiplicare il numero della figura per 4, e al risultato bisogna togliere... |
| | Alcuni | uno |
| | Altri | [*Correggono*] il numero della figura meno uno |
| | | *Il ricercatore finisce di scrivere la frase nella slide* |
| | Ricercatore | *Propone di spiegare l'ultima fra le strategie dirette proposte nella fase a) da Giole:* $s(n) = (n + 1) + (2n)$ |
| | Alessandro | Bisogna aggiungere 1... al numero degli stuzzicadenti orizzontali |
| | Ricercatore | Ok, al numero degli stuzzicadenti orizzontali... e quanti sono? |
| | Augusto | Sempre devi avere la figura davanti |

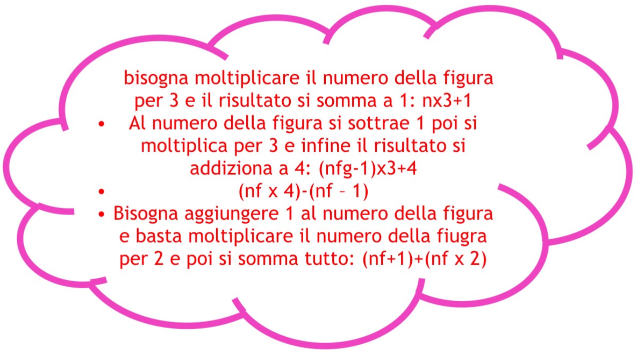
*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.27: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Eh... Però vogliamo dirgli come fare senza avere la figura davanti... se voi non avete la figura davanti, come fate a sapere quanti sono gli stuzzicadenti orizzontali? |
| | Studente 5 | Contandoli |
| | Federica | Ma se non ce l?hai davanti |
| | Augusto | Numero figura più due |
| | Ricercatore | Quanti sono gli stuzzicadenti orizzontali? |
| | Federica | Ma se non ha la figura per quello non può farlo perché anche se gli spieghi che devi aggiungerne uno lui ti chiede come fai a saperlo |
| | Ricercatore | Ok... tu riesci ad usare il metodo di Gioele senza disegnare la figura? |
| | Federica | No |
| | Augusto | Io sì |
| | Ricercatore | Augusto perché tu sì? Come fai? |
| | Augusto | Con la regola generale |
| | Ricercatore | E qual è la regola generale? |
| | Augusto | $nf$ tra parentesi $nf$ più uno più tra parentesi $nf$ per due |
| | Ricercatore | *Accorgendosi che Federica sta discutendo con il compagno su ciò che ha detto Augusto* Federica cos'è che non ti piace di quello che ha detto augusto? |
| | Federica | Perché se uno ti chiede: perché aggiungi uno e perché moltiplichi due? |
| | Augusto | Perché se si conta la prima figura... la figura 1 è composta da due orizzontale e due in verticale |
| | Gioele | Eh ma ha ragione perché due è in più di uno che è il numero della figura ed è anche il doppio di uno |
| | Ricercatore | Ok, qua c'è $nf$ più uno... $nf$ più uno che cosa mi dà? se faccio il numero della figura più uno? |
| | Augusto | Verticale |
| | Gioele | Il numero degli stuzzicadenti verticali |
| | Ricercatore | Il numero degli stuzzicadenti verticali |
| | Gioele | invece per due è il numero degli stuzzicadenti in orizzontale perché ad ogni figura si aggiungono uno stuzzicadenti verticale e due orizzontali |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.27: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | [. . . ] | |
| | Ricercatore | come lo devo scrivere a parole? |
| | Augusto | basta aggiungere uno al numero della figura per trovare il numero degli stecchini verticali e basta moltiplicare il numero della figura per due per trovare quelli verticali e poi si somma tutto |
| | | *L'immagine riportata sotto mostra la slide prodotta durante questa discussione*<br><br> |

Il quarto incontro, della durata di un'ora, è stato utilizzato per far risolvere agli studenti, che hanno lavorato individualmente, il problema delle macchinine (Tabella 4.21).

### Criteri di analisi degli elaborati

Le risposte e gli elaborati prodotti dagli studenti sono stati analizzati tenendo conto delle seguenti variabili:

- **La strategia** utilizzata per elaborare la risposta ai quesiti aritmetici. Le diverse strategie sono state classificate in: *Disegno*, *Ricorsivo*, *Diretto* (se il risultato è stato ottenuto applicando un algoritmo al numero che indica la posizione dell'elemento nella successione o al numero di oggetti di cui l'elemento è formato), *Linearità* (se il risultato è stato ottenuto mediante un ragionamento che può essere interpretato come l'attribuzione della proprietà di additività o omogeneità alla funzione che associa alla posizione dell'elemento nella successione, il numero di oggetti di cui è composto).

- Il fatto che venisse fornita o meno una generalizzazione,ovvero una descrizione generale dell'algoritmo che consente di determinare la risposta per una figura (o fila) qualsiasi, già nelle risposte ai quesiti aritmetici.

- **La modalità di spiegazione** dell'algoritmo utilizzato per rispondere ai quesiti aritmentici, fornita nel quesito di generalizzazione. Queste sono state classificate in: *Esempio* (se, per spiegare l'algoritmo, viene fornito solo un esempio), *A parole incompleta* (se c'è un tentativo di descrivere l'algoritmo generale a parole ma senza spiegare chiaramente a quale oggetto occorre applicare le operazioni descritte), *A parole completa* (se l'algoritmo viene descritto a parole facendo chiaro riferimento al "numero della figura" o, nel caso in cui si stia descrivendo un metodo ricorsivo, a quale oggetto si devono applicare le operazioni descritte), *Formula* (nel caso in cui venga fornita un'espressione algebrica, eventualmente accompagnata da una spiegazione a parole, che descriva l'algoritmo).

- La strategia utilizzata per rispondere al quesito inverso. Le diverse strategie sono state classificate in: *Tentativi* (se la risposta viene determinata applicando l'algoritmo utilizzato per il calcolo diretto a diverse figure/file fino a trovare il numero desiderato), *Ricorsivo* (se viene utilizzata una procedura ricorsiva determinando il numero di quadretti, stuzzicadenti o macchinine per tutte le figure o file fino ad ottenere il risultato cercato), *Inversa* (se il risultato viene calcolato applicando un algoritmo che utilizza gli operatori inversi[21] di quelli utilizzati per rispondere agli altri quesiti), *Linearità* (se il risultato è stato ottenuto mediante un ragionamento che può essere interpretato come l'attribuzione della proprietà di additività o omogeneità alla funzione che associa alla posizione dell'elemento nella successione, il numero di oggetti di cui è composto), *Contrario* (se la risposta viene ottenuta interpretando il dato fornito dal testo come posizione dell'elemento nella successione e determinando il corrispondente numero di oggetti).

- Il fatto che, nel rispondere al quesito inverso si parli esplicitamente di "formula inversa", "operazione/i inversa/e", "ragionamento inverso" o "procedimento inverso".

Le classificazioni precedenti sono state assegnate senza tener conto del fatto che il risultato o il procedimento applicato fossero corretti o meno. Ovviamente, per ogni quesito è stata considerata una variabile separata che tenesse conto di questo. La risposta è stata considerata errata anche nel caso in cui il procedimento fosse corretto ma il risultato errato a causa di errori nel calcolo (o nel conteggio).

[21] L'algoritmo applicato in questo caso non è sempre il corretto algoritmo inverso di quello utilizzato negli altri quesiti.

### 4.2.2 Risultati e analisi dei dati

#### Analisi delle strategie utilizzate e della loro evoluzione

Il grafico in Figura 4.13 mostra che, in tutti e tre i problemi, le frequenze dei tipi di strategia utilizzata si distribuiscono in modo analogo. Infatti in tutti i problemi la strategia applicata dal maggior numero di studenti è quella diretta mentre la meno utilizzata è il disegno. Anche il numero di chi non risponde è sempre compreso fra il numero di chi applica una strategia ricorsiva e chi disegna.

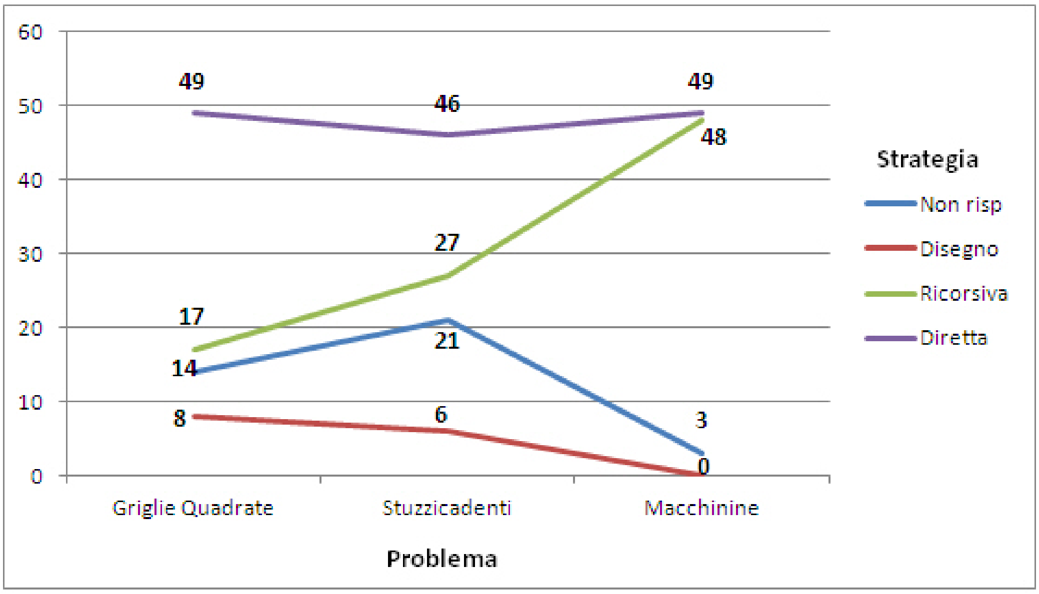


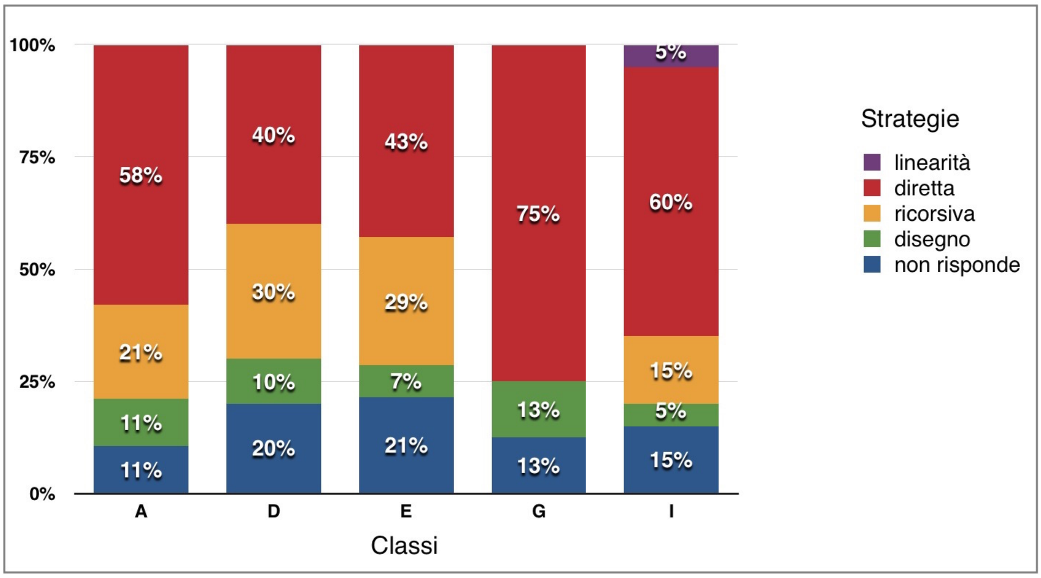

Figura 4.13: Andamento delle frequenze del tipo di strategia utilizzata nei tre problemi.

Nonostante questa analogia fra le distribuzioni, nel problema delle macchinine si osserva una differenza rispetto agli altri due: il numero degli studenti che hanno utilizzato la strategia ricorsiva è sostanzialmente uguale al numero di coloro che hanno utilizzato una strategia diretta, mentre negli altri due problemi la differenza fra questi due dati è considerevole. Se si analizza il grafico in un'ottica temporale si vede infatti che, mentre il numero di chi usa una strategia diretta resta pressoché invariato, passando da 49 a 46 a 49, il numero di chi applica una strategia ricorsiva passa da 17 nel problema delle griglie quadrate a 27 nel problema degli stuzzicadenti fino a raggiungere 48 nel problema delle macchinine.

L'incremento della frequenza delle strategie ricorsive è osservabile anche analizzando i dati di ciascuna classe riportati, separatamente per ciascun problema, nelle tabelle 4.28, 4.29 e 4.30. Anche separando i dati per classe la strategia più utilizzata è quasi sempre quella diretta la cui frequenza, a parte nella prima D, diminuisce nel corso dei tre problemi. La frequenza di chi usa una strategia ricorsiva, aumenta da un problema all'altro in tutte le classi (a parte dal primo al secondo problema della prima D) e, addirittura, nella prima A e nella prima E arriva a superare quella delle strategie dirette. Il comportamento rispetto alle strategie è quindi analogo nelle cinque classi che, si ricorda, hanno tutte insegnanti diverse. La variabile "insegnante" non ha quindi determinato differenze significative nel tipo di strategia utilizzata dagli studenti per rispondere ai quesiti aritmetici dei tre problemi.

Tabella 4.28: Distribuzione delle diverse strategie per ciascuna classe. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema delle griglie quadrate.

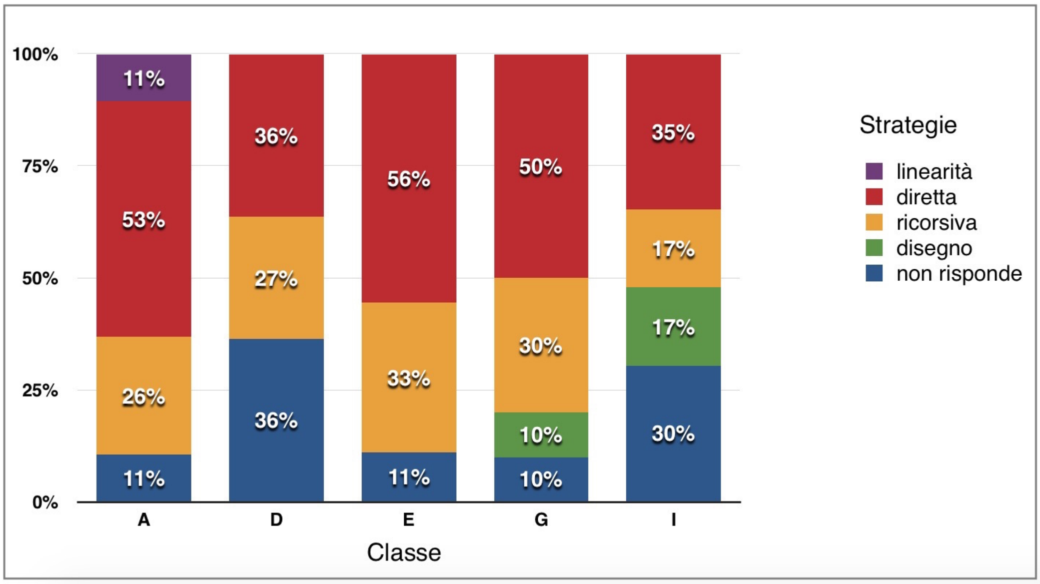
| **Classe** | **Strategia** | | | | | **Totale** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | disegno | ricorsiva | diretta | linearità | |
| A | 2 | 2 | 4 | 11 | | 19 |
| D | 4 | 2 | 6 | 8 | | 20 |
| E | 3 | 1 | 4 | 6 | | 14 |
| G | 2 | 2 | | 12 | | 16 |
| I | 3 | 1 | 3 | 12 | 1 | 20 |
| **Totale** | **14** | **8** | **17** | **49** | **1** | **89** |




L'andamento delle frequenze delle strategie non rispecchia ciò che si era prospettato al momento della progettazione del percorso. Come illustrato nel Paragrafo 4.2.1, infatti, la prima fase delle discussioni collettive aveva come

Tabella 4.29: Distribuzione delle diverse strategie per ciascuna classe. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema degli stuzzicadenti.

| Classe | Strategia | | | | | Totale |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | disegno | ricorsiva | diretta | linearità | |
| A | 2 | | 5 | 10 | 2 | 19 |
| D | 8 | | 6 | 8 | | 22 |
| E | 2 | | 6 | 10 | | 18 |
| G | 2 | 2 | 6 | 10 | | 20 |
| I | 7 | 4 | 4 | 8 | | 23 |
| **Totale** | **21** | **6** | **27** | **46** | **2** | **102** |



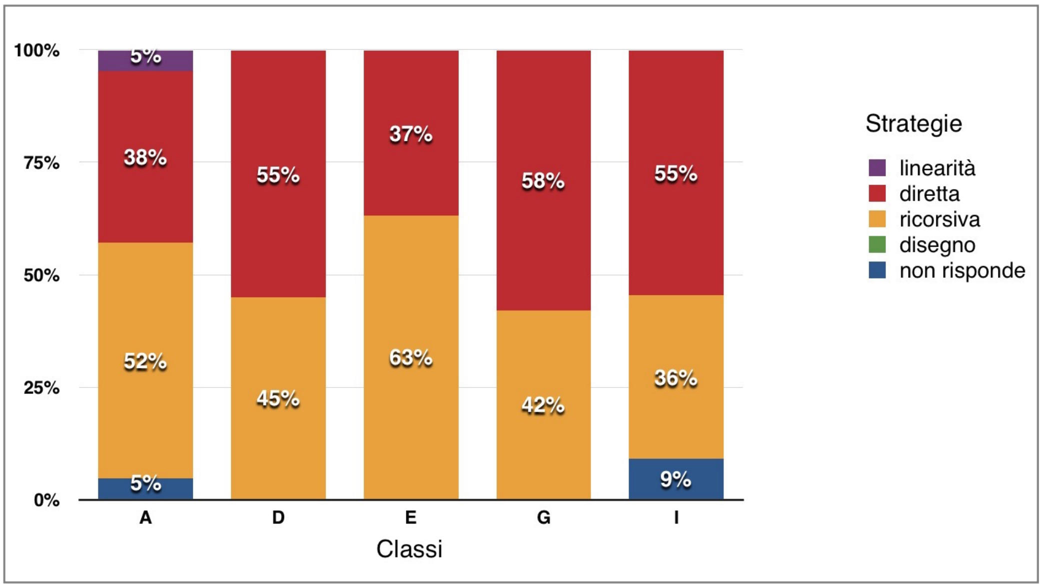

obiettivo anche quello di indurre gli studenti, per mezzo del confronto fra le diverse strategie proposte, ad abbandonare le strategie del disegno e quelle ricorsive a favore delle strategie dirette, più adatte al fine ultimo di essere descritte mediante una formula algebrica.

Ciò che ci si aspettava era dunque l'incremento delle frequenze delle strategie di tipo diretto e la diminuzione del numero di studenti che fanno uso della ricorsione, a prescindere dalle caratteristiche dei problemi somministrati che invece hanno certamente influito su questo aspetto.

Una variabile che differenzia infatti il problema delle griglie quadrate da quello degli stuzzicadenti riguarda la natura della successione. La successione delle griglie quadrate si può ottenere in modo ricorsivo aggiungendo

Tabella 4.30: Distribuzione delle diverse strategie per ciascuna classe. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema delle macchinine.

| Classe | Strategia | | | | Totale |
|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | ricorsiva | diretta | linearità | |
| A | 1 | 11 | 8 | 1 | 21 |
| D | | 9 | 11 | | 20 |
| E | | 12 | 7 | | 19 |
| G | | 8 | 11 | | 19 |
| I | 2 | 8 | 12 | | 22 |
| **Totale** | **3** | **48** | **49** | **1** | **101** |




al numero di quadretti di una figura un numero di quadretti che può essere determinato nei due modi seguenti: $q_n = q_{n-1} + (q_{n-1} - q_{n-2}) + 2$ e $q_n = q_{n-1} + (2n + 1)$. Quindi nella successione delle griglie quadrate il numero di quadretti da aggiungere ad ogni passaggio varia in base al numero della figura. Invece la successione degli stuzzicadenti è una successione aritmetica infatti per determinarla in modo ricorsivo, ad ogni passaggio si deve aggiungere sempre lo stesso numero di stuzzicadenti, individuabile già osservando le prime tre figure riportate nel testo del problema. Questo fatto ha favorito l'individuazione e l'applicazione di una strategia ricorsiva efficace.

Anche la successione del problema delle macchinine è una successione aritmetica in cui la ragione costante da aggiungere ad ogni passaggio è 4. Se le due successioni sono strutturalmente uguali, cosa ha provocato l'ulteriore aumento del numero di studenti che hanno utilizzato la strategia ricorsiva in questo problema? Questa volta la causa non va ricercata nella natura della successione ma nella formulazione del problema. Infatti, a differenza del problema degli stuzzicadenti, la ragione costante da aggiungere ad ogni passaggio viene chiaramente indicata nel testo in cui si dice:

> nella prima fila sistema 6 macchinine, nella seconda ne mette *quattro in più* rispetto alla prima, nella terza *quattro in più* rispetto alla seconda *e così via...*[22]

Le differenze fra i tre problemi hanno quindi avuto più influenza, nella scelta della strategia da applicare, rispetto alle considerazioni fatte durante le discussioni, dal ricercatore e dagli studenti stessi, sulla maggiore velocità e sul minor numero di calcoli necessari utilizzando una strategia diretta.

Per trovare ulteriori concause dell'incremento degli studenti che utilizzano una strategia ricorsiva sono state analizzate le strategie utilizzate da questi studenti nei problemi precedenti, in particolar modo se la strategia ricorsiva era stata preceduta da una diretta.

Fra i 27 studenti che nel problema degli stuzzicadenti hanno utilizzato una strategia ricorsiva, 9 avevano utilizzato una strategia diretta nel problema delle griglie quadrate. Si potrebbe ipotizzare che il passaggio da una strategia diretta ad una ricorsiva, oltre che dalle differenze fra i problemi già commentate, possa essere causato dal fallimento della strategia diretta, ovvero dall'aver determinato una risposta errata nel problema delle griglie quadrate. Ma di questi 9 studenti, 5 hanno risposto correttamente al secondo quesito numerico del problema delle griglie quadrate. Quindi il fallimento della strategia precedentemente utilizzata non è il motivo dell'abbandono della strategia diretta verso una ricorsiva.

La strategia ricorsiva per il problema degli stuzzicadenti è stata utilizzata anche dalla maggior parte degli studenti che nel problema delle griglie quadrate avevano disegnato e contato. Di questi, che erano 14, 8 hanno scelto una strategia ricorsiva e solo 2 una diretta.

Se si effettua lo stesso tipo di analisi nel passaggio dal problema degli stuzzicadenti a quello delle macchinine, si trova che fra i 48 studenti che hanno utilizzato la strategia ricorsiva nel problema delle macchinine, 14 avevano utilizzato una strategia diretta in quello degli stuzzicadenti. Anche in questo

[22] L'enfasi, non presente nel testo del problema è stata qui utilizzata per evidenziare le parti in cui viene esplicitamente indicata la ragione della successione aritmetica.

caso la distribuzione fra chi aveva ottenuto un risultato corretto e chi aveva ottenuto un risultato errato è sostanzialmente equa - rispettivamente 6 e 8. Quindi neanche in questo caso si può attribuire al fallimento della strategia diretta la causa dell'abbandono di tale strategia per una ricorsiva.

In questo problema, il numero di chi utilizza una strategia ricorsiva è stato incrementato anche da 12 dei 19 studenti che, nel secondo quesito aritmetico del problema degli stuzzicadenti, non avevano fornito alcuna risposta.

Con queste ultime osservazioni e per il fatto che questo comportamento relativo alle strategie ricorsive sia comune in tutte e cinque le classi si giunge alla conclusione che l'aumento del numero degli studenti che usano una strategia ricorsiva è dovuto principalmente alle caratteristiche delle successioni utilizzate e dei testi dei problemi. Quindi le caratteristiche dei problemi non influiscono solo sulla necessità di esplicitare una regola generale, come confermato dallo studio pilota, ma anche sul tipo di strategia messa in atto per rispondere ai quesiti aritmetici.

Nonostante tali caratteristiche, il numero complessivo di studenti che utilizzano una strategia diretta resta comunque costante e alcuni studenti passano da una strategia ricorsiva a una diretta: nel problema degli stuzzicadenti questo succede per 6 degli studenti che nel problema delle griglie quadrate avevano usato una strategia ricorsiva; nel problema delle macchinine 11 fra gli studenti che nel problema degli stuzzicadenti avevano utilizzato una strategia ricorsiva, hanno poi applicato una strategia diretta. Come avviene dunque la genesi delle diverse strategie nella risoluzione di un problema sulle successioni? Il paragrafo che segue propone e argomenta una possibile risposta a questa domanda.

### Genesi evolutiva delle strategie attraverso le discussioni orali e i testi scritti degli studenti

L'ipotesi, formulata a priori sul fatto che il confronto delle strategie avrebbe portato ad un aumento di quelle dirette a discapito delle altre era stata rafforzata sia da alcune risposte fornite per il quesito di generalizzazione da coloro che avevano utilizzato una strategia ricorsiva o il disegno, sia dalle affermazioni fatte dagli studenti durante le discussioni. Ma mentre le aspettative sull'abbandono del disegno sono state soddisfatte, i dati riguardanti le strategie ricorsive sono in disaccordo con le risposte e i commenti degli studenti.

Di seguito vengono riportate le risposte ai quesiti di generalizzazione di studenti che pur avendo determinato la risposta ai quesiti aritmetici utilizzando una strategia ricorsiva, ne hanno evidenziato esplicitamente i difetti.

> Siamo d'accordo con Fabio ma non è molto pratico. Agg sempre 3 (Classe 1A; Problema degli stuzzicadenti)
>
> Sì, se ne hai voglia ma io non ne ho voglia perché ci impiego molto (Classe 1I; Problema degli stuzzicadenti)
>
> No, secondo me non è possibile perché non trovo il modo di associare il numero della fila al numero delle macchine se non scrivendole tutte (Classe 1A; Problema delle macchinine)
>
> No, perché dovresti sapere il numero di macchine della figura prima e quelle della figura prima etc (Classe 1D; Problema delle macchinine)
>
> No, non saprei determinare sempre il numero di macchine col metodo che ho usato perché ci vorrebbe troppo tempo per calcolare (Classe 1E; Problema delle macchinine)

Gli aspetti negativi delle strategie ricorsive elencate, insieme alle altre, nella prima parte delle discussioni, erano stati evidenziati dagli studenti stessi nel corso delle discussioni. Nella Tabella 4.31, ad esempio, è riportato l'estratto della discussione avvenuta nella prima E dopo che un compagno ha spiegato la strategia ricorsiva da lui utilizzata per rispondere ai quesiti aritmetici delle griglie quadrate.

Tabella 4.31: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate in seguito alla spiegazione della strategia ricorsiva utilizzata da un compagno (Classe 1E).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Chi userebbe il metodo di Christian?[23] |
| | | *In quattro compreso Christian alzano la mano* |
| | Ricercatore | Ok. Invece il metodo che abbiamo ripassato all'inizio?[24] |
| | | *La maggior parte alza la mano* |
| | | [...] |
| | Studente | In quello di Christian ci viole un sacco di tempo |
| | | [...] |
| | Studente | Arrivare ad un certo numero troppo alto poi ti confondi |

[23]Si riferisce alla strategia ricorsiva proposta da uno studente.
[24]Si riferisce alla strategia diretta.

In questo estratto è chiaro che la maggior parte della classe, potendo scegliere, utilizzerebbe la strategia diretta. Inoltre, lo studente che interviene sottolinea sia il maggior impiego di tempo sia il fatto che, se si deve determinare la risposta per una figura che ha un numero di posizione troppo alto, la quantità dei calcoli potrebbe far confondere chi lo applica.

Nell'estratto in Tabella 4.32 viene invece sottolineato il pregio della strategia diretta di essere più veloce. Il dialogo è tratto dalla discussione nella prima D, dopo che tutte le tre strategie corrette individuate dagli studenti sono state elencate alla lavagna.

Tabella 4.32: Estratto del dialogo della discussione sul problema delle griglie quadrate durante il confronto delle diverse strategia. (Classe 1D).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | C'è qualcuno che aveva usato un metodo di questi tre e adesso... invece, se lo dovesse rifare, cambierebbe metodo? |
| | | [...] |
| | Studente | Io non c'ero l'altra volta però userei base per altezza[25] |
| | Ricercatore | perché useresti questo? |
| | Studente | perché è più veloce |

Anche nell'estratto in Tabella 4.33 le due strategie, diretta e ricorsiva, vengono confrontate dal punto di vista del tempo impiegato: lo studente che interviene afferma infatti sia che con la strategia ricorsiva impiegherebbe "tantissimo tempo" sia che con quella diretta invece "lo sai subito".

Tabella 4.33: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate. Sono state appena elencate e riportate alla lavagna le diverse strategie corrette utilizzate durante l'incontro precedente per rispondere ai quesiti aritmetici (Classe 1D).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Quindi questi metodi funzionano tutti? |
| | Studente | Nel secondo metodo se non hai una figura di partenza da ampliare non potrai mai sapere quanto... |
| | | [...] |
| | Insegnante | Tu sai qual è la figura di partenza? Sapresti individuarla? |

*continua nella pagina seguente*

[25]Si riferisce alla strategia diretta che consente di determinare il numero di quadretti di cui è composta una figura $n$ calcolando il quadrato del successore di $n$.

*Tabella 4.33: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente | Ci vuole troppo tempo... direttamente fai base per altezza e lo sai subito |
| | Ricercatore | Stai confrontando questi due?[26] |
| | Studente | Sì perché tu non puoi... che ne so io ho una figura 50... non posso... cioè ci metto tantissimo tempo a risalire alla figura uno. |

Nei due estratti che seguono, riportati nelle Tabelle 4.34 e 4.35, ai due tipi di strategie vengono associati gli aggettivi "lungo" e "scomodo" parlando del procedimento di tipo ricorsivo e "conveniente" e "pratici" parlando dei procedimenti di tipo diretto. Il primo estratto è relativo alla discussione sul problema delle griglie quadrate avvenuta nella prima A; il secondo al problema degli stuzzicadenti nella prima I.

Tabella 4.34: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate. Era stato appena illustrato un esempio per utilizzare il metodo ricorsivo proposto da due studenti (Classe 1A).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Funziona questo metodo? |
| | Tutti | Si però è lungo |
| | Ricercatore | È lungo! Perché per sapere il numero dei quadretti di una figura cosa devo calcolare prima? |
| | Tutti | Tutte le altre / Tutte quelle prima |
| | Studente 1 | Il più conveniente è il terzo in realtà.[27] |
| | Studente 2 | Il primo e il terzo in realtà.[28] |
| | Studente 3 | Il terzo ancora di più. |
| | | [...] |
| | Ricercatore | Quale vi piace di più? |
| | Tutti | La terza! |
| | | [...] |
| | Ricercatore | Quello più scomodo di tutti qual è? |
| | Tutti | Il secondo![29] |

[26] Indica le due strategia, ricorsiva e diretta, riportate alla lavagna.

[27] Con "terzo metodo" si sta facendo riferimento alla strategia diretta che consente di determinare il numero di quadretti di una figura $n$ calcolando il quadrato del successore di $n$.

[28] Con "primo metodo" si sta facendo riferimento alla strategia di disegnare la figura e contarne i quadretti.

[29] Con "secondo metodo" si intende il metodo ricorsivo.

Tabella 4.35: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti. Sono state illustrate ed elencate alla lavagna tutte le strategie corrette utilizzate negli elaborati (Classe 1I).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Facciamo così: c'è qualcuno che cambierebbe il suo metodo per uno che c'è scritto alla lavagna? |
| | Studente 1 | Io il metodo di Riccardo[30] |
| | Ricercatore | Che metodo useresti? |
| | Studente 1 | O Riccardo o Davide[31] |
| | Ricercatore | perché? |
| | Studente 1 | perché sono più pratici |
| | | [. . . ] |
| | Studente 2 | Io scambio con quello di Davide |
| | Ricercatore | Quale avevi usato prima? |
| | Studente 2 | Quello di Lorenzo[32] |

Gli estratti riportati sopra mostrano quindi che, quando gli studenti confrontano le due strategie dal punto di vista del numero di calcoli necessari, il tipo diretto sembra essere quello preferito. Nelle discussioni le strategie vengono però confrontate non solo dal punto di vista dell'economia nel calcolo ma anche da quello della facilità. Gli studenti stessi utilizzano i termini "facilità" e "velocità" in alcuni casi contrapponendoli, mostrando quindi di considerare distinte queste due caratteristiche. È un esempio l'estratto riportato in Tabella 4.36 tratto dalla discussione sulle griglie quadrate della prima D. Da questo estratto si evince che, nonostante la strategia ricorsiva sia oggettivamente più lunga viene comunque percepita da alcuni come "più facile" e "più sicura" perché ricalca "il processo" che genera la successione.

Tabella 4.36: Estratto del discorso sul problema delle griglie quadrate. Si stanno confrontando le diverse strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici (Classe 1D).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | C'è qualcuno che aveva usato un metodo di questi tre e adesso invece, se lo dovesse rifare, cambierebbe metodo? |
| | | [. . . ] |
| | Nicola | Io non c'ero l'altra volta però userei base per altezza[33] |

*continua nella pagina seguente*

[30]Si riferisce ad una delle strategie dirette proposta da un compagno. Questo studente aveva utilizzato invece una strategia ricorsiva.

[31]Si tratta di due strategie dirette.

[32]Si riferisce alla strategia ricorsiva.

[33]Si riferisce alla strategia diretta.

*Tabella 4.36: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | perché useresti questo? |
| | Studente 5 | perché è più veloce |
| | Ricercatore | perché è più veloce... Cosa dite Andrea, Tommaso e Jessica che avete scelto il secondo?[34] |
| | Andrea | Io sono d'accordo con Nicola però... io dico che comunque, anche se ci metto tanto a fare il secondo metodo... credo sia più facile |
| | Jessica | La stessa cosa |
| | Ricercatore | È più facile fare questo? |
| | Andrea | È più veloce fare base per altezza... |
| | Ricercatore | È più veloce però perché sceglieresti questo?[35] |
| | Jessica | Perché è più facile |
| | Andrea | Perché penso che mi dia più sicurezza di aver fatto giusto... cioè calcolando tutti so quello che è esattamente giusto |
| | Tommaso | Il processo |
| | Studente | Sono più sicuro |
| | Ricercatore | Anche tu sei più sicuro con questo? |
| | Studente | Sì |
| | | [...] |
| | Ricercatore | *Chiede chi userebbe la strategia diretta: 8 studenti alzano la mano.* |
| | Ricercatore | *Chiede quindi chi userebbe la strategia ricorsiva: 14 studenti alzano la mano.* |
| | Ricercatore | Samuel anche tu useresti questo? |
| | Samuel | Sì |
| | Ricercatore | perché ti piace di più? |
| | Samuel | È più facile |

La facilità che gli studenti associano alle strategie ricorsive non è relativa solo alla loro applicazione ma anche alla sua individuazione, soprattuto se la successione è di tipo aritmetico per i motivi già discussi. In questo studio il passaggio da una strategia ricorsiva a una diretta è inteso come un'evoluzione per il fatto che l'applicazione di una strategia diretta presuppone l'individuazione di una relazione fra la posizione dell'elemento e il numero di oggetti di cui è composto, relazione che invece non è necessario riconoscere per utilizzare una strategia ricorsiva. Gli estratti che seguono mostrano che

[34] Si riferisce alla strategia ricorsiva.
[35] Si riferisce alla strategia ricorsiva.

in alcuni casi l'individuazione di una strategia diretta è in realtà preceduta dall'individuazione di una ricorsiva. Quindi, nell'evoluzione delle strategie, quella ricorsiva "precede" quella diretta non soltanto metaforicamente per quanto spiegato, ma anche temporalmente nella genesi delle diverse strategie. Gli estratti nelle Tabelle 4.37 e 4.38 dimostrano che effettivamente il primo procedimento che viene individuato da queste due coppie di studenti, e anche applicato per rispondere al primo quesito, è di tipo ricorsivo ma, entrambe le coppie, affermano di dover trovare una strategia per "velocizzare" l'individuazione della risposta. Nel secondo estratto addirittura affermano di voler trovare una strategia "un po' più facile" associando, al contrario di quanto accaduto in altre discussioni, la facilità alla velocità.

Tabella 4.37: Estratto del dialogo di due studenti della prima A che, lavorando in coppia, cercando di rispondere al primo quesito aritmetico del problema degli stuzzicadenti.

| | | |
|---|---|---|
| | Elias | Quindi si va sempre avanti di tre Ale… quattro sette… sette dieci… quattro più tre sette… sette più tre dieci |
| | Alessandro | È vero perché vedi |
| | Elias | Però dobbiamo trovare un modo per velocizzare un pochino le cose |
| | Alessandro | Quindi nella figura quattro ce ne saranno tredici |
| | Elias | E ma non dobbiamo… non possiamo farlo uno alla volta come facevo io[36]… dobbiamo arrivare direttamente a uno |

Tabella 4.38: Estratto del dialogo di due studenti della prima A che, lavorando in coppia, cercano di rispondere al primo quesito aritmetico del problema degli stuzzicadenti. Hanno appena capito che aggiungendo ricorsivamente tre al numero degli stuzzicadenti di una figura si trova il numero di stuzzicadenti di quella successiva.

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Io metterei un metodo un po' più facile |
| | Studente 2 | Va beh almeno ci arriviamo |
| | Studente 1 | Dopo lo proviamo… ora finiamo questo poi perfezioniamo il metodo perché fa veramente pena |
| | Studente 2 | Molto vero |
| | Studente 2 | Sessantuno! |
| | Studente 1 | Forse abbiamo sbagliato qualcosa |

*continua nella pagina seguente*

[36]Lo studente che parla era uno dei due che, in questa classe, aveva utilizzato la strategia ricorsiva nel precedente problema delle griglie quadrate.

*Tabella 4.38: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 2 | No no no, va di tre in tre |
| | | [...] |
| | Studente 1 | Però questo è troppo lungo come metodo |
| | Studente 2 | Va beh ne troviamo un altro però... adesso solo per rispondere |

Effettivamente la strategia utilizzata da queste due coppie per rispondere al secondo quesito numerico è di tipo diretto. Però, mentre alcuni riescono effettivamente ad individuare una seconda strategia diretta, come accade anche alla coppia del dialogo in Tabella 4.39, altre volte la ricerca non ha successo, come accade invece per la coppia protagonista sia degli estratti in Tabella 4.40 e 4.41 relativi rispettivamente al momento di lavoro in coppia e alla successiva discussione collettiva.

Tabella 4.39: Estratto del dialogo fra due studenti della prima E che, durante il lavoro di coppia, spiegano il loro ragionamento.

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Abbiamo fatto un ragionamento stupido |
| | Ricercatore | Spiegatemelo |
| | Studente 1 | Che abbiamo fatto figura uno due tre quattro cinque sei sette otto... |
| | Studente 2 | Allora la quattro ne ha sempre più di tre... la cinque ne avrà sempre tre in più della quattro |
| | Studente 1 | Però è stupido come ragionamento |
| | Ricercatore | Non è stupido... è lungo magari |
| | Studente 1 | Esatto |
| | | [...] |
| | Studente 1 | Abbiamo trovato un metodo! |
| | Studente 2 | È molto più bello di quello di prima! |
| | Studente 1 | Praticamente siccome è formato sempre da quattro e poi bisogna aggiungere tre... Bisogna togliere quattro dal numero di stuzzicadenti e poi dividere per tre... Dev'essere un multiplo di tre però bisogna togliere prima quattro |

Tabella 4.40: Estratto del dialogo fra due studenti della prima A che, durante il lavoro in coppia, parlano con un'insegnante.

| | | |
|---|---|---|
| | Insegnante | Quale sarebbe la risposta c)? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 4.40: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Sì, si può fare però a noi non vengono altri modi soltanto che è pochissimo pratico perché se ad esempio una persona deve calcolare la mille e quattrocento, farla così bisognerebbe fare sempre più tre più tre fin quando. . . |
| | Studente 2 | Stavo pensando che nella c). . . sì si possono calcolare tutte basta continuare ad aggiungere tre anche se è troppo lungo da fare. . . |
| | Studente 1 | Esatto |

Tabella 4.41: Estratto del dialogo di due studenti della prima A che, durante il lavoro in coppia, cercano di rispondere al quesito di generalizzazione del problema degli stuzzicadenti.

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 2 | No anche io dicevo che bisognava aggiungere tre però poi diventa stancante sempre aggiungere tre |
| | Studente 1 | E poi magari se è millequattrocento. . . |
| | Ricercatore | Però anche l'altra volta pensavi che il tuo metodo fosse stancante e poi cos'è successo?[37] |
| | Studente 1 | Che c'era un calcolo dietro. . . e però infatti. . . cioè io l'ho capito e stavamo provando a pensare un calcolo però a quanto pare non l'abbiamo trovato |

Ciò che si può concludere dunque in merito al confronto fra le strategie dirette e quelle ricorsive è che anche se le prime consentono di rispondere ai quesiti in minor tempo e con un numero minore di calcoli, quelle ricorsive non solo vengono comunque percepite come "più sicure" poiché rispecchiano il procedimento di costruzione delle figure o delle file ma, soprattutto se la successione è di tipo aritmetico, sono le prime ad essere inviduate e solo in alcuni casi la maggior efficenza delle strategie dirette spinge gli studenti a cercarne una, a volte però senza successo.

### Analisi delle modalità di spiegazione dell'algoritmo nel quesito di generalizzazione

In ciascuno dei tre problemi, ai quesiti aritmetici seguiva il quesito che è stato chiamato "di generalizzazione" in cui si chiedeva allo studente di esprimere

[37] Si riferisce alla strategia del disegnoutilizzata dallo studente per rispondere al problema delle griglie quadrate.

il proprio parere sul fatto che fosse o meno possibile stabilire il numero di oggetti (quadrati, stuzzicadenti o macchinine) per qualsiasi figura/fila.

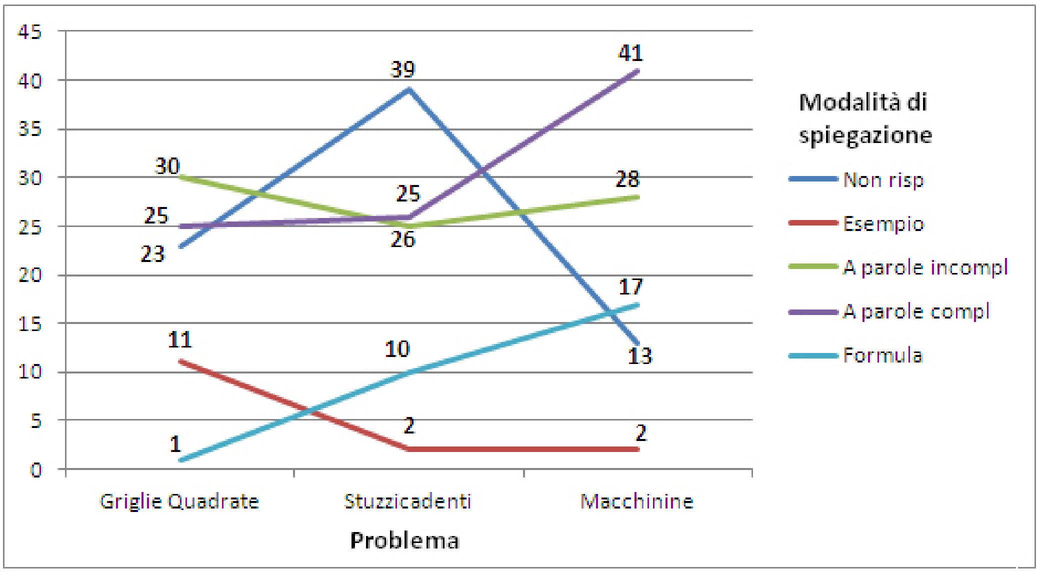



Figura 4.14: Andamento delle modalità di spiegazione dell'algoritmo nel quesito di generalizzazione. I dati riportati nel grafico indicano le frequenze assolute delle modalità di spiegazione per ogni problema.

Lo scopo di tale quesito era molteplice. In primo luogo si voleva misurare la propensione alla generalizzazione ovvero osservare se gli studenti avrebbero risposto descrivendo in qualche modo l'algoritmo che consente di rispondere alle domande per una figura qualsiasi o se avrebbero semplicemente fornito un esempio. In secondo luogo si voleva osservare il comportamento degli studenti nei confronti dell'elaborazione di una espressione algebrica che descrivesse un algoritmo seguito, ovvero quanti fra coloro che hanno tentato di descrivere un algoritmo generale lo hanno fatto mediante una spiegazione a parole e quanti mediante una formula. Per entrambi gli aspetti, i dati più significativi rispetto a ciò che gli studenti fanno *spontaneamente* sono quelli relativi al problema delle griglie quadrate (Tabella 4.42). Dicendo "spontaneamente" si vuole sottolineare il fatto che non siano state date indicazioni esplicite o implicite su come rispondere alla domanda. In questo senso da questo punto di vista il problema più significativo è quello delle griglie quadrate poiché, quando sono stati somministrati gli altri due problemi, la maggior parte degli studenti aveva già assistito alla restituzione dei risultati da parte del ricercatore che perseguiva degli scopi ben precisi.[38] I dati degli altri due

[38]Si veda la descrizione dettagliata degli incontri a pagina 114.

problemi saranno quindi analizzati ipotizzando che siano dovuti, oltre che ad altre variabili, anche alle discussioni collettive riguardanti il problema precedentemente somministrato.

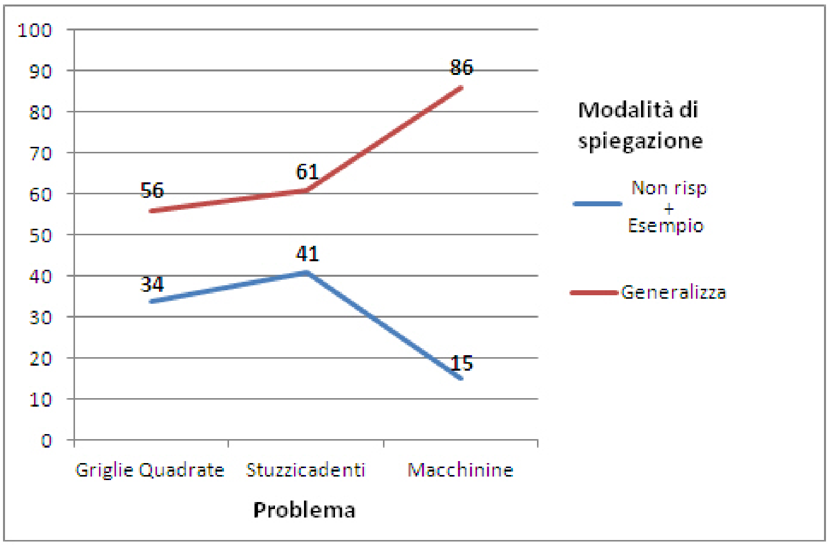



Figura 4.15: Andamento delle modalità di spiegazione dell'algoritmo nel quesito di generalizzazione con raggruppamento di chi non risponde con chi fornisce solo un esempio e chi fornisce una spiegazione generale a parole, completa e non, con chi fornisce una formula. I dati rappresentano le frequenze assolute.

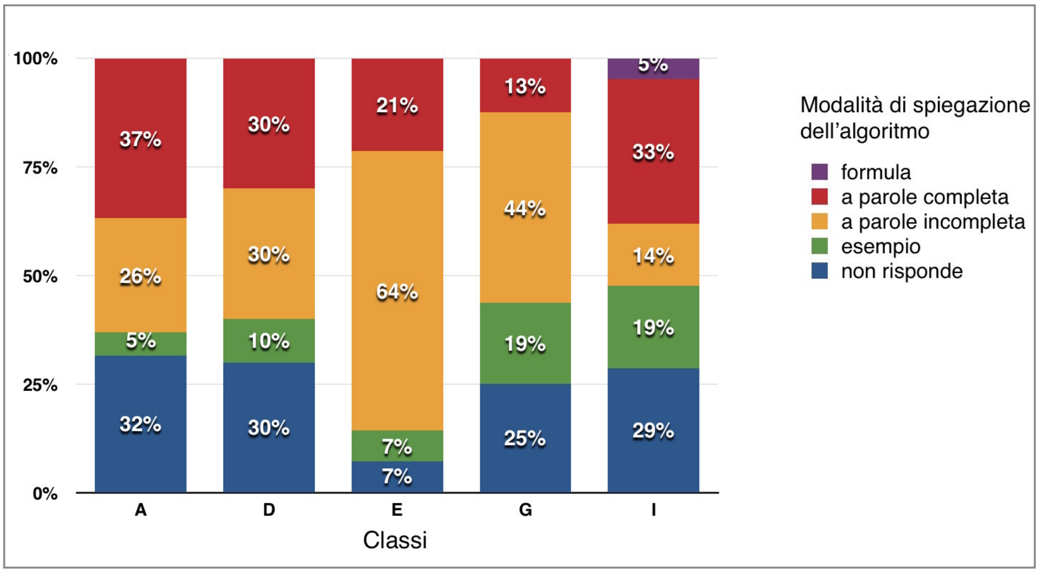
Le risposte al quesito di generalizzazione sono state classificate secondo le 4 categorie descritte a pagina 137 a cui è stata aggiunta la modalità *Non risponde* che è stata assegnata sia a chi ha lasciato in bianco il quesito ma anche a chi ha risposto con frasi del tipo "Sì, si può fare" o "No, non si può fare" senza spiegare il motivo. Per leggere i dati dal punto di vista della propensione alla generalizzazione si potrebbero però inizialmente accorpare gli studenti che non rispondono e quelli che forniscono un esempio e distinguerli da coloro che invece provano a fornire una descrizione generale a parole, sia essa completa o meno, o mediante una formula (Figura 4.15).

Per quanto riguarda il problema delle griglie quadrate, fanno parte del primo gruppo 34 studenti su 90 contro i 56 del secondo gruppo, quindi più del 60% di questo gruppo di studenti è in grado di pensare in termini generali ad una relazione che è stata riconosciuta lavorando su esempi numerici.

Se si considera la stessa suddivisione per i dati relativi al problema degli stuzzicadenti si vede che le percentuali dei due raggruppamenti sono pressoché invariate e questo potrebbe far concludere che la precedente discussione

Tabella 4.42: Distribuzione delle modalità di spiegazione nel quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema delle griglie quadrate.

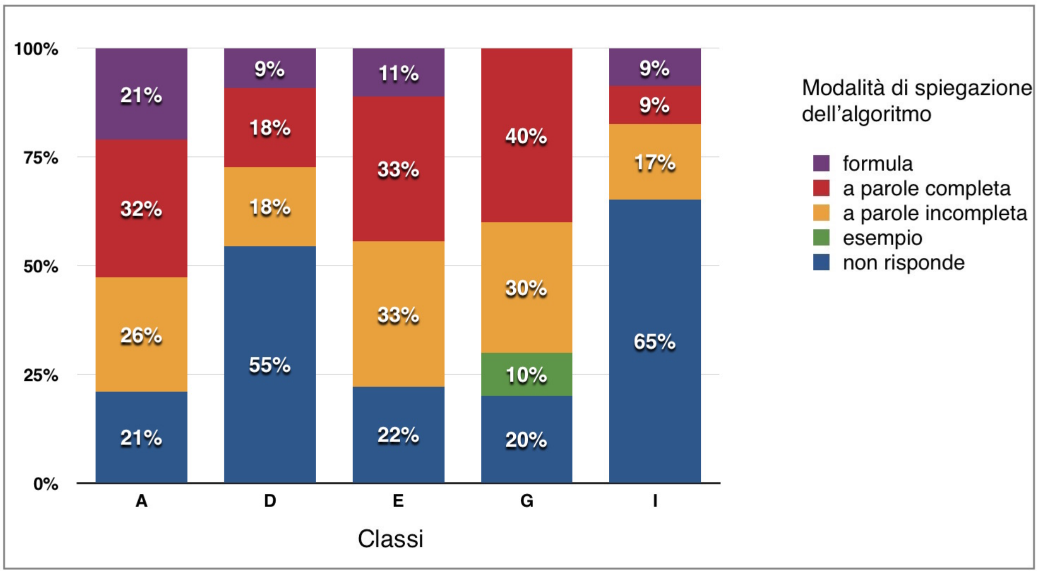
| **Classe** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole incompleta | a parole completa | formula | |
| A | 6 | 1 | 5 | 7 | | 19 |
| D | 6 | 2 | 6 | 6 | | 20 |
| E | 1 | 1 | 9 | 3 | | 14 |
| G | 4 | 3 | 7 | 2 | | 16 |
| I | 6 | 4 | 3 | 7 | 1 | 21 |
| **Totale** | **23** | **11** | **30** | **25** | **1** | **90** |




collettiva relativa al primo problema non abbia avuto effetti su questa variabile. Ma se si analizza la composizione del primo gruppo (Figura 4.14) si vede che il numero degli studenti che fornisce solo un esempio è notevolmente diminuita nel secondo problema passando da 11 a 2 (ovvero ad una sola coppia di studenti). Anche fra gli studenti che non rispondono è possibile fare un'ulteriore distinzione: gli studenti classificati come "Non risponde", nel problema delle griglie quadrate, sono distribuiti equamente fra chi non ha dato alcuna risposta e chi ha dato una risposta secca senza motivazione (rispettivamente 10 e 13); nel problema degli stuzzicadenti questa distribuzione è significativamente sbilanciata poiché gli studenti che non rispondono per niente sono 32 mentre quelli che danno una risposta secca sono solo 7. Si potrebbe ipotizzare che il motivo del numero relativamente alto di studenti

Tabella 4.43: Distribuzione delle modalità di risposta al quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema degli stuzzicadenti.

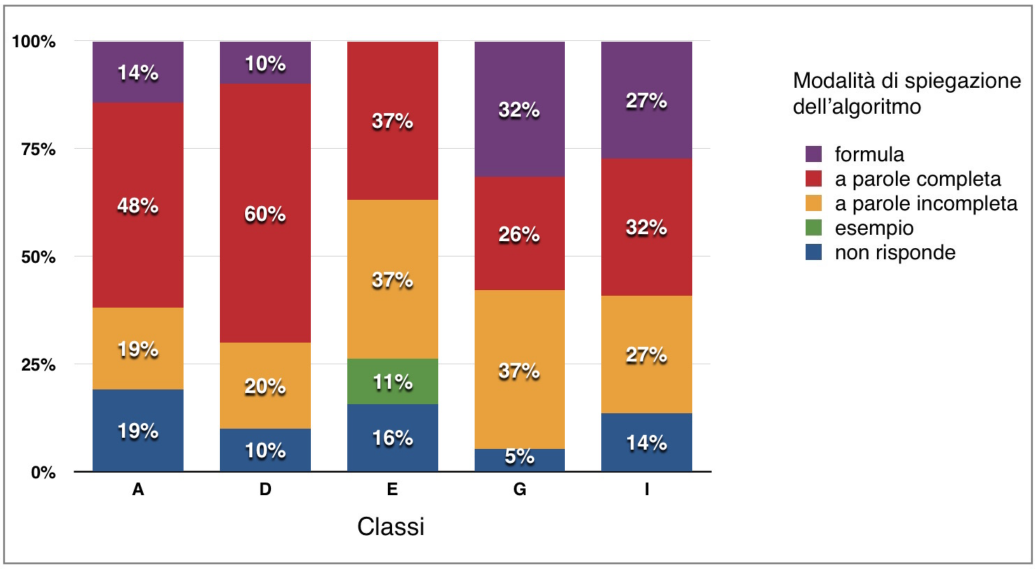
| **Classe** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole incompleta | a parole completa | formula | |
| A | 4 | | 5 | 6 | 4 | 19 |
| D | 12 | | 4 | 4 | 2 | 22 |
| E | 4 | | 6 | 6 | 2 | 18 |
| G | 4 | 2 | 6 | 8 | | 20 |
| I | 15 | | 4 | 2 | 2 | 23 |
| **Totale** | **39** | **2** | **25** | **26** | **10** | **102** |




che non rispondono affatto stia nel modo in cui questo secondo problema è stato somministrato. Il problema delle griglie quadrate è stato proposto all'inizio di una sessione da due ore e gli elaborati sono stati ritirati solo quando quasi tutti gli studenti avevano finito. Per risolvere il problema delle macchinine è stata utilizzata un'intera sessione da un'ora. Invece il problema degli stuzzicadenti è stato somministrato nella seconda parte di una sessione da due ore in cui la maggior parte del tempo è stato dedicato alla discussione sul problema risolto nell'incontro precedente. Quindi, per risolvere il problema degli stuzzicadenti, gli studenti hanno avuto a disposizione dai 30 ai 40 minuti. Si potrebbe perciò ipotizzare che la causa dell'alto numero di risposte non date sia stata la mancanza di tempo. Questo fatto potrebbe

Tabella 4.44: Distribuzione delle modalità di risposta al quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla numerosità della classe. Dati relativi al problema delle macchinine.

| **Classe** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole incompleta | a parole completa | formula | |
| A | 4 | | 4 | 10 | 3 | 21 |
| D | 2 | | 4 | 12 | 2 | 20 |
| E | 3 | 2 | 7 | 7 | | 19 |
| G | 1 | | 7 | 5 | 6 | 19 |
| I | 3 | | 6 | 7 | 6 | 22 |
| **Totale** | **13** | **2** | **28** | **41** | **17** | **101** |




annullare le osservazioni fatte riguardo al numero di coloro che utilizzano un esempio, che è notevolmente diminuito nel secondo problema dopo la discussione collettiva. Si potrebbe infatti obiettare che tale diminuzione non sia significativa poiché non si sa cosa avrebbero scritto gli studenti che non hanno riposto per mancanza di tempo: tutti (o magari la maggior parte) avrebbero potuto utilizzare un esempio. Ma ciò che è successo per il terzo problema potrebbe giustificare il rifiuto di questa ipotesi visto che, anche in questo problema, gli studenti che forniscono solo un esempio sono solamente due (e fra gli studenti classificati come "Non risponde" solo 4 su 13 lasciano il quesito completamente in bianco).

L'evoluzione delle modalità di generalizzazione avvenuta durante il percorso realizzato conferma le ipotesi formulate all'inizio dello studio riguardante il ruolo della gestione delle attività in classe nella genesi di processi di generalizzazione.

Il fatto che, durante l'intero percorso, si ha un aumento del numero di studenti che generalizzano e una diminuzione di quelli che o non rispondono o forniscono solo un esempio (Figura 4.15) conferma ulteriormente l'ipotesi iv), già confermata dallo studio pilota, secondo cui: la discussione collettiva in cui gli studenti cercano di descrivere ai compagni il procedimento seguito per risolvere un problema favorisce la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa. Questa conclusione è ulteriormente rafforzata dal fatto che, fra le componenti del gruppo che generalizza, quelle che hanno un andamento crescente corrispondono agli studenti che forniscono una formula e a quelli che forniscono una descrizione a parole completa (Figura 4.14).

L'aumento del numero di studenti che scrivono una formula, ovvero che producono un'espressione algebrica partendo da un algoritmo di calcolo, quindi un'espressione algebrica dotata di significato, è una conferma dell'ipotesi principale di questo studio ovvero del fatto che nessun ostacolo ontologico impedisca a studenti di 11 anni di comprendere il significato di un'espressione algebrica e di costruire espressioni algebriche per rappresentare relazioni fra grandezze utilizzando lettere per rappresentare le grandezze incognite o variabili. Il fatto che il numero di studenti che sono in grado di fare ciò aumenti durante il percorso, passando da 1 a 17, conferma l'ipotesi che il passaggio dal linguaggio verbale a quello simbolico canonico non avviene *spontaneamente* ma è favorito dal modo in cui le attività di apprendimento vengono gestite dall'insegnante. Sono dunque confermate le ipotesi:

i) far precedere la scrittura di un'espressione algebrica dal corrispondente algoritmo di calcolo favorisce la comprensione del significato di quest'ultima;

iii) il passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico nella descrizione di un algoritmo è favorito dall'uso dall'esempio paradigmatico, ovvero applicando l'algoritmo in un certo numero di casi particolari che, dando luogo ad espressioni numeriche aventi la stessa struttura, inducono la produzione di una espressione letterale avente la stessa struttura di quelle aritmetiche già scritte;

### Analisi della relazione fra le strategie utilizzate e la modalità di spiegazione dell'algoritmo nel quesito di generalizzazione

Nel Paragrafo 3.2.4 ci si era posti l'obiettivo di trovare una risposta alla domanda: Quale tipo di strategia favorisce la generalizzazione? Ovvero: quale tipo di strategia porta uno studente verso una descrizione generale di un algoritmo?

Si era inoltre anticipato che si sarebbe cercato di rispondere a questa domanda, almeno per quanto riguarda gli studenti coinvolti in questo lavoro, osservando, per ciascuna strategia utilizzata, il tipo di spiegazione generale più usata, e viceversa.

Le tabelle riportate di seguito, e i relativi grafici, sono state costruite appunto per confrontare la strategia utilizzata per determinare le risposte ai quesiti aritmetici con la modalità di spiegazione dell'algoritmo nel quesito di generalizzazione. Ogni tabella è relativa ad un problema.

Nel primo problema (Tabella 4.45), la maggioranza (5 su 8) degli studenti che utilizzano il disegno non fornisce una descrizione generale della strategia per determinare il numero di quadretti di una figura qualsiasi. I due studenti che provano a farlo danno le seguenti spiegazioni che non descrivono chiaramente l'algoritmo:

> "Sono d'accordo perché bisogna sempre aggiungere"

e

> "Io sono d'accordo con Marco perché basta aggiungerne o toglierne"

Una descrizione simile si trova anche per il problema degli stuzzicadenti in cui due studenti che lavoravano insieme scrivono:

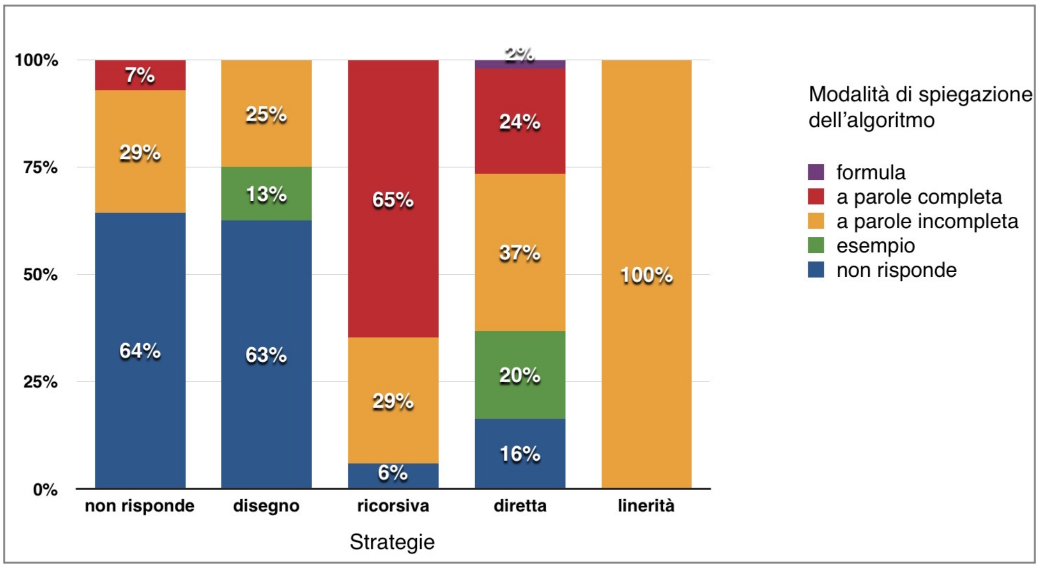
> "Sì, basta contare e disegnare"

Considerando tutti i problemi, si verifica solo in un caso (Tabella 4.46) che una coppia di studentesse che ha utilizzato il disegno dia una completa descrizione a parole per rispondere al relativo quesito di generalizzazione:

> "Siccome la figura 1 è formata da 4 stuzzicadenti aggiungendo 3 stuzzicadenti si forma la figura 2 e aggiungendo altri 3 stuzzicadenti si formerà la figura 3 = si aggiungono 3 stuzzicadenti ad ogni figura per trovare la figura successiva"

Tabella 4.45: Confronto fra la strategia utilizzata per rispondere al secondo quesito aritmetico e la modalità di spiegazione nel quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla strategia. Dati relativi al problema delle griglie quadrate.

| **Strategia** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole completa | formula | a parole incompleta | |
| non risp. | 9 | | 1 | | 4 | 14 |
| disegno | 5 | 1 | | | 2 | 8 |
| ricorsiva | 1 | | 11 | | 5 | 17 |
| diretta | 8 | 10 | 12 | 1 | 18 | 49 |
| linearità | | | | | 1 | 1 |
| **Totale** | **23** | **11** | **24** | **1** | **30** | **89** |

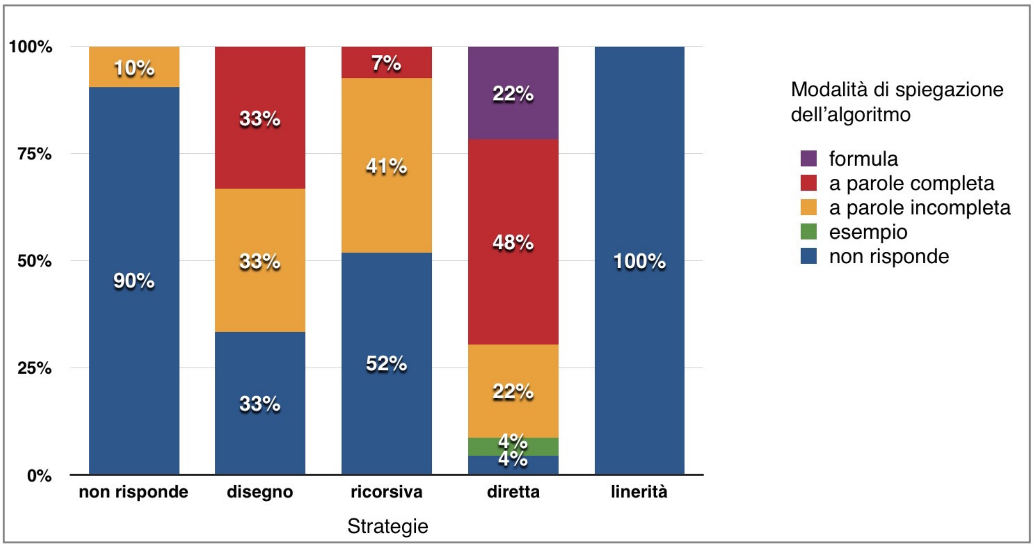



Dunque, per questo insieme di studenti, coloro che sono portati ad utilizzare il disegno come strategia di soluzione, sono caratterizzati da una debole propensione a fornire una generalizzazione completa dell'algoritmo seguito.

Se si considerano gli studenti che hanno utilizzato una strategia di tipo ricorsivo, si nota una caratteristica costante nei tre problemi, ovvero la quasi assenza dell'esempio per rispondere al quesito di generalizzazione. Si potrebbe quindi pensare che questo tipo di strategia risolutiva spinga verso una descrizione a parole dell'algoritmo utilizzato. Effettivamente, se si guarda solo al problema delle griglie quadrate o delle macchinine, la maggior parte degli studenti che utilizzano una strategia ricorsiva (16 su 17 per le griglie quadrate e 40 su 48 per le macchinine) forniscono una descrizione generale, sia essa completa o meno, dell'algoritmo. Non accade lo stesso nel problema degli stuzzicadenti in cui circa la meta degli studenti che utilizzano una strategia ricorsiva (14 su 27, ovvero 7 coppie su 13) non risponde al quesito di generalizzazione (Tabella 4.46). La causa di ciò potrebbe essere dovuta a qualche caratteristica che differenzia il secondo problema dagli altri due. In realtà la strategia ricorsiva che permette di risolvere il problema degli stuzzicadenti è la stessa del problema delle macchinine poiché la successione corrispondente è aritmetica quindi entrambe le funzioni sono del tipo $a_n = a_{n-1} + k$. È possibile che la spiegazione all'alto numero di studenti

Tabella 4.46: Confronto fra la strategia utilizzata per rispondere al secondo quesito aritmetico e la modalità di spiegazione nel quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla strategia. Dati relativi al problema degli stuzzicadenti.

| **Strategia** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole completa | formula | a parole incompleta | |
| non risponde | 19 | | | | 2 | 21 |
| disegno | 2 | | 2 | | 2 | 6 |
| ricorsiva | 14 | | 2 | | 11 | 27 |
| diretta | 2 | 2 | 22 | 10 | 10 | 46 |
| linearità | 2 | | | | | 2 |
| **Totale** | **39** | **2** | **26** | **10** | **25** | **102** |



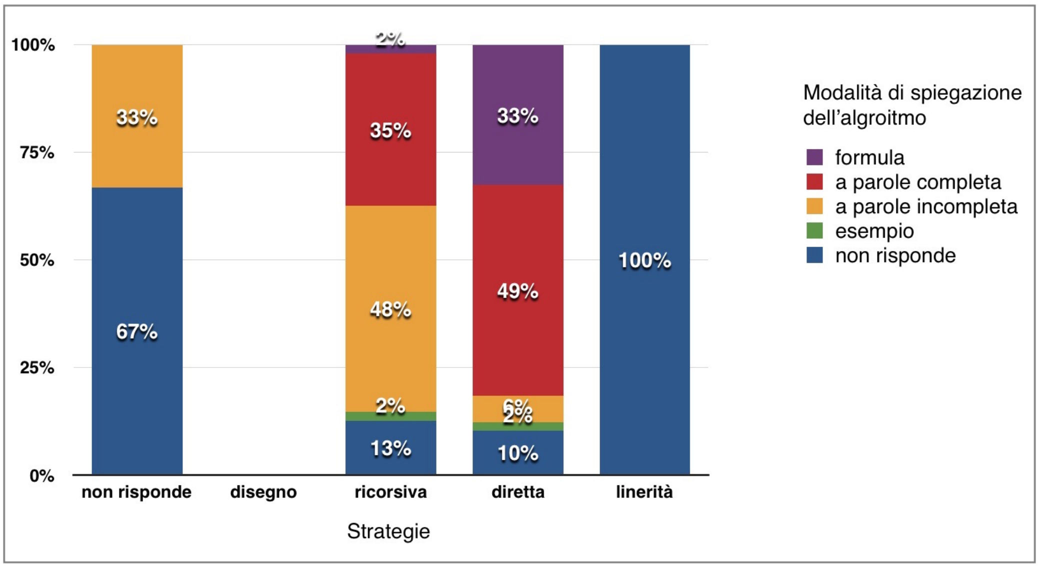
che non rispondono sia ancora una volta da ricercarsi non nella struttura del problema ma nel minor tempo che gli studenti avevano a disposizione per risolvere questo problema. È dunque probabile che la causa della mancata risposta sia da attribuire alla mancanza di tempo.

Se quindi si esclude l'"anomalia" del problema degli stuzzicadenti si vede che, fra gli studenti che utilizzano una strategia ricorsiva, nel problema delle griglie quadrate è la modalità di spiegazione a parole completa quella più utilizzata mentre in quello delle macchinine la modalità più utilizzata è quella incompleta. Inoltre solo uno di questi studenti, solo nell'ultimo problema, utilizza una formula.

Questi dati risultano più significativi se si confrontano con ciò che accade

Tabella 4.47: Confronto fra la strategia utilizzata per rispondere al quesito aritmetico e la modalità di spiegazione nel quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre nel grafico le frequenze percentuali rispetto alla strategia. Dati relativi al problema delle macchinine.

| **Strategia** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole completa | formula | a parole incompleta | |
| non risponde | 2 | | | | 1 | 3 |
| disegno | | | | | | 0 |
| ricorsiva | 6 | 1 | 17 | 1 | 23 | 48 |
| diretta | 5 | 1 | 24 | 16 | 3 | 49 |
| linearità | 1 | | | | | 1 |
| **Totale** | **13** | **2** | **41** | **17** | **28** | **101** |



invece con gli studenti che utilizzano una strategia diretta.

Infatti, analizzando le risposte degli studenti che utilizzano una strategia diretta per il quesito aritmetico si osserva che nel problema delle griglie quadrate la modalità di spiegazione più utilizzata è quella a parole incompleta (37%) mentre il resto degli studenti si distribuisce più o meno equamente fra chi non risponde (16%), chi usa un esempio (20%) e chi fornisce una spiegazione a parole completa (24%). Nei successivi due problemi però la modalità di spiegazione più usata da chi applica una strategia diretta è quella a parole completa. Si osserva, inoltre, un aumento degli studenti che forniscono una formula (2% nelle griglie quadrate; 22% negli stuzzicadenti e 33% nelle macchinine) e una diminuzione di quelli che forniscono una descrizione incompleta (rispettivamente 37%, 22% e 6%). L'uso di una strategia diretta è quindi legato ad un miglioramento nei processi di generalizzazione.

Dal punto di vista dei processi di generalizzazione, le modalità di spiegazione generale che indicano la presenza di abilità in questo senso sono, evidentemente, la spiegazione a parole completa e la scrittura di una formula. Se si osserva come sono distribuiti gli studenti che hanno fornito queste due tipologie di spiegazione si vede che, per tutti e tre i problemi, la frequenza più alta corrisponde agli studenti che utilizzano una strategia diretta. In particolare fra gli studenti che forniscono una formula solo 1 dei 17 nel problema delle macchinine aveva utilizzato una strategia ricorsiva, tutti gli altri avevano utilizzato una strategia diretta.

Alla luce di quanto illustrato si può affermare che la risposta alla domanda che ci si era posti riguardo al legame fra le strategie applicate per risolvere i quesiti aritmetici e i processi di generalizzazione, almeno per quanto riguarda il gruppo di studenti coinvolto in questo studio, è che l'utilizzo di una strategia diretta favorisce in generale i processi di generalizzazione e in particolare la scrittura di un'espressione algebrica per descrivere un algoritmo utilizzato.

### 4.2.3 Registri colloquiali e registri evoluti nei quesiti di generalizzazione

In questo paragrafo sarà descritta l'analisi delle risposte fornite dagli studenti relativamente ai quesiti di generalizzazione dal punto di vista dei registri utilizzati. Come anticipato nel paragrafo 3.2.4, i testi prodotti da uno stesso studente sono stati analizzati utilizzando gli indicatori riportati nella griglia descritta a pagina 65 e quindi confrontati fra loro per mettere in luce eventuali variazioni nel tipo di registro utilizzato.

Come osservato in fase di descrizione delle peculiarità dei registri colloquiali ed evoluti, non sempre è possibile distinguere quale fra due registri sia più evoluto dell'altro soprattutto perché la caratterizzazione dei due tipi di registri dipende da molti indicatori. Nell'analisi dei testi di uno studente è stata considerata "variazione di registro" anche una variazione che riguardasse una sola delle categorie in cui gli indicatori sono stati suddivisi nella costruzione della griglia.

Il confronto è stato effettuato prendendo in considerazione solo le risposte ai quesiti di generalizzazione del problema delle griglie quadrate e del problema delle macchinine. Il motivo di questa scelta sta nel fatto che il secondo problema, quello degli stuzzicadenti, era stato risolto in coppia quindi il testo prodotto è il risultato della collaborazione di due studenti che in generale non avrebbero prodotto lo stesso testo lavorando individualmente. Per questo motivo non avrebbe senso utilizzare questi testi per trarre conclusioni sull'evoluzione o meno di ciascuno studente dal punto di vista dei registri. Osservazioni su come l'analisi degli elaborati prodotti durante il lavoro in coppia possa portare a considerazioni sull'effetto del lavoro cooperativo nel lavoro individuale sono riportate nel Paragrafo 5.4.2

Questa scelta ha portato ad escludere dall'analisi, oltre agli studenti per cui era disponibile un solo testo, anche quelli per cui fossero disponibili due testi ma dei quali uno riguardava il problema degli stuzzicadenti.

Esclusi quindi questi studenti e quelli che, pur partecipando ad almeno un laboratorio, non hanno mai fornito risposta al quesito di generalizzazione, sono stati analizzati e confrontati i testi di 65 studenti. L'analisi ha portato all'individuazione di 4 gruppi. Il primo è formato da quegli studenti nei cui testi è stato utilizzato sempre un registro colloquiale e il secondo da studenti che invece hanno prodotto testi che presentavano principalmente caratteristiche dei testi evoluti. Gli altri due gruppi comprendono studenti nei cui testi si può individuare una variazione del registro, in qualche componente, da più colloquiale a più evoluto e viceversa. La Tabella 4.48 riporta la numerosità di ciascun gruppo.

Come anticipato nel Paragrafo 3.2.4, si è cercato di mettere in relazione il comportamento degli studenti dal punto di vista dei registri analizzati anche con le atre due variabili di interesse di questo studio, ovvero la strategia utilizzata per rispondere ai quesiti aritmetici e la modalità di spiegazione dell'algoritmo fornita per rispondere al quesito di generalizzazione. Per questo motivo ciascun gruppo è stato analizzato da una parte individuando le

Tabella 4.48: Numerosità dei gruppi risultanti dall'analisi rispetto ai registri utilizzati nei testi prodotti dagli studenti per rispondere al quesito di generalizzazione.

| gruppo | numerosità | % sul totale | % su analizzati |
|---|---|---|---|
| esclusi | 47 | 42% | |
| registri colloquiali | 24 | 21% | 37% |
| registri evoluti | 8 | 7% | 12% |
| da evoluto a colloquiale | 18 | 16% | 28% |
| da colloquiale a evoluto | 15 | 13% | 23% |

strategie e le modalità di spiegazione più (o meno) utilizzate; dall'altra osservando se una qualche evoluzione o regressione, nell'uso delle strategie o delle modalità di spiegazione, caratterizzasse il gruppo. Cosa si intenda in questo contesto per evoluzione (o regressione) per queste due variabili è chiarito dalla Figura 4.16, in cui il verso della freccia è quello che indica l'evoluzione.[39] Anche in questo caso il confronto è stato effettuato tenendo conto solo dei problemi delle griglie quadrate e delle macchinine.

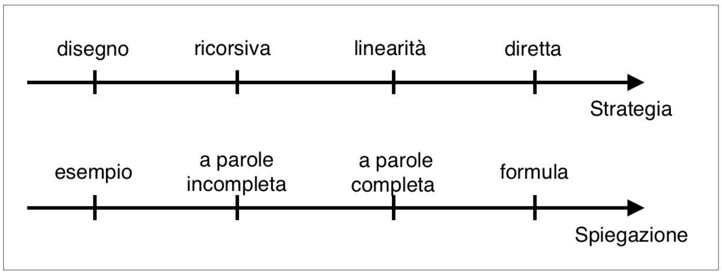



Figura 4.16: I due grafici mostrano cosa si intenda per evoluzione (o regressione) rispettivamente nella strategia utilizzata per rispondere ai quesiti aritmetici e nella modalità di spiegazione fornita per rispondere al quesito di generalizzazione.

### Primo gruppo: registri colloquiali

I testi del primo gruppo di studenti presentano più caratteristiche dei registri colloquiali e, confrontando fra loro i testi di uno stesso studente, si vede che queste caratteristiche vengono mantenute in entrambi i testi. Questo primo gruppo è il più numeroso poiché comprende 24 dei 65 studenti considerati in

[39]L'ordine definito per le strategie è stato determinato sulla base del ruolo che il legame fra la posizione della figura nella sequenza e il valore del corrispondente termine della successione numerica ha nell'applicazione della strategia.

questa parte dell'analisi.

Di seguito vengono riportati i due testi,[40] come si è detto relativi al problema delle griglie quadrate e delle macchinine, di alcuni studenti che fanno parte di questo primo gruppo. Tutti i testi hanno le caratteristiche dei registri colloquiali, in particolare la struttura è composta quasi esclusivamente da principali e il livello di subordinazione è scarso. In questi testi è frequente l'omissione della principale che dovrebbe reggere le altre proposizioni. Inoltre in tutti i testi la descrizione dell'algoritmo è costruita come processo.

> Sì, perché il numero della figura avrà sempre un'unità in più del suo numero [Studente A22; Problema delle griglie quadrate]

> Riuscirei a determinare il numero di macchinine di ogni fila aggiungendo sempre 4 ad ogni fila [Studente A22; Problema delle macchinine]

Nei due testi è sempre presente una forte dipendenza dal contesto. Nel primo testo il termine deittico "suo" non ha un referente all'interno del testo e questo rende difficile la comprensione. Nel secondo testo viene omesso il complemento oggetto di "aggiungendo" come se dovesse già essere chiaro all'interlocutore che ciò che occorre "aggiungere ad ogni fila" siano "macchinine".

Nei due testi che seguono, oltre alle caratteristiche già illustrate, c'è una forte dipendenza dal contesto. In entrambi i testi infatti vengono omesse parti del discorso: nel primo testo manca il soggetto relativo al predicato "si può calcolare"; nel secondo, come per lo studente precedente, non viene chiarito a cosa si debba aggiungere uno. Nel primo testo inoltre non è chiaro a cosa si riferisca il termine "precedente" quindi l'algoritmo risulta poco comprensibile a meno che non si abbiano informazioni relative al contesto che non vengono specificate nel testo.

> Sono d'accordo con Claudio perché aggiungendo 2 alla aggiunta del precedente si può calcolare [Studente I02; Problema delle griglie quadrate]

> Sì perché basta aggiungere 4 ad ogni fila [Studente I02; Problema delle macchinine]

[40] Da qui in avanti alla fine di ogni testo riportato sarà indicato, oltre al problema a cui si riferisce, anche il codice dello studente che lo ha prodotto in modo che sia chiaro quali testi appartengano allo stesso studente. Il codice è composto da una lettera, che rappresenta la classe di appartenenza dello studente, e due cifre.

Anche i testi seguenti sono poco chiari se non si condivide il contesto con lo scrivente. Inoltre, nell'ultimo testo, viene usato il termine generico "fare" e viene utilizzato "la fila" anziché "il numero della fila".

> Io sono d'accordo con Marco perché basta aggiungerne o toglierne [Studente I09; Problema delle griglie quadrate]

> Sì perché bisogna fare la fila delle macchine $\times$ 4 [Studente I09; Problema delle macchinine]

Se si analizzano le strategie utilizzate dagli studenti di questo gruppo si vede che mentre nel primo problema la strategia diretta è quella più usata (10 su 24: 42%); nel problema delle macchinine la più usata è quella ricorsiva (15 su 24: 63%). L'andamento della strategia utilizzata non mostra un comportamento caratterizzante del gruppo visto che gli studenti si distribuiscono sostanzialmente equamente fra chi ha un'evoluzione, chi un regresso, chi continua ad utilizzare una strategia ricorsiva e chi una diretta.

Per quanto riguarda invece la modalità di spiegazione dell'algoritmo si vede che nel primo problema la maggior parte (13 su 24: 54%) fornisce una spiegazione a parole incompleta mentre nel problema delle macchinine il numero degli studenti che forniscono una spiegazione incompleta e quello degli studenti che la forniscono completa sono pressoché uguali. In effetti nel 50% degli studenti di questo gruppo c'è stata un'evoluzione della modalità di spiegazione dell'algoritmo.

### Secondo gruppo: registri evoluti

Gli studenti che hanno sempre prodotto testi con caratteristiche proprie dei registri evoluti sono otto. Di seguito sono riportati i testi di tre studenti di questo gruppo. Tali testi sono costituiti da diversi tipi di subordinate e anche la sintassi è arricchita da diversi tipi di complementi. In alcuni l'algoritmo è descritto come oggetto mediante il linguaggio simbolico.

> Sì, sono d'accordo con Claudio, perché ogni figura aumenta del numero di quadretti di cui era aumentata la seconda +2 quadretti [Studente A11; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, ci riuscirei, perché se usassi il metodo (numero della figura $\times$ 4) + 2 riuscirei a trovare il numero di qualsiasi fila della successione [Studente A11; Problema delle macchinine]

Nel due testi che seguono si vede come la struttura si semplifica ma solamente perché l'algoritmo viene descritto facendo minor uso del linguaggio

Tabella 4.49: Frequenze assolute delle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici dagli studenti del primo gruppo dei registri colloquiali e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Strategia | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| disegno | 4 | 0 |
| ricorsiva | 6 | 15 |
| linearità | 1 | 0 |
| diretta | 10 | 9 |

<table>
<tr><th colspan="4">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="2">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">5</td><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td>ricorsiva<br>5</td><td>diretta<br>5</td></tr>
</table>

Tabella 4.50: Frequenze assolute delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione dagli studenti del primo gruppo dei registri colloquiali e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Spiegazione | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| esempio | 1 | 1 |
| incompleta | 13 | 9 |
| completa | 5 | 7 |
| formula | 0 | 4 |

<table>
<tr><th colspan="5">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="3">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">5</td><td colspan="3">7</td></tr>
<tr><td>incompleta<br>5</td><td>completa<br>2</td><td>formula<br>0</td></tr>
</table>

verbale che lascia il posto a quello simbolico. Non sono però presenti indicatori caratterizzanti i registri colloquiali come l'omissione di parti del discorso o l'utilizzo di termini comuni o vaghi. Quindi anche il secondo testo è stato considerato più vicino ai registri evoluti che a quelli colloquiali.

> Io sono d'accordo con Claudio infatti è possibile determinare il numero di quadretti di ciascuna figura usando la formula "(N°FIGURA + 1)$^2$" [Studente I17; Problema delle griglie quadrate]

> Sì saprei determinare il numero di macchine per ogni fila usando la formula N°FILA $\times$ 4 + 2 [Studente I17; Problema delle macchinine]

Tabella 4.51: Frequenze assolute delle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici dagli studenti del secondo gruppo dei registri evoluti e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Strategia | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| ricorsiva | 2 | 3 |
| diretta | 6 | 5 |

<table>
<tr><th colspan="4">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="2">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>ricorsiva</td><td>diretta</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
</table>

Osservando la Tabella 4.51 si vede che in entrambi i problemi la maggior parte utilizza una strategia diretta. Tutti forniscono sempre una risposta e nessun ha mai usato il disegno. In 4 usano una strategia diretta in entrambi i problemi, gli altri si distribuiscono equamente fra chi usa sempre una strategia ricorsiva e chi invece cambia da diretta a ricorsiva e viceversa.

La modalità di spiegazione più utilizzata è sempre quella a parole completa. Nessuno ha un andamento decrescente rispetto alla modalità di spiegazione: o crescente, o costante sulla formula o costante sulla spiegazione a parole completa.

Tabella 4.52: Frequenze assolute delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione dagli studenti del secondo gruppo dei registri evoluti e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Spiegazione | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| esempio | 1 | 0 |
| incompleta | 2 | 0 |
| completa | 5 | 7 |
| formula | 1 | 2 |

<table>
<tr><th colspan="5">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="3">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">0</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">incompleta</td><td>completa</td><td>formula</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>

### Terzo gruppo: variazione di registro da evoluto a colloquiale

Nei testi di 18 studenti si può invece notare una variazione delle caratteristiche dei registri utilizzati che sono più vicini a quelli evoluti nel primo problema e che invece presentano un maggior numero di indicatori tipici dei registri colloquiali nell'ultimo.

Nei due testi che seguono si vede che, anche se il primo non presenta tutte le caratteristiche di un registro evoluto, è il secondo ad avere la struttura e la sintassi più semplice: viene omessa la principale che dovrebbe reggere l'unica subordinata che compone il testo e non viene specificato cosa sia l'oggetto di "aggiungendo sempre 4".

> Sì, sono d'accordo con Claudio perché i numeri sono infiniti e quindi si possono determinare tutti i numeri [Studente A04; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, aggiungendo sempre 4 in ogni fila [Studente A04; Problema delle macchinine]

Nei primo dei due testi che seguono, lo studente ha utilizzato diversi tipi di subordinate e di complementi che arricchiscono struttura e sintassi anche se vengono utilizzati i termini "uscito" e "trova" in luogo di termini più appropriati. Nel terzo testo la struttura si impoverisce ma soprattutto viene omesso l'oggetto a cui si deve aggiungere "sempre 4" e non viene specificato cosa occorra aggiungere.

> Sono d'accordo con Claudio perché io sostengo si possa determinare ogni dumero di quadretti perché aggiungendo 1 al numero della figura e moltiplichi il numero uscito e ti dà il risultato della successione [Studente A07; Problema delle griglie quadrate]

> Secondo me si può determinare il numero di macchine di qualsiasi fila aggiungendo sempre 4 [Studente A07; Problema delle macchinine]

A differenza del primo, nel secondo dei testi che seguono c'è una forte dipendenza dal contesto: si fa riferimento ad uno schema di cui non viene spiegato il funzionamento, quindi solo condividendo il contesto situazionale è possibile comprendere la risposta.

> Sì, io sono d'accordo con Claudio perché se si moltiplicano i lati a due a due delle figure della successione si ottiene il numero esatto dei quadratini in ogni figura [Studente A09; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, sarei in grado di sapere il numero di macchine usando lo schema [Studente A09; Problema delle macchinine]

Nei due testi che seguono si può parlare di variazione da registro evoluto a colloquiale soprattutto per quanto riguarda la struttura. Infatti nel secondo testo le proposizioni sono tutte principali o subordinate legate con "e poi".

> Secondo me Claudio ha ragione perché se gli chiedo di dirmi quanti quadretti ha la figura 15 basta fare 15×15 che sono i quadretti della base e di un lato perché la figura è un quadrato [Studente I07; Problema delle griglie quadrate]

> Sì perché basta togliere le prime due file e poi moltiplicarlo per 4 e poi aggiungere 16 che sarà sempre il numero delle prime due file. [Studente I07; Problema delle macchinine]

Come mostrato dagli esempi, la variazione nelle caratteristiche dei registri riguarda sempre la struttura.

Nel primo esempio (Studente A04) si vede che l'impoverimento nella struttura e nella sintassi è accompagnato da un cambiamento della strategia utilizzata per rispondere: nel primo testo è infatti chiaro che si sta descrivendo una strategia di tipo diretto, mentre nel secondo l'algoritmo descritto è di tipo ricorsivo. Succede lo stesso anche per il secondo studente (Studente A07): pur non essendo chiaro nel testo, la strategia utilizzata nel primo problema è di tipo diretto, mentre quella utilizzata per rispondere al quesito numerico

Tabella 4.53: Frequenze assolute delle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici dagli studenti del terzo gruppo in cui si è avuto un regresso nei registri utilizzati e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Strategia | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| ricorsiva | 5 | 9 |
| diretta | 12 | 9 |

<table>
<tr><th colspan="4">Andamento</th></tr>
<tr><td>crescente</td><td>decrescente</td><td colspan="2">costante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">5</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td>ricorsiva<br>3</td><td>diretta<br>7</td></tr>
</table>

Tabella 4.54: Frequenze assolute delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione dagli studenti del terzo gruppo per cui c'è stata una regressioni nei registri utilizzati e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Spiegazione | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| esempio | 4 | 1 |
| incompleta | 6 | 6 |
| completa | 7 | 5 |
| formula | 0 | 4 |

<table>
<tr><th colspan="5">Andamento</th></tr>
<tr><td>crescente</td><td>decrescente</td><td colspan="3">costante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">4</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>esempio<br>1</td><td>incompleta<br>2</td><td>completa<br>2</td></tr>
</table>

del problema delle macchinine è ricorsiva.

Il comportamento di questo gruppo di studenti rispetto alle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici mostra che mentre nel primo problema la maggior parte (12 su 18: 67%) usa una strategia diretta, nel problema della macchinine gli studenti si dividono a metà fra la strategia diretta e quella ricorsiva. Solo per 3 studenti si è avuta un'evoluzione della strategia mentre per 5 un regresso. Fra quelli che rimangono costanti (9) solo 3 hanno usato strategie ricorsive.

Per quanto riguarda le modalità di spiegazione dell'algoritmo, mentre nel primo problema gli studenti si distribuiscono sostanzialmente equamente fra esempio, incompleta e completa, in quello delle macchinine si distribuiscono fra la spiegazione a parole completa e incompleta e la formula. Infatti dal punto di vista delle modalità di spiegazione 9 su 18, quindi la metà degli studenti di questo gruppo, hanno avuto un'evoluzione.

### Quarto gruppo: variazione di registro da colloquiale a evoluto

L'ultimo gruppo è quello in cui si può osservare una variazione del registro utilizzato che passa dall'essere più colloquiale all'essere più vicino ad un registro evoluto.

In alcuni casi questa variazione riguarda pressoché tutte le categorie analizzate.

> No perché cresce di due in due ogni figura [Studente A08; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, basta moltiplicare il numero della figura per 4 visto che si aumenta di 4 ogni figura. Ma siccome la prima ne ha 6 e non 4, si aggiunge sempre 2 in tutti i numeri. FORMULA N° × 4 + 2 LA N° È IL NUMERO A CASO DELLA FIGURA [Studente A08; Problema delle macchinine]

Nei testi sopra riportati sia la struttura che la sintassi si arricchiscono passando dal primo al terzo problema. Nell'ultimo testo non ci sono omissioni di parti del discorso che invece si osservano nel primo testo. Inoltre, nel problema delle macchinine l'algoritmo diventa una "formula" e viene descritto anche mediante il linguaggio simbolico.

Nei due testi che seguono, la variazione verso i registri evoluti non riguarda la struttura o la sintassi, per le quali si potrebbe forse notare un impoverimento, bensì il passaggio da una forma congruente a una metaforica nella descrizione del processo.

> Sì. Perché se una figura ha tot di quadretti verticali e tot orizzontali basta moltiplicare i numeri (che devono essere uguali) e scopri quanti sono i quadretti [Studente G13; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, facendo il numero della fila per 4 (numero di macchine che si aggiungono) più 2 [Studente G13; Problema delle macchinine]

Mentre nel primo testo vengono utilizzati verbi quali "moltiplicare" e "scopri" che evidenziano la natura dell'algoritmo come processo, nel secondo la descrizione, pur in linguaggio verbale, ha la struttura di una formula e non ci sono verbi che descrivano le operazioni che invece sono indicate con le parole "per" e "più".

Anche nel secondo dei testi che seguono si vede come il linguaggio verbale abbia esclusivamente il ruolo di parafrasare ciò che viene precedentemente descritto utilizzando il linguaggio simbolico

> Sì, ad ogni figura si aggiunge 1 quadretto [Studente G01, Problema delle griglie quadrate]

> Certo. Formula (n.fila $\times$ 4) + 2 Si moltiplica il numero della fila $\times$ 4 e poi si aggiunge 2 [Studente G01; Problema delle macchinine]

Anche se presenta ancora alcune caratteristiche dei registri colloquiali si può notare come nel secondo dei due testi che seguono la struttura e anche la sintassi si arricchiscono per l'utilizzo di subordinate e complementi di diverso tipo.

> Sì sono d'accordo perché bisogna sempre aggiungere [Studente E16; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, penso che saprei determinare il numero delle macchine in ogni fila seguendo il metodo di aggiungere sempre 4 [Studente E16; Problema delle macchinine]

Nella Tabella 4.55 si vede che in entrambi i problemi la maggioranza degli studenti (rispettivamente il 60% e il 73%) usa una strategia diretta. Inoltre la maggior parte (9) usa la stessa strategia in entrambi i problemi (7 diretta; 2 ricorsiva).

Per quanto riguarda la modalità di spiegazione dell'algoritmo in entrambi i problemi quella completa a parole è fornita da 7 studenti su 15 ma mentre nel primo problema gli altri studenti si distribuiscono fra chi fornisce una spiegazione incompleta, chi un esempio e chi non risponde, in quello delle

Tabella 4.55: Frequenze assolute delle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici dagli studenti del quarto gruppo di studenti per cui c'è stata un'evoluzione del registro utilizzato e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Strategia | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| disegno | 1 | 0 |
| ricorsiva | 3 | 4 |
| diretta | 9 | 11 |

<table>
<tr><th colspan="4">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="2">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td>ricorsiva</td><td>diretta</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td></tr>
</table>

Tabella 4.56: Frequenze assolute delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione dagli studenti del quarto gruppo per cui c'è stata un'evoluzione nei registri utilizzati e relativo andamento valutato secondo l'ordinamento mostrato in Figura 4.16.

| Spiegazione | Problema delle griglie quadrate | Problema delle macchinine |
|---|---|---|
| esempio | 3 | 0 |
| incompleta | 2 | 1 |
| completa | 7 | 7 |
| formula | 0 | 6 |

<table>
<tr><th colspan="5">Andamento</th></tr>
<tr><th>crescente</th><th>decrescente</th><th colspan="3">costante</th></tr>
<tr><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">1</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>incompleta</td><td>completa</td><td>formula</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr>
</table>

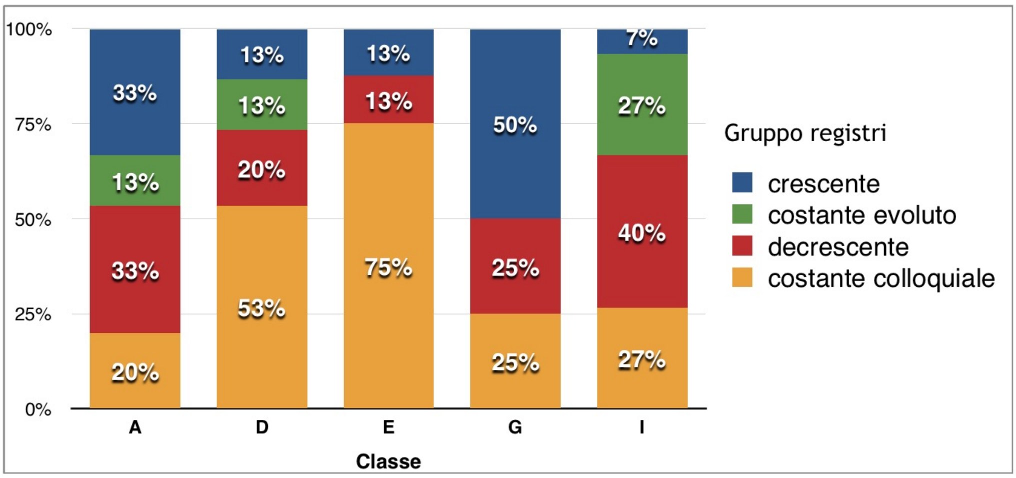
macchinine 6 studenti usano una formula. Infatti 10 (67%) studenti hanno un andamento crescente per quanto riguarda la spiegazione generale; degli altri, 4 utilizzano in entrambi i problemi una spiegazione a parole completa e solo 1 ha un andamento decrescente dal punto di vista delle modalità di generalizzazione.

### Ripartizione dei gruppi per classe

Prima di procedere al confronto dei quattro gruppi dal punto di vista delle altre due principali variabili di interesse di questo studio, ovvero le modalità di spiegazione dell'algoritmo e le strategie utilizzate per determinare la risposta dei quesiti aritmetici, è interessante mostrare come l'appartenenza ad una determinate classe abbia un ruolo nel comportamento degli studenti dal punto di vista dei registri. Questa affermazione nasce dal constatare che la distribuzione degli studenti appartenenti ai quattro gruppi sia molto diversa nelle cinque classi considerate.

Tabella 4.57: Ripartizione degli studenti dei quattro gruppi secondo la classe di appartenenza. In tabella sono riportate le frequenze assolute e nel grafico le frequenze percentuali rispetto al numero di studenti della classe considerati nell'analisi dei registri.

| | Classe | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Andamento registri | A | D | E | G | I |
| costante colloquiale | 3 | 8 | 6 | 3 | 4 |
| decrescente | 5 | 3 | 1 | 3 | 6 |
| costante evoluto | 2 | 2 | 0 | 0 | 4 |
| crescente | 5 | 2 | 1 | 6 | 1 |
| Totale | 15 | 15 | 8 | 12 | 15 |



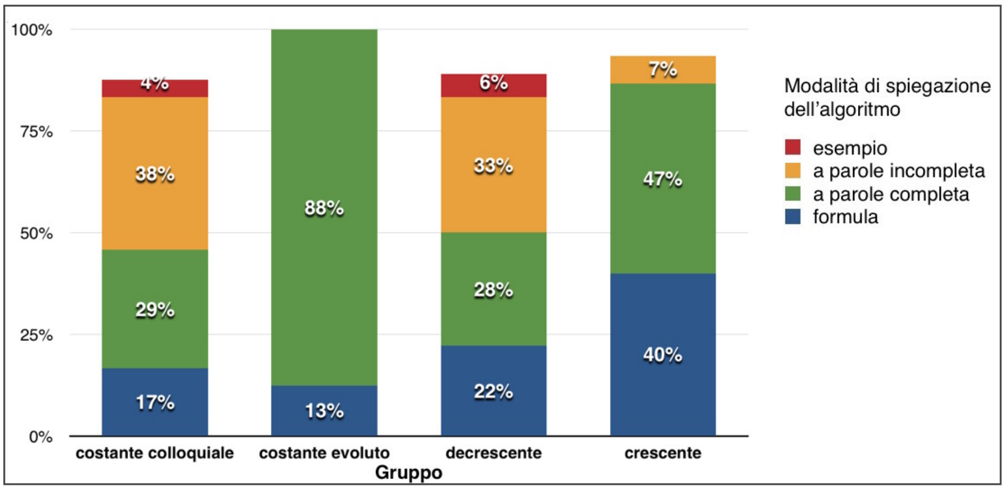
Il grafico in Tabella 4.57 mostra ad esempio che nella prima E la maggior parte degli studenti fanno parte del gruppo che, in entrambi i problemi considerati, ha utilizzato registri colloquiali. Nella prima G invece la metà degli studenti fa parte del gruppo che ha una variazione crescente dal punto di vista dei registri: nelle altre quattro classi questa percentuale è molto più bassa. Inoltre in queste due classi, G ed E, neanche uno degli studenti considerati nello studio fa parte del gruppo che produce, per entrambi i problemi, testi con caratteristiche più vicine ai registri evoluti. È quindi evidente che le cinque classi sono molto diverse dal punto di vista dell'utilizzo dei registri evoluti e colloquiali.

### Confronto dei gruppi rispetto alla modalità di spiegazione dell'algoritmo

Come anticipato nel Paragrafo 3.2.4 uno degli obiettivi di questo studio è quello di stabilire se esista una relazione fra i processi di generalizzazione, al centro della definizione di pensiero algebrico, e la tipologia di registro utilizzata dagli studenti nei testi analizzati. Poiché in questo studio i processi di generalizzazione sono caratterizzati sulla base della modalità di spiegazione dell'algoritmo fornita, in questo paragrafo viene illustrato il confronto dei 4 gruppi scaturiti dall'analisi dei registri rispetto a tale variabile. In particolare le tabelle che seguono caratterizzano i gruppi in base alle modalità di spiegazione utilizzate nell'ultimo problema e all'andamento delle modalità di spiegazione determinato, così come per le variazioni dei registri, confrontando il primo e il terzo problema. L'andamento, crescente o decrescente, delle modalità di spiegazione fornite per rispondere ai quesiti di generalizzazione sarà determinato sulla base dello schema riportato in Figura 4.16. La scelta di confrontare i gruppi dal punto di vista della variazione nella modalità di spiegazione è giustificata dal fatto che, poiché i gruppi sono stati formati sulla base del confronto dei registri utilizzati da uno stesso studente nei due problemi, si vuole stabilire se un determinato andamento rispetto alla tipologia di registro utilizzato è legato ad un particolare andamento nella modalità di spiegazione fornita nei quesiti di generalizzazione. Nelle tabelle che seguono l'andamento rispetto al registro è indicato con *costante colloquiale* per il primo gruppo in cui gli studenti utilizzano un registro colloquiale in entrambi i problemi considerati; *costante evoluto* per il secondo gruppo di studenti per cui entrambi i testi hanno caratteristiche dei registri evoluti; *decrescente* per il terzo gruppo in cui il secondo testo presenta più indicatori dei registri colloquiali rispetto al primo e *crescente* per il quarto gruppo in cui c'è stata un'evoluzione del registro nel secondo testo per qualche categoria di indicatori.

Tabella 4.58: Distribuzione delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere al quesito di generalizzazione del problema delle macchinine per ogni gruppo scaturito dall'analisi dei registri. La tabella mostra le frequenze assolute mentre nel grafico sono riportate le frequenze percentuali rispetto alla numerosità di ciascun gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Modalità di spiegazione ultimo problema | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| formula | 4 | 1 | 4 | 6 |
| completa | 7 | 7 | 5 | 7 |
| incompleta | 9 | 0 | 6 | 1 |
| esempio | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Totale | 24 | 8 | 18 | 15 |




Il grafico della Tabella 4.58[41] mostra chiaramente che la percentuale più alta di coloro che utilizzano il linguaggio simbolico per rispondere al quesito di generalizzazione dell'ultimo problema somministrato si trova nel gruppo degli studenti per cui c'è stata un'evoluzione del registro utilizzato mentre la percentuale più alta di chi fornisce una spiegazione a parole completa è nel gruppo degli studenti che hanno utilizzato un registro evoluto sin dal primo problema delle griglie quadrate. Le modalità di spiegazione che sono indice

[41]Nella tabella e nel rispettivo grafico non sono riportate le frequenze degli studenti che, nell'ultimo problema, non hanno fornito la spiegazione dell'algoritmo. Le percentuali sono comunque calcolate rispetto al numero totale degli studenti appartenenti al gruppo, riportato nell'ultima riga della tabella.

di processi di generalizzazione più deboli hanno le percentuali più alte negli altri due gruppi: la percentuale più alta di coloro che utilizzano un esempio ancora nell'ultimo problema si trova nel gruppo di chi ha avuto un regresso nei registri utilizzati mentre nel gruppo di chi ha utilizzato sempre un registro colloquiale si registra la percentuale più alta di coloro che forniscono una spiegazione a parole incompleta. Se si raggruppano le modalità di spiegazione mettendo insieme quelle che sono indice di processi di generalizzazione deboli, ovvero l'esempio e la spiegazione a parole incompleta, e quelli che sono indice di processi di generalizzazione più forti, ovvero l'utilizzo della formula e della spiegazione a parole completa, si vede che (Figura 4.17) i gruppi con la percentuale più alta del primo tipo di modalità di spiegazione e più bassa del secondo tipo sono quello per cui c'è stata un'evoluzione dei registri e quello degli studenti che hanno prodotto in entrambi i problemi testi con caratteristiche dei registri evoluti. Gli altri due gruppi si comportano in maniera simile anche se quello degli studenti che hanno utilizzato in entrambi i testi un registro colloquiale ha un risultato leggermente peggiore rispetto a quello degli studenti per cui c'è stato un regresso nell'uso dei registri. Tuttavia anche in questi due gruppi il numero degli studenti che forniscono una formula o una spiegazione a parole completa è maggiore del numero di chi utilizza le altre due modalità di spiegazione dell'algoritmo.

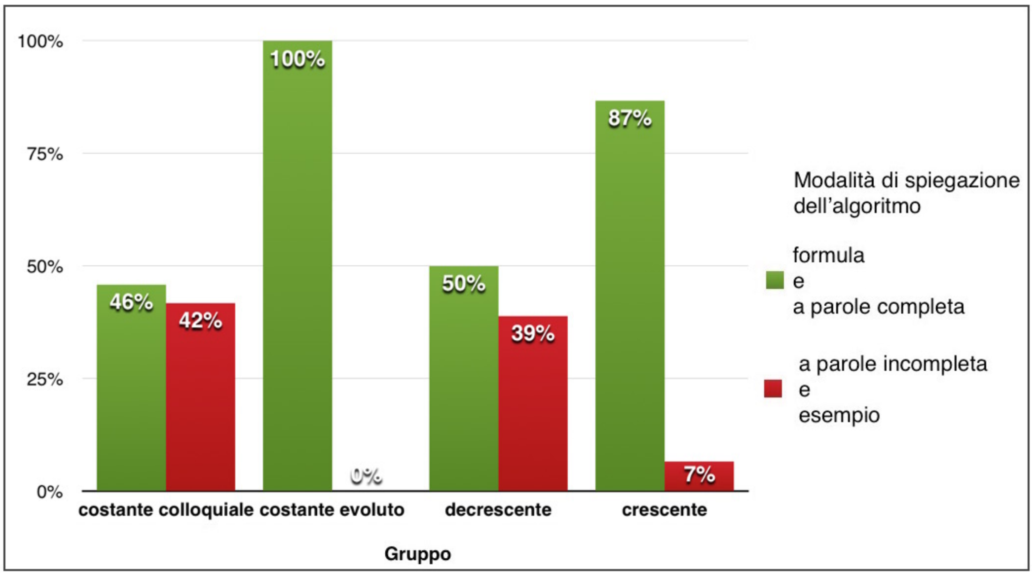



Figura 4.17: Modalità di spiegazione utilizzate da ciascun gruppo per rispondere al quesito di generalizzazione del problema delle macchinine, raggruppate in modalità che indicano processi di generalizzazione buoni (formula e a parole completa) e modalità che indicano processi di generalizzazione deboli (esempio e a parole incompleta).

Quindi alla fine del percorso i gruppi per i quali si hanno risultati migliori dal punto di vista dei processi di generalizzazione sono quello degli studenti che hanno sempre prodotto testi con caratteristiche dei registri evoluti e quello degli studenti per cui c'è stata un'evoluzione, almeno per qualche categoria di indicatori, nei registri utilizzati.

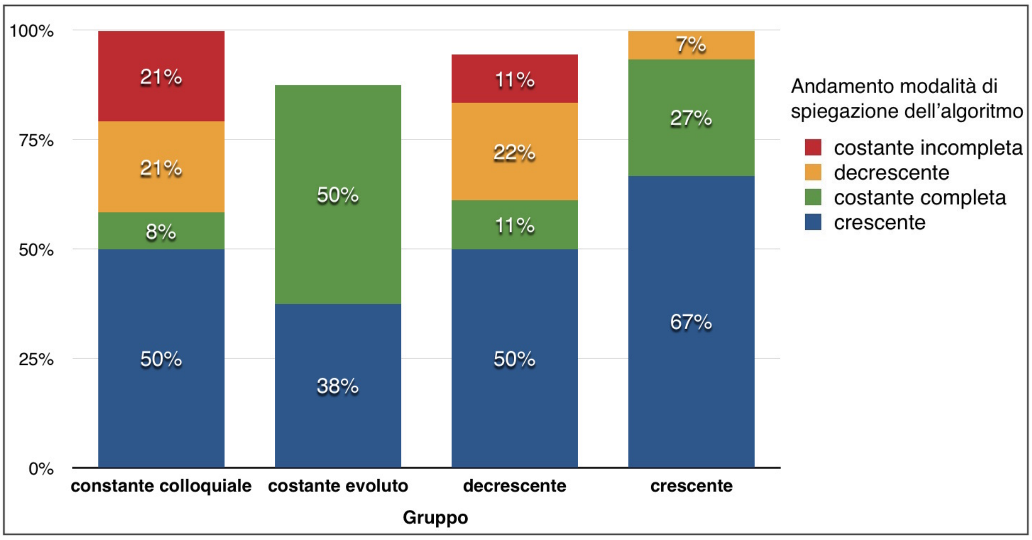
Come anticipato all'inizio di questo paragrafo, il confronto fra i registri utilizzati e i processi di generalizzazione è completato verificando se il comportamento rispetto ai registri ha una qualche relazione con l'andamento delle modalità di spiegazione utilizzate nel primo e nel terzo dei problemi somministrati. Di seguito sarà indicata come *crescente* una variazione nelle modalità di spiegazione che segua il verso della freccia nel relativo schema in Figura 4.16 e come *decrescente* una variazione nel verso opposto. Saranno indicati invece con *costante completa* gli studenti che, sia nel primo che nel terzo problema hanno fornito una spiegazione a parole completa e con *costante incompleta* quelli che invece in entrambi i problemi hanno fornito una spiegazione a parole incompleta. Nella prima parte dell'analisi non sono riportati l'unico studente del gruppo *costante evoluto* che ha fornito una formula in entrambi i problemi (nel seguito indicato con *costante fornula*) e l'unico studente del gruppo *decrescente* che ha fornito sempre un esempio (nel seguito indicato con *costante esempio*).

Utilizzando questa classificazione è stata costruita la Tabella 4.59 il cui grafico mostra che il gruppo con la più alta percentuale di studenti con andamento crescente nelle modalità di spiegazione, che presenta anche una bassa percentuale di studenti con andamento decrescente, è quello degli studenti che hanno avuto un andamento crescente anche per quanto riguarda i registri. Quindi l'evoluzione dei registri è accompagnata in generale anche da un evoluzione nei processi di generalizzazione.

Anche in questo caso le quattro tipologie di andamento definite possono essere raggruppate secondo quelli che, in questo contesto, possono essere considerati andamenti *positivi*, ovvero crescente, costante completa e costante formula, e *negativi*, ovvero decrescente, costante incompleta e costante esempio. Questa suddivisione, il cui risultato è schematizzato in Figura 4.18, porta a conclusioni analoghe a quelle relative alla modalità di spiegazione utilizzata nell'ultimo problema (Figura 4.17), infatti i gruppi per cui si hanno i risultati migliori dal punto di vista dell'evoluzione dei processi di generalizzazione sono quello degli studenti che producono sempre testi con caratteristiche dei registri evoluti e quello per cui si è avuto un'evoluzione dei registri utilizzati. Il gruppo con la percentuale più bassa di andamenti positivi e più alta di andamenti negativi è quello degli studenti che utilizzano un registro collo-

Tabella 4.59: Andamento delle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione per ogni gruppo scaturito dall'analisi dei registri. La tabella mostra le frequenze assolute mentre nel grafico sono riportate le frequenze percentuali rispetto alla numerosità di ciascun gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Andamento modalità di spiegazione | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| crescente | 12 | 4 | 10 | 9 |
| costante completa | 2 | 4 | 2 | 4 |
| decrescente | 5 | 0 | 4 | 1 |
| costante incompleta | 5 | 0 | 1 | 0 |




quiale sia per il primo che per il terzo problema somministrato. Anche nei gruppi in cui si sono registrati i risultati peggiori comunque il numero degli studenti che hanno un andamento positivo è maggiore di quello degli studenti che hanno avuto un andamento negativo, dal punto di vista delle modalità di spiegazione dell'algoritmo.

In conclusione è possibile quindi affermare che risultati positivi nell'utilizzo dei registri evoluti sono accompagnati, tranne per pochissimi studenti, da risultati positivi anche dal punto di vista dei processi di generalizzazione.

Non vale però il viceversa ovvero non accade che un andamento positivo nelle modalità di spiegazione sia proprio solamente dei gruppi che hanno un andamento positivo dal punto di vista dei registri. Come anticipato, anche se con percentuali minori, anche nei gruppi degli studenti che usano i registri

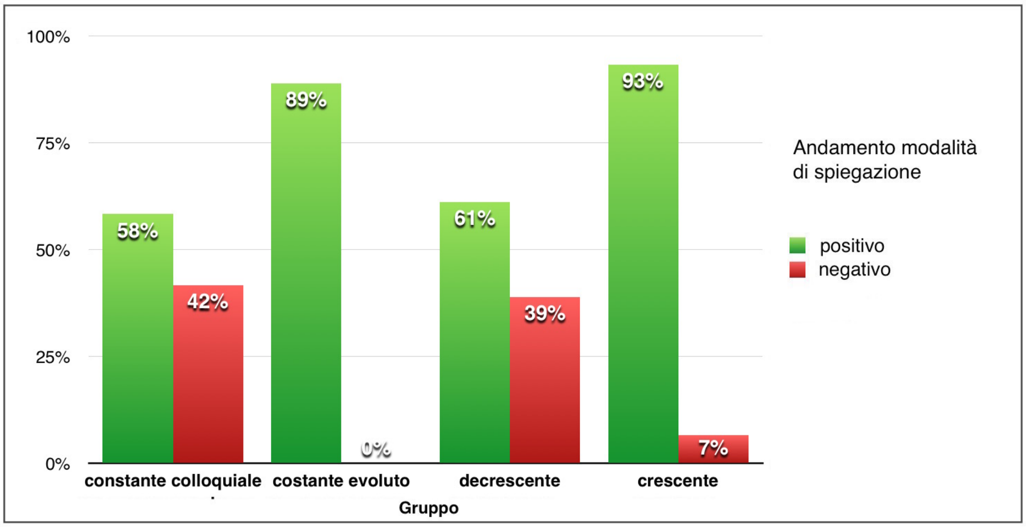



Figura 4.18: Andamento della modalità di spiegazione per ciascun gruppo, raggruppate in andamenti positivi (crescente e costante completa) e andamenti negativi (decrescente e costante incompleta).

colloquiali o per i quali c'è stato un regresso nell'uso dei registri, il numero di chi ha risultati positivi nella spiegazione dell'algoritmo dell'ultimo problema (Figura 4.17) e nell'andamento della modalità di spiegazione generale (Figura 4.18) è comunque maggiore di quello di chi ha risultati negativi. Questo fatto potrebbe sembrare una contraddizione se si considera che, in generale, i registri evoluti sono accompagnati da una maggiore chiarezza e completezza del messaggio. A cosa è dovuta quindi questa "incongruenza"? Perché la maggior parte degli studenti che utilizzano registri più colloquiali non è debole anche dal punto di vista delle modalità di spiegazione dell'algoritmo e quindi dei processi di generalizzazione? Questa discrepanza fra la tipologia di registro e le abilità legate ai processi di generalizzazione è dovuta al fatto che studenti che sono in grado di descrivere correttamente in modo completo un algoritmo generale eventualmente anche mediante il linguaggio simbolico o che comunque hanno avuto un miglioramento dal punto di vista dei processi di generalizzazione (in questo caso misurato con un andamento crescente nelle modalità di spiegazione dell'algoritmo) non hanno necessariamente raggiunto anche un livello nella composizione di un testo che permette loro di produrre un messaggio con le caratteristiche dei registri evoluti.

I due testi che seguono, ad esempio, sono prodotti da uno studente che fa parte del gruppo di coloro che utilizzano anche nell'ultimo problema un registro colloquiale.

> No perché i numeri sono infiniti [Studente A19; Problema delle griglie quadrate]

> Sì perché basta che aggiungo sempre 4 [Studente A19; Problema delle macchinine]

Entrambi i testi hanno le caratteristiche dei registri colloquiali: struttura semplice, sintassi povera, manca la principale che regge l'unica subordinata e nel secondo viene omesso il complemento di termine. Nonostante ciò c'è stato un miglioramento dal punto di vista dei processi di generalizzazione: mentre nel primo testo non viene descritto nessun algoritmo, in quello relativo al problema delle macchinine viene descritto seppur in modo incompleto, un algoritmo ricorsivo generale.

Sempre dello stesso gruppo fa parte lo studente che ha prodotto i due testi seguenti di cui il secondo è una descrizione completa dell'algoritmo utilizzato per rispondere ai quesiti numerici del problema delle macchinine, in cui viene utilizzato ancora un registro colloquiale.

> Sì perché sia le figure pari che dispari possono avere una successione, ogni figura deve iniziare da almeno un quadretto perché la figura può essere formata anche da triangolini [Studente I08; Problema delle griglie quadrate]

> Per calcolare il numero di macchine in ogni fila bisogna togliere 2 al numero iniziale e moltiplicare per 4 il numero della fila [Studente I08; Problema delle macchinine]

Anche i due testi che seguono sono prodotti entrambi utilizzando registri colloquiali. Il livello di subordinazione è basso, ad esempio nel primo le due subordinate sono legate con "e poi", e in entrambi i testi vengono utilizzati i verbi generici "si fa" e "fare". Nonostante ciò, mentre nel primo testo l'algoritmo non è descritto in modo completo poiché non si chiarisce come determinare "di quanti quadretti è composto un lato", nel secondo l'intero algoritmo viene descritto correttamente anche mediante il linguaggio simbolico.

> Secondo me è possibile perché basta sapere di quanti quadretti è composto un lato e poi si fa il numero dei quadretti di un lato per il numero dei quadretti dell'altro lato [Studente G12; Problema delle griglie quadrate]

> Si può determinare il numero di macchine di qualsiasi fila perché basta fare il numero della figura $\times 4+2$ $\quad f \times 4+2$ [Studente G12; Problema delle macchinine]

Nei due testi seguenti il passaggio da una descrizione a parole al linguaggio simbolico non è accompagnato da un evoluzione del registro utilizzato nei testi che presentano entrambi caratteristiche dei registri colloquiali.

> Sì, è possibile, come nella risposta precedente, basta prendere il numero ed elevarlo 2 [Studente I18; Problema delle griglie quadrate]

> Sì, cioè (n° fila -1) $\times$ 4 + 6 = formula [Studente I18; Problema delle macchinine]

Gli esempi che seguono riguardano invece studenti che fanno parte del gruppo di chi ha avuto un andamento decrescente nell'utilizzo dei registri.

> Si ma solo se si calcola il numero di quadretti della base per il numero dei quadretti di un lato [Studente D18; Problema delle griglie quadrate]

> Sì aggiungendo 4 macchine ogni fila nuova [Studente D18; Problema delle macchinine]

Il primo dei due testi riportati sopra è composto da un periodo ipotetico e vengono aggiunti dettagli alla spiegazione mediante l'uso di complementi di specificazione quindi risulta avere più caratteristiche dei registri evoluti rispetto al secondo composto da un'unica proposizione in cui viene inoltre utilizzato il termine comune "nuova" anziché quello più appropriato "successiva". Questo regresso nella tipologia dei registri è però accompagnato da un miglioramento dal punto di vista della modalità di spiegazione utilizzata: mentre nel primo testo viene fornita una spiegazione incompleta che non chiarisce come determinare "il numero di quadretti della base", nel secondo l'algoritmo viene spiegato chiaramente.

Un esempio analogo è fornito dai due testi che seguono. Il primo testo ha una struttura più ricca del secondo poiché vengono utilizzati diversi tipi di proposizioni con un discreto livello di subordinazione mentre nel secondo le proposizioni appartengono tutte a periodi diversi e sono o principali o coordinate rette da "quindi". Nonostante ciò si ha un andamento crescente dal punto di vista delle modalità di spiegazione dell'algoritmo descritto prima con una spiegazione a parole completa e successivamente anche mediante il linguaggio simbolico.

> Sì, perché secondo la mia teoria bisogna moltiplicare i quadretti di due lati della figura in modo da ottenere il numero di quadretti che essa contiene. Per sapere il numero di quadretti che ha ogni lato bisogna aggiungere uno al numero della figura. [Studente G03; Problema delle griglie quadrate]

> Deve togliere 1 al numero della fila e poi moltiplicarlo per 4. Poi deve aggiungere 6. Quindi si può dire che: (NF - 1) x 4 + 6. Oppure moltiplica il numero fig per 4 e poi si aggiunge 2. Quindi si può dire che Nfx4+2 [Studente G03; Problema delle macchinine]

Anche nei due testi che seguono un impoverimento della struttura è accompagnato invece dal passaggio da una spiegazione a parole completa all'utilizzo del linguaggio simbolico.

> Claudio ha ragione in questo caso, perché se si guardano le prime figure si nota che il numero delle figure è sempre una cifra inferiore al numero di quadrati nella base (es FIGURA 3 BASE 4), ma visto che la successione viene raffigurata nella forma di un quadrato basta adottare la formula di calcolo per l'area del quadrato che ci darà sempre il numero di quadrati. [Studente I11; Problema delle griglie quadrate]

> Sì usando la formula cioè (N°F - 1) x4+6 [Studente I11; Problema delle macchinine]

Ciò che accade quindi nei gruppi degli studenti *costanti colloquiali* e *decrescenti* porta ad affermare che non ci sia una dipendenza fra la tipologia di registri utilizzata, o una relativa evoluzione, e le abilità nei processi di generalizzazione. Infatti se è vero che studenti che utilizzano un registro evoluto, o che comunque hanno una crescita nella tipologia di registro utilizzata, hanno risultati positivi, o mostrano un miglioramento, dal punto di vista dei processi di generalizzazione, è anche vero che molti degli studenti che hanno risultati positivi dal punto di vista delle modalità di spiegazione dell'algoritmo, e quindi dei processi di generalizzazione, si trovano o nel gruppo degli studenti che producono sempre testi con caratteristiche dei registri colloquiali o nel gruppo di quelli che mostrano un andamento decrescente da questo punto di vista.

Questo porta ad affermare che le abilità legate ai processi di generalizzazione, ovvero di descrivere in termini generali un algoritmo di calcolo, possono essere sviluppate a prescindere dal fatto che si sia in grado di costruire la descrizione utilizzando un registro evoluto, come dimostrano gli studenti del gruppo *costante colloquiale.*

D'altra parte, per quanto riguarda ciò che accade agli studenti che, pur avendo risultati positivi nelle modalità di spiegazione dell'algoritmo, si trovano nel gruppo *decrescente*, non è da escludere che l'impoverimento nella struttura e nella sintassi sia dovuto, in qualche caso, solamente alla volontà di essere sintetici o al non sentire la necessità di spiegare con molte parole ciò che viene espresso fornendo una formula.

Fra le ipotesi scaturite nella descrizione del quadro teorico e riportate, insieme alle altre, a pagina 69, quella riguardante la relazione fra i processi di generalizzazione e la tipologia di registri affermava che

vi) la capacità di scrivere autonomamente l'espressione algebrica corrispondente ad un algoritmo di calcolo è legata alla capacità di descrivere con chiarezza mediante il linguaggio verbale l'algoritmo stesso e quindi alla padronanza dei registri evoluti.

Alla luce di quanto ottenuto dall'analisi illustrata in questi ultimi paragrafi è evidente che questa ipotesi è stata parzialmente confutata da questo studio visto che la capacità di descrivere chiaramente un algoritmo di calcolo a parole e di costruire autonomamente la formula corrispondente è posseduta anche da quegli studenti che non padroneggiano i registri evoluti e hanno prodotto sempre testi con caratteristiche dei registri colloquiali.

Resta comunque il fatto che gli studenti che producono testi con le caratteristiche dei registri evoluti, a parte pochi casi, forniscono tutti descrizioni a parole complete a volte accompagnate dal linguaggio simbolico. Quindi lo sviluppo delle abilità linguistiche è accompagnato anche dallo sviluppo di quelle abilità necessarie ai processi di generalizzazione.

Si potrebbe dire che l'ipotesi vi) formulata all'inizio dello studio corrisponda alla doppia implicazione

$$\textit{genesi di processi di generalizzazione} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{padronanza dei registri evoluti}$$

L'analisi dei registri utilizzati dagli studenti di questo studio per rispondere ai quesiti di generalizzazione ha portato alla verifica di un solo verso della freccia ovvero del fatto che la padronanza dei registri evoluti sia condizione sufficiente ma non necessaria alla genesi di processi di generalizzazione.

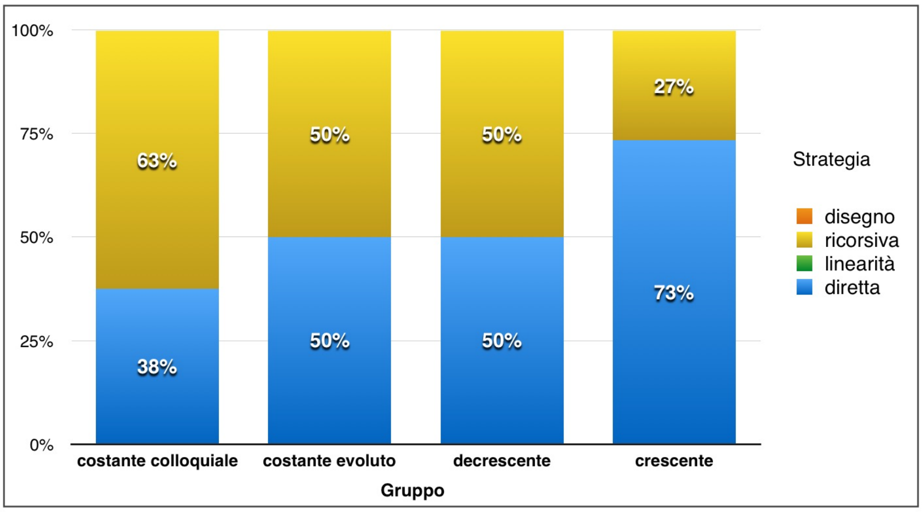
Dunque le caratteristiche linguistiche dei testi, misurate con la griglia scaturita dalla caratterizzazione dei registri colloquiali ed evoluti, non sono legate con una doppia implicazione ai processi di generalizzazione. Questo porta alla formulazione di una nuova ipotesi ovvero che la doppia implicazione potrebbe essere raggiunta modificando la griglia aggiungendo nuovi indicatori e togliendone alcuni, scelti anche in base ai risultati di questo studio, con lo scopo di ottenere uno strumento che misuri le abilità raggiunte nei processi di generalizzazione con abilità legate al linguaggio.

### Distribuzione delle strategie nei diversi gruppi

Nel Paragrafo 3.2.4 si era anticipato che i risultati relativi alle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere al quesito di generalizzazione sarebbero stati messi in relazione da una parte con le strategie utilizzate per rispondere ai quesiti numerici, dall'altra con la tipologia di registri, colloquiali o evoluti, utilizzata nella produzione dei relativi testi. Il paragrafo precedente contiene le conclusioni relative al secondo confronto mentre il primo era stato illustrato alla fine del Paragrafo 4.2.2. In questo paragrafo l'analisi delle tre variabili di interesse sarà completata illustrando la distribuzione delle strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici del problema delle griglie quadrate e delle macchinine nei quattro gruppi scaturiti dall'analisi dei registri utilizzati nelle risposte ai quesiti di generalizzazione.

Tabella 4.60: Frequenze delle strategie applicate per rispondere al quesito aritmetico del problema delle macchinine per ogni gruppo scaturito dall'analisi dei registri. La tabella mostra le frequenze assolute mentre nel grafico sono riportate le frequenze percentuali rispetto alla numerosità di ciascun gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Strategia applicata nell'ultimo problema | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| diretta | 9 | 4 | 9 | 11 |
| ricorsiva | 15 | 4 | 9 | 4 |
| Totale | 24 | 8 | 18 | 15 |

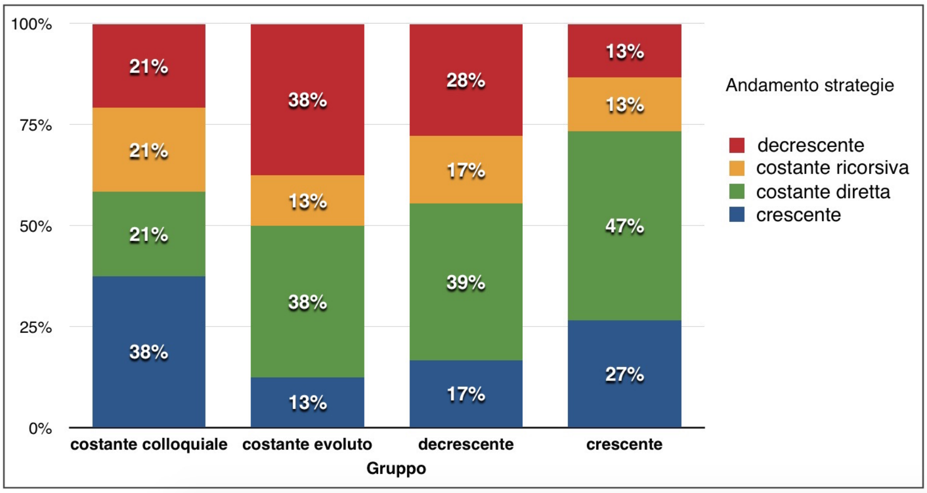


Il confronto fra l'andamento dei registri utilizzati e le strategie applicate è stato effettuato sia considerando la strategia applicata nell'ultimo problema delle macchinine, sia andando a vedere quanti studenti di ciascun gruppo persistono nell'utilizzo della stessa strategia e quanti la cambiano secondo un andamento *crescente* o *decrescente* (Figura 4.16) nel passaggio dal primo problema delle griglie quadrate all'ultimo problema delle macchinine.

La Tabella 4.60 e il relativo grafico mostrano che il gruppo con la percentuale più alta di studenti che, nell'ultimo problema, utilizzano una strategia diretta è quello in cui si ha un'evoluzione dei registri utilizzati mentre quello con la percentuale più bassa, l'unica minore del 50%, è il gruppo degli studenti che utilizzano sempre un registro colloquiale. Negli altri due gruppi gli studenti si distribuiscono equamente fra chi utilizza una strategia diretta e chi una ricorsiva.

Tabella 4.61: Andamento delle strategie applicate per rispondere ai quesiti numerici per ogni gruppo scaturito dall'analisi dei registri. La tabella mostra le frequenze assolute mentre nel grafico sono riportate le frequenze percentuali rispetto alla numerosità di ciascun gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Andamento strategie | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| crescente | 9 | 1 | 3 | 4 |
| costante diretta | 5 | 3 | 7 | 7 |
| costante ricorsiva | 5 | 1 | 3 | 2 |
| decrescente | 5 | 3 | 5 | 2 |
| Totale | 24 | 8 | 18 | 15 |



Nonostante ciò il gruppo *costante colloquiale* è quello in cui si ha la più alta percentuale di studenti che variano la strategia utilizzata dal primo all'ultimo problema secondo un andamento crescente. Da questo punto di vista il gruppo con il risultato peggiore, poiché contiene la più alta percentuale di studenti che cambiano la strategia secondo un andamento decrescente, è quello di chi utilizza sempre registri evoluti.

Anche per le strategie si potrebbe fare una suddivisione fra andamenti *positivi*, ovvero *crescente* e *costante diretta*, e andamenti *negativi*, ovvero *costante ricorsivo* e *decrescente*. Il grafico in Figura 4.19, costruito sulla base di tale raggruppamento, mostra che il gruppo con risultati migliori è ancora quello degli studenti che hanno avuto'un evoluzione nell'utilizzo dei registri. Negli altri tre gruppi le distribuzioni sono simili anche se il gruppo "peggiore" dal punto di vista dell'evoluzione delle strategie è quello degli studenti che hanno utilizzato registri più evoluti sin dal primo problema.

Questa analisi porta quindi ad affermare che un andamento crescente dal punto di vista dei registri è accompagnato, nella maggior parte dei casi, da un andamento positivo (nel senso della Figura 4.16) nelle strategie ma che non esiste una dipendenza fra i registri utilizzati nei quesiti di generalizzazione e le strategie applicate nei quesiti aritmetici.

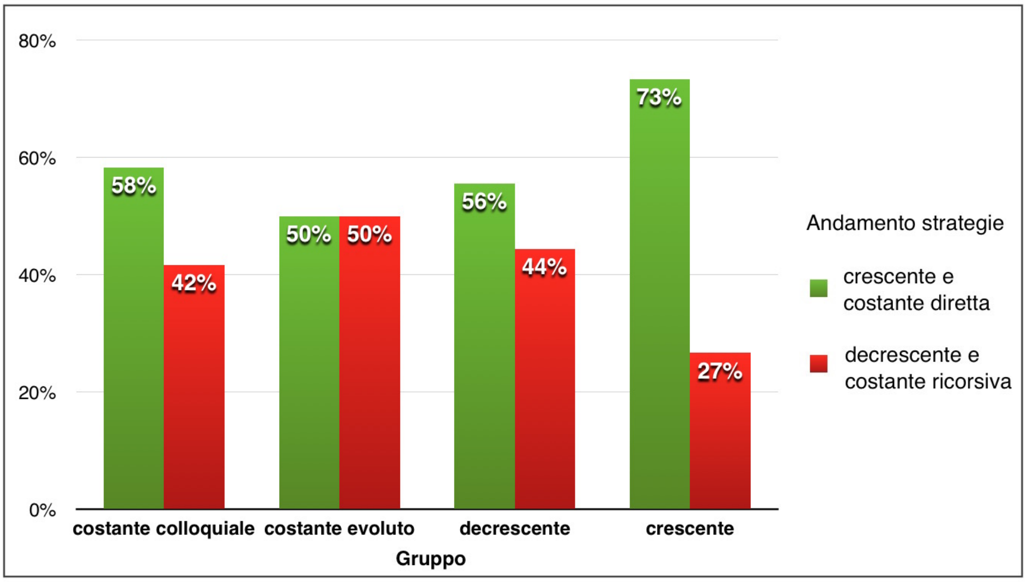


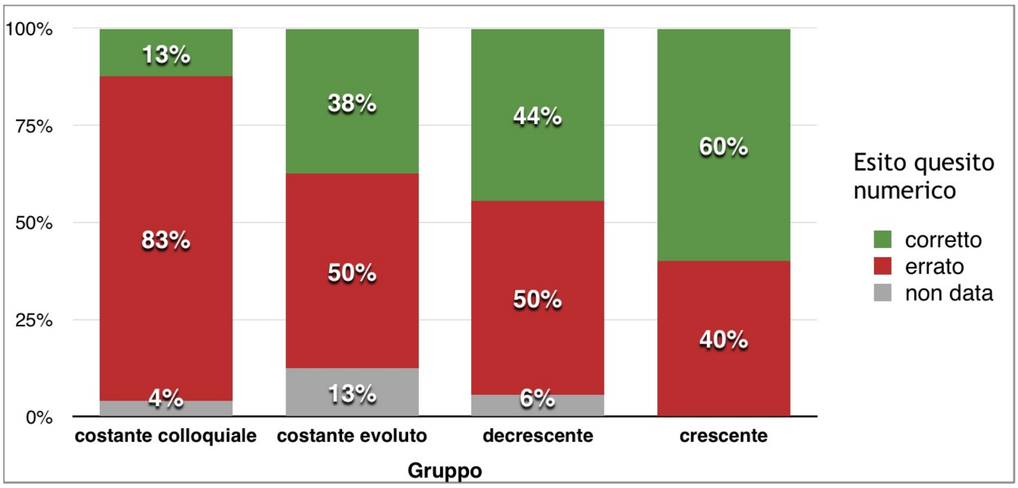

Figura 4.19: Andamento delle strategie per ciascun gruppo, raggruppate in andamenti positivi (crescente e costante diretta) e andamenti negativi (decrescente e costante ricorsiva).

### Distribuzione risposte corrette ed errate nei diversi gruppi

Lo studio dei gruppi scaturiti dall'analisi dei registri è stata conclusa andando ad osservare la distribuzione delle risposte corrette ai quesiti aritmetici per i problemi delle griglie quadrate e delle macchine.

Tabella 4.62: Distribuzione esiti del quesito aritmetico per il problema delle griglie quadrate. In tabella sono riportate le frequenze assolute e nel grafico quelle percentuali rispetta alla numerosità del gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Esito quesito aritmetico | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| non data | 1 | 1 | 1 | 0 |
| errato | 20 | 4 | 9 | 6 |
| corretto | 3 | 3 | 8 | 9 |
| Totale | 24 | 8 | 18 | 15 |

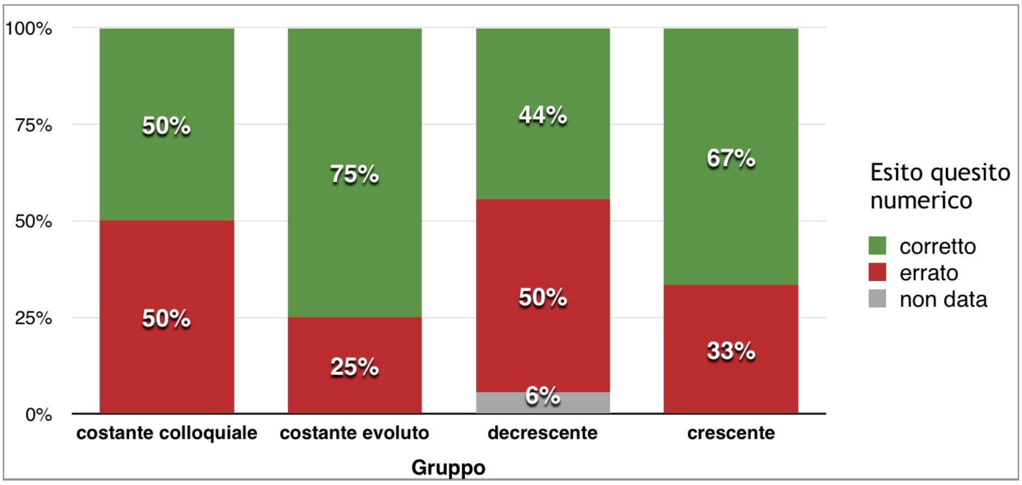



Il grafico in Tabella 4.62 mostra che, nel primo problema, il gruppo più debole è stato quello degli studenti che hanno utilizzato, in entrambi i problemi considerati, un registro colloquiale. In questo gruppo si ha infatti la percentuale più bassa di risposte corrette. Il gruppo con la performance migliore è stato invece quello degli studenti che hanno avuto un andamento crescente nell'uso dei registri: questo è l'unico gruppo in cui la percentuale di risposte corrette è superiore al 50%.

Ciò che però è successo nel problema delle macchine non consente di ipotizzare una relazione fra il successo nei quesiti aritmetici e l'appartenenza ad un determinato gruppo. Il grafico relativo alla Tabella 4.63 mostra che nell'ultimo problema la percentuale più bassa di risposte corrette si trova nel

Tabella 4.63: Distribuzione esiti del quesito aritmetico per il problema delle macchinine. In tabella sono riportate le frequenze assolute e nel grafico quelle percentuali rispetta alla numerosità del gruppo.

| | Andamento registri | | | |
|---|---|---|---|---|
| Esito quesito aritmetico | costante colloquiale | costante evoluto | decrescente | crescente |
| non data | 0 | 0 | 1 | 0 |
| errato | 12 | 2 | 9 | 5 |
| corretto | 12 | 6 | 8 | 10 |
| Totale | 24 | 8 | 18 | 15 |




gruppo degli studenti che hanno avuto una variazione decrescente nell'uso dei registri mentre la percentuale più alta è degli studenti che hanno utilizzato registri più evoluti in entrambi i problemi.

Un'unica caratteristica distingue il gruppo *decrescente* dagli altri 3: questo è il solo gruppo in cui la percentuale di risposte corrette non è aumentata nel passaggio dal primo al terzo problema restando al di sotto del 50%.

### 4.2.4 Conclusioni

L'analisi dei registri, colloquiali ed evoluti, utilizzati dagli studenti delle prime per rispondere ai quesiti di generalizzazione ha portato a diverse riflessioni riguardanti: l'uso dei due diversi registri da parte di studenti appartenenti a classi diverse, la relazione fra abilità relative al linguaggio e i processi di generalizzazione, le caratteristiche della griglia costruita per misurare tali abilità, la propensione degli studenti appartenenti ai diversi gruppi verso l'applicazione di una determinata strategia di risoluzione dei quesiti aritmetici e il legame fra il comportamento dal punto di vista dei registri e il successo nel rispondere ai quesiti aritmetici.

La ripartizione degli studenti dei 4 gruppi nelle 5 classi di appartenenza ha mostrato come la distribuzione delle 4 tipologie di andamento dei registri non è uguale in tutte le classe, questo non permette quindi di trarre conclusioni generali sulla geografia di una classe qualsiasi dal punto di vista del comportamento nei confronti dei registri utilizzati per descrivere un algoritmo applicato per risolvere un problema.

Per quanto riguarda i processi di generalizzazione, considerati in questo studio come caratterizzanti il pensiero algebrico e misurati in base alle diverse modalità di spiegazione di un algoritmo, l'analisi ha mostrato un legame fra il loro sviluppo e alcune abilità riguardanti il linguaggio in quanto gli studenti che hanno avuto un comportamento *positivo* dal punto di vista dei registri hanno mostrato di possedere o di aver raggiunto abilità di generalizzazione nella descrizione di un algoritmo. Il fatto che però studenti che hanno raggiunto risultati positivi da questo punto di vista appartenessero anche a quei gruppi che invece presentavano delle carenze nell'utilizzo dei registri evoluti ha portato a concludere che gli indicatori utilizzati per la classificazione degli studenti per le caratteristiche del linguaggio relative ai registri non sono completamente adatti ad individuare quelle caratteristiche del linguaggio degli studenti che potrebbero avere una correlazione con le abilità di generalizzazione.

Il confronto dei quattro gruppi dal punto di vista del comportamento rispetto alle strategie applicate per risolvere i quesiti aritmetici ha evidenziato che un andamento crescente dal punto di vista dei registri è caratterizzato da una larga maggioranza di studenti che hanno un comportamento positivo, nel senso illustrato dalla Figura 4.16, anche per quanto riguarda le strategie utilizzate. Ma, in generale, la distribuzione omogenea di andamenti *positivi* e *negativi* nei diversi gruppi porta alla conclusione che non ci sia correlazione fra il comportamento dal punto di vista dei registri e le strategie applicate.

Infine la distribuzione delle risposte corrette ed errate ai quesiti aritmentici nei due problemi delle griglie quadrate e delle macchinine ha evidenziato una peculiarità del gruppo degli studenti che hanno una variazione *decrescente* dal punto di vista dei registri, il quale è risultato essere l'unico gruppo in cui la percentuale di risposte corrette non aumenta passando dal primo al terzo problema restando al di sotto del 50%.

## 4.3 Un'indagine in una terza secondaria di primo grado

Si è voluto chiudere lo studio sperimentale con un'attività in una classe terza.

Come illustrato nel paragrafo 4.1.5 i risultati ottenuti nell'attività con la terza L dello studio pilota non hanno rispecchiato le aspettative poiché, nonostante gli studenti conoscessero già le espressioni algebriche e le equazioni:

- solo quattro studenti su 24 hanno utilizzato il linguaggio simbolico per descrivere l'algoritmo utilizzato per rispondere ai primi quesiti;
- il linguaggio simbolico utilizzato non era convenzionale ma comprendeva l'uso di abbreviazioni o parole intere;
- nel problema del lavoro di gruppo nessuno ha impostato un'equazione per rispondere al quesito inverso del problema delle macchinine.

Per questo motivo si è voluto ripetere l'attività con un'altra terza provando a modificare il problema. Come anticipato nel Paragrafo 4.1.6 lo scopo della modifica era quello di mettere in crisi le conoscenze aritmetiche, che gli studenti della terza dello studio pilota avevano utilizzato per rispondere al quesito inverso, in modo da indurre gli studenti a utilizzare invece gli strumenti algebrici a loro noti. Anche in questo caso, infatti, l'attività si è svolta alla fine dell'anno scolastico quindi anche questi gli studenti avevano già dimestichezza con le espressioni algebriche e conoscevano le equazioni di primo grado.

Con questo scopo, il problema delle macchinine è stato modificando aggiungendo ai tre quesiti originali un quarto quesito. Il nuovo testo completo è riportato in Tabella 4.64. Il quesito aggiunto nella seconda parte è ancora equivalente alla risoluzione di un'equazione di primo grado con la differenza, rispetto al quesito c), che nell'equazione corrispondente l'incognita compare in entrambi i membri. Riprendendo la distinzione di Filloy e Rojano (1989) il quesito c) corrisponde ad un'equazione *aritmetica* mentre il quesito d) ad un'equazione *non aritmetica*.[42] Questo comporta, dal punto di vista della risoluzione del quesito, l'impossibilità di rispondere applicando le operazioni inverse di quelle utilizzate per rispondere al primo quesito.

L'attività ha riguardato un solo incontro di un'ora che è stata dedicata interamente alla risoluzione individuale del problema.

[42] Si veda 38.

Tabella 4.64: Testo del problema delle macchinine utilizzato nell'attività con la terza.

**Problema:** Claudio ha una collezione di macchinine e vuole disporle su un grande tavolo nella sua stanza nel seguente modo: nella prima fila sistema 6 macchinine, nella seconda ne mette quattro in più rispetto alla prima, nella terza quattro in più rispetto alla seconda e così via . . .

a) Quante macchinine dovrà mettere Claudio nella fila 35? Spiega come hai trovato la risposta.

b) Sapresti determinare il numero di macchinine per qualsiasi fila? Se si, spiega come. Se no, spiega perché.

c) In quale fila ci saranno 94 macchinine? E in quale fila 200? Spiega come hai trovato la risposta.

**Massimo e la collezione di soldatini**

Un amico di Claudio, Massimo, ha invece una collezione di soldatini. Seguendo l'idea del compagno anche Massimo vuole disporre i suoi soldatini in un grande tavolo ma lo fa in modo diverso: nella prima fila sistema 44 soldatini, nella seconda ne mette 2 in più rispetto alla prima, nella terza due uni più rispetto alla seconda e così via. . .

Nelle due collezioni c'è una fila che contiene lo stesso numero di oggetti. Qual è la fila? Spiega come hai trovato la risposta.

Le due parti del problema non sono state presentate contemporaneamente nella stessa scheda. La scheda contenente la seconda parte aggiunta veniva distribuita man mano che gli studenti finivano di rispondere ai quesiti della prima parte.

Per quanto riguarda la prima parte non ci si aspettava che i risultati si discostassero da quelli registrati con la terza del progetto pilota. Le ipotesi erano dunque:

i) una bassa percentuale di studenti che utilizzassero il linguaggio simbolico per rispondere al quesito b) sulla fila qualsiasi;

ii) l'utilizzo di un linguaggio simbolico non convenzionale;

iii) l'assenza di equazioni per risolvere il quesito c).

L'ipotesi formulata in seguito alla modifica era che almeno qualche studente, nel tentativo di trovare una nuova strategia, pensasse di impostare un'equazione e utilizzasse dunque il linguaggio simbolico canonico per descrivere i due algoritmi.

### 4.3.1 Analisi dei dati ricavati dagli elaborati

La Tabella 4.65 mostra che la prima e la terza ipotesi formulate per la prima parte del problema delle macchinine si sono effettivamente verificate. Per quanto riguarda la prima ipotesi in realtà neanche uno studenti ha utilizzato il linguaggio simbolico per descrivere l'algoritmo quindi la seconda ipotesi non può essere analizzata.

Prima di discutere ciò che è successo per la seconda parte del problema si vuole analizzare, come fatto per le prime, la relazione fra le strategie utilizzate per rispondere al quesito a) e la modalità di spiegazione generale dell'algoritmo fornita nel quesito b). Il grafico che accompagna la Tabella 4.66 mostra che gli unici studenti che hanno prodotto una spiegazione a parole completa dell'algoritmo sono quelli che hanno utilizzato una strategia diretta: solo due di questi studenti hanno fornito un esempio per rispondere al quesito di generalizzazione. Quindi è chiaro che in questa classe le abilità di generalizzazione sono accompagnate dall'applicazione di strategie dirette nel quesito aritmetico.

L'analisi delle risposte al quesito d) (Tabella 4.67) aggiunto in seguito ai risultato del laboratorio con le terze del progetto pilota ha rivelato che, nonostante gli studenti di questa classe conoscessero e sapessero risolvere le equazione di primo grado nessuno di loro ha tentato di impostare un'equazione per rispondere al nuovo quesito. 10 studenti su 21 hanno applicato una strategia ricorsiva, uno ha proceduto per prove ed errori applicando a diversi numeri un calcolo diretto e in tre elaborati era presente solo la risposta quindi non è stato possibile determinare la strategia applicata. I restanti 7 non hanno fornito alcuna risposta. Inoltre, fra coloro che hanno risposto, solo 5

Tabella 4.65: Tabella riassuntiva dei dati relativi alla prima parte del problema delle macchinine

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito a) | Esito | Corretto | 8 |
| | | Errato | 13 |
| | Strategia | Diretta | 11 |
| | | Ricorsiva | 8 |
| | | Proporzione | 2 |
| | | Disegno | 0 |
| | Non risponde | | 0 |
| Quesito b) | Modalità di spiegazione dell'algoritmo | Formula | 0 |
| | | A parole completa | 9 |
| | | A parole incompleta | 8 |
| | | Esempio | 3 |
| | | Non risponde | 1 |
| Quesito c) | Esito 94 | Corretto | 8 |
| | | Errato | 11 |
| | Esito 200 | Corretto | 6 |
| | | Errato | 13 |
| | Non risponde | | 2 |
| | Strategia | Equazione | 0 |
| | | Formula inversa | 8 |
| | | Ricorsiva | 7 |
| | | Proporzione | 2 |
| | | Prove ed errori | 2 |
| | Non risponde | | 1 |

lo hanno fatto correttamente.

Il fatto che le uniche strategie aritmetiche disponibili per rispondere al quarto quesito fossero la strategia ricorsiva e quella per prove ed errori non è stato sufficiente a portare gli studenti verso l'utilizzo delle equazioni. Questo conferma quanto già osservato dopo il laboratorio con la terza L dello studio pilota, ovvero che alla fine della scuola secondaria di primo grado i polinomi e le equazioni, oggetto di studio del curricolo di matematica della classe terza, sono visti come catene di simboli senza significato né utilità.

Tabella 4.66: Confronto fra la strategia utilizzata per rispondere al quesito aritmetico e la modalità di spiegazione nel quesito di generalizzazione. In tabella sono riportate le frequenze assolute mentre il grafico riporta le percentuali rispetto alla strategia.

| **Strategia** | **Modalità spiegazione** | | | | | **Tot** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | non risponde | esempio | a parole incompleta | a parole completa | formula | |
| non risponde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| disegno | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ricorsiva | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | 8 |
| proporzione | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| diretta | 0 | 2 | 0 | 9 | 0 | 11 |
| **Totale** | **1** | **3** | **8** | **9** | **0** | **21** |

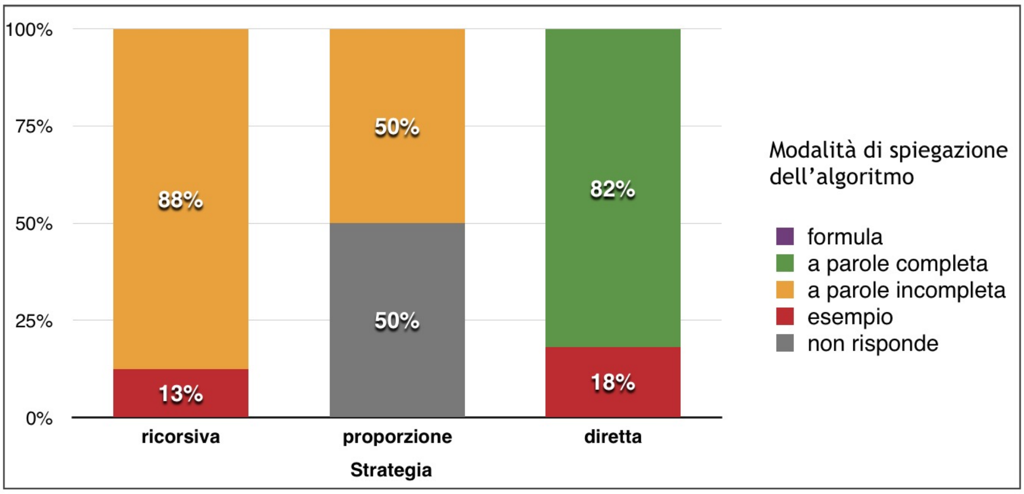



Tabella 4.67: Tabella riassuntiva dei dati relativi alla seconda parte del problema delle macchinine

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quesito d) | Esito | Corretto | 5 |
| | | Errato | 9 |
| | Strategia | Equazione | 0 |
| | | Ricorsiva | 10 |
| | | Prove ed errori | 1 |
| | | Non esplicitata | 3 |
| | Non risponde | | 7 |

# Capitolo 5

# Conclusioni e possibili sviluppi

La posizione condivisa da chi si occupa o si è occupato dei processi di insegnamento e apprendimento dell'algebra elementare secondo cui la causa principale delle difficoltà in questa branca della matematica, oggetto di questa tesi di dottorato, sia la mancanza di senso delle espressioni algebriche è stata confermata sia dallo studio preliminare, condotto con studenti al primo anno dell'università, sia dai due studi condotti con le due terze della scuola secondaria di primo grado. La tipologia di errori commessi dagli studenti dello studio preliminare e la loro persistenza e frequenza hanno confermato che la maggior parte di essi risolvono le disequazioni applicando meccanicamente procedimenti non pertinenti o perché errati o perché validi in altri ambiti. Questo dimostra il fatto che la maggior parte degli studenti coinvolti nell'analisi non avesse chiaro il significato di una disequazione così come la giustificazione dei vari passaggi degli algoritmi da loro stessi applicati. Nei due laboratori con le terze nessuno degli studenti ha utilizzato un'equazione per rispondere ai quesiti *inversi*, neanche quando è stato inserito un quesito non risolvibile con la strategia aritmetica di applicazione di operazioni inverse. Inoltre, nessuno ha risposto al quesito di generalizzazione fornendo un'espressione algebrica utilizzando il linguaggio simbolico canonico e solo una piccola percentuale ha utilizzato un linguaggio simbolico non canonico. Analogamente a quanto successo con l'analisi degli errori nelle disequazioni, i risultati dei due studi con le terze hanno messo in luce il fatto che, per questi studenti, espressioni letterali e equazioni non sono strumenti utili a risolvere problemi ma piuttosto catene di simboli a cui applicare regole apparentemente prive di motivazione o significato.

Lo studio sperimentale oggetto di questa tesi è stato progettato e realizzato con l'intento di verificare in primo luogo l'ipotesi che la mancanza di senso delle espressioni algebriche agli occhi degli studenti non sia dovuta ad un ostacolo di origine ontogenica (Filloy & Rojano, 1989 ; Herscovics & Linchevski, 1994) ma piuttosto che l'ostacolo sia di natura didattica (Vailati, 1908 ; Menghini, 1994 ; Ainley et al., 2003 ; Navarra, 2009 ; Assude et al., 2012 ; Chevallard & Bosch, 2012 ; Mercier, 2012) . Questa ipotesi è stata verificata in primo luogo dal fatto che già studenti delle classi prime della scuola secondaria di primo grado siano stati in grado di produrre espressioni algebriche che rappresentassero algoritmi di calcolo sia durante le discussioni collettive, sia durante la risoluzione dei problemi somministrati. Inoltre essi erano in grado, come dimostrato dagli estratti delle discussioni, di comprendere quale fosso l'algoritmo rappresentato dalle espressioni algebriche proposte da altri compagni (si vedano ad esempio gli estratti in Tabella 5.1 e Tabella 5.2 commentati nel paragrafo seguente). L'incapacità da parte di alcuni studenti, che tradizionalmente hanno a che fare con l'algebra elementare dall'eta di 12-13 anni, di attribuire un senso alle espressioni algebriche o alle regole di manipolazione non ha dunque un'origine ontogenica poiché anche studenti più giovani, di 10-11 anni, dimostrano di essere in grado di farlo.

Questo non significa che quindi sia naturale per studenti che abbiano sempre lavorato in campo aritmetico utilizzare lettere per parlare di quantità incognite e rappresentare simbolicamente relazioni fra grandezze. Si è infatti d'accordo con Herscovics e Linchevski (1994) sul fatto che non ci si possa aspettare che essi svolgano spontaneamente operazioni con e sulle incognite: una guida per la costruzione delle competenze in questo senso è necessaria. La seconda ipotesi che infatti si voleva verificare con questo studio era l'origine didattica della mancanza di senso degli oggetti algebrici, ipotesi scaturita da studi esistenti sulle pratiche tradizionali di insegnamento dell'algebra elementare. Questa è stata in realtà scandita in sei ipotesi riguardanti le modalità di conduzione di una lezione in classe e le caratteristiche dei problemi proposti agli studenti che possono favorire l'insorgere dei processi di generalizzazione e la costruzione del significato delle espressioni algebriche. Di seguito saranno quindi ripresi i risultati dei laboratori realizzati nell'ambito di questo studio e analizzati dal punto di vista delle ipotesi formulate.

## 5.1 Sulle ipotesi di ricerca

L'analisi dei risultati dello studio sperimentale dal punto di vista delle variabili di interesse, ovvero la modalità di spiegazione di un algoritmo applicato, le strategie utilizzate per rispondere ai quesiti aritmetici e l'utilizzo di registri colloquiali o evoluti, è stata di volta in volta completata da considerazioni riguardanti le ipotesi formulate prima della realizzazione dello studio sperimentale. Tali ipotesi sono state a volte verificate a volte in parte confutate sia dai risultati del percorso con le prime, sia già da quelli dello studio pilota. In questo paragrafo, per ciascuna delle sei ipotesi, saranno discussi tutti i risultati dello studio che ne hanno determinato la verifica o la confutazione.

**i) costruire la scrittura in linguaggio simbolico di un'espressione algebrica a partire dalla formulazione a parole dell'algoritmo di calcolo aritmetico corrispondente favorisce la comprensione del significato dell'espressione**

Una prima conferma di questa ipotesi è data da alcuni interventi degli studenti durante le discussioni collettive. Il fatto che le espressioni algebriche siano comparse solo dopo aver descritto gli algoritmi utilizzando il linguaggio verbale ha fatto sì che gli studenti riconoscessero in una nuova espressione proposta da un compagno un nuovo algoritmo. Due esempi, tratti dalle discussioni di due classi diverse, sono gli estratti delle Tabelle 5.1 e 5.2 che riportano una parte della discussione sul problema degli stuzzicadenti in cui si cercava di fornire una spiegazione generale delle strategie elencate all'inizio della lezione. Alcuni studenti propongono infatti già una formula senza farla precedere da una descrizione a parole e il ricercatore chiede agli altri cosa significasse ciò che aveva scritto il compagno.

Tabella 5.1: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima G durante la fase b) in cui alcuni studenti cercando di descrivere a parole un algoritmo rappresentato da una formula.

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ok quali metodi ci mancano da descrivere? |
| | Augusto | *Dice di aver descritto la strategia proposta dal compagno Stefano:* $s(n) = 4n - (n - 1)$ |
| | Augusto | Numero figura per 4 meno numero figura p |
| | Ricercatore | [*Interrompendolo*] Come l'hai scritto? |
| | Augusto | $nf$ per quattro... Chiusa pa ah quello fra parentesi... meno aperta parentesi $nf$ meno uno chiusa parentesi |
| | Ricercatore | Ok, allora va bene secondo voi? |
| | Alcuni | *Rispondono affermativamente* |
| | Ricercatore | Veronica se lo dovessimo dire a parole questo... abbiamo scritto solo la formula... e a parole come sarebbe? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella 5.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Veronica | Il numero della figura? Allora bisogna moltiplicare il numero della figura per quattro e poi il risultato dobbiamo sottrarlo a 1 |
| | Studente 3 | Nooo! Dobbiamo sottrargli uno |
| | Ricercatore | Al risultato cosa dobbiamo togliere? Questo pezzo [*indica la seconda parte della formula scritta nella slide*] |
| | Studente 4 | Uno |
| | Ricercatore | Ma non c'è scritto uno, cosa c'è scritto? |
| | Veronica | Numero della figura meno uno |
| | Ricercatore | Ok, quindi... allora bisogna moltiplicare il numero della figura per 4, e al risultato bisogna togliere... |
| | Alcuni | uno |
| | Altri | [*Correggono*] il numero della figura meno uno |

Tabella 5.2: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima I durante la fase b) in cui alcuni studenti cercando di descrivere a parole un algoritmo rappresentato da una formula.

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Chi vuole provare a fare la stessa cosa [*descrivere per rispondere al quesito di generalizzazione*] per un altro metodo? |
| | Antonio | *Chiede di intervenire* |
| | Ricercatore | Quale vuoi scegliere? |
| | Antonio | Quello di Davide e Francesco |
| | Antonio | $a$ per tre più uno |
| | Ricercatore | Ok... è vero che lo posso scrivere così il metodo di Davide e Francesco? |
| | Altri | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | Fabio... Se lo voglio dire a parole adesso, come ha fatto Giacomo per il metodo di Riccardo, come lo posso dire questo? |
| | Fabio | Allora... devi fare ... il numero della figura per tre più uno |

La descrizione a parole dell'algoritmo corrispondente ad un'espressione algebrica è certamente sintomo della comprensione del significato dell'espressione stessa. Ma una verifica dell'ipotesi che introdurre le espressioni algebriche mediante algoritmi di calcolo aritmetici possa favorire la comprensione del senso di un'espressione letterale sono anche i risultati dell'analisi delle modalità di spiegazione generale utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione durante l'intero percorso. Fornire una formula come risposta a questi quesiti è indice del fatto che si è compreso che un'espressione algebrica può essere interpretata come un algoritmo di calcolo generale che può essere applicato a qualsiasi figura della successione. Dunque l'aumento del numero degli studenti che utilizzano questa modalità di spiegazione, che passa da 1 per il problema delle griglie quadrate a 17 per quello delle macchinine, mostra che il modo in cui le espressioni algebriche sono state introdotte favorisce la comprensione del significato di queste ultime.

**ii) I problemi su pattern di figure che generano sequenze numeriche favoriscono la produzione degli algoritmi generali, che possono essere poi riscritti mediante il linguaggio simbolico, purché formulati seguendo alcuni criteri fra cui: porre quesiti che richiedano di ragionare su una figura qualsiasi della successione e utilizzare successioni di figure in cui non sia sufficiente applicare un'unica formula nota (geometrica o aritmetica) o in cui la grandezza a cui applicare tale formula non sia esattamente il numero che rappresenta la posizione della figura nella successione.**

Appurato che la descrizione, scritta o orale, di un algoritmo di calcolo generale favorisca la comprensione delle espressioni algebriche, diventa fondamentale individuare alcune delle caratteristiche dei problemi utilizzati nelle attività che favoriscano la messa in atto di processi di generalizzazione e dunque la descrizione di algoritmi generali. Il fatto che i problemi su successioni numeriche, generate da pattern di figure o da descrizioni di scenari reali, siano utili in questo senso è un risultato già presente in letteratura. Il confronto fra i risultati ottenuti nella prima A dello studio pilota e quelli ottenuti nelle altre prime, incluse le altre due prime dello studio pilota, dimostrano la validità di questa ipotesi. Nella prima A pilota infatti, alla richiesta di giustificazione delle risposte fornite ai quesiti aritmetici (gli unici inseriti nel problema somministrato in questa classe), la maggior parte degli studenti fornisce una spiegazione legata al caso numerico particolare, senza nessun tentativo di descrivere un algoritmo generale. Solo somministrando un problema che richiedesse esplicitamente di spiegare come determinare la risposta per una figura qualsiasi si è potuto stabilire che già al primo anno della scuola secondaria di primo grado gli studenti sono in grado di descrivere in termini generali un algoritmo e quindi di attivare processi legati al pensiero algebrico. I dati in Tabella 5.3 mostrano la differenza fra le percentuali degli studenti che hanno fornito una spiegazione generale dell'algoritmo applicato nel quesito aritmetico. Nel numero di *descrizioni generali* sono comprese quelle a parole complete e incomplete e quelle in cui è stata fornita anche una formula. Per quanto riguarda le cinque prime del percorso sperimentale i dati sono relativi al primo problema delle griglie quadrate e quindi non influenzati dai successivi interventi in classe.

Tabella 5.3: Percentuale per ogni classe prima degli studenti che hanno fornito una descrizione generale (completa, incompleta o mediante linguaggio simbolico) dell'algoritmo di calcolo applicato nel primo problema somministrato.

| Classe | A pilota | L pilota | M pilota | A | D | E | G | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| descrizioni generali | 4 | 20 | 9 | 12 | 12 | 12 | 9 | 11 |
| studenti totali | 22 | 26 | 19 | 19 | 20 | 14 | 16 | 21 |
| percentuale | 18% | 47% | 77% | 63% | 60% | 86% | 56% | 52% |

L'ipotesi che la necessità di esplicitare la relazione fra la posizione dell'elemento nella successione e il numero di oggetti di cui è composto sia favorita dal costruire la successione in modo che la posizione della figura non coincida con il dato da utilizzare nella formula (geometrica o aritmetica) nota è confermata già da alcuni risultati dello studio pilota: nella prima A infatti dei quattro studenti che provano a fornire una spiegazione generale, solo due fanno riferimento al "numero della figura" ma comunque senza esplicitare la relazione con il numero di quadretti che la compone. Parlano di "base" e "altezza" ma non spiegano come queste siano legato alla posizione della figura nella successione. Nelle altre due classi invece, in alcune delle spiegazioni che sono state classificate come *incomplete* viene comunque esplicitata questa relazione mentre ciò che manca è la successiva applicazione della formula per calcolare l'area della figura, nonostante l'algoritmo fosse stato applicato correttamente e interamente per rispondere ai quesiti aritmetici. Come se la parte importante dell'algoritmo fosse esplicitare come determinare il numero di quadretti del lato della figura nota la posizione di questa nella successione.

**iii) Il passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico nella descrizione di un algoritmo può essere favorito dall'*esempio paradigmatico*, ovvero applicando l'algoritmo in un certo numero di casi particolari che, dando luogo ad espressioni numeriche aventi la stessa struttura, inducono la produzione di**

**una espressione letterale avente la stessa struttura di quelle aritmetiche già scritte;**

Nel Paragrafo 3.2.3 sono state descritte le varie fasi in cui erano organizzate le discussioni collettive. Una di queste fasi, che è stata indicata come fase c), comportava l'applicazione ad un certo numero di figure della successione dell'algoritmo formalizzato a parole nella fase precedente. Questo portava alla scrittura di un certo numero di espressioni aventi tutte la medesima struttura ovvero alla costruzione, alla lavagna, di uno schema che inducesse il meccanismo dell'*esempio paradigmato* descritto da Linchevski (1995) (si veda pagina 43). La velocità con cui gli studenti, alla fine di questa fase, rispondevano alla domanda sulla figura qualsiasi, riproposta dal ricercatore, e il fatto che la risposta fosse un'espressione algebrica che esprimeva correttamene l'algoritmo sono una conferma dell'ipotesi secondo cui la scrittura di un certo numero di espressioni aritmetiche aventi la stessa struttura favorisca la produzione della corrispondente espressione algebrica che sarà interpretata come un algoritmo generale.

L'estratto della discussione corrispondente al momento di scrittura della formula per il problema delle griglie quadrate per la prima A è riportato nel Paragrafo 4.2.1 come esempio della fase d). Quelli delle altre classi sono riportati nell'Allegato A.2.

Un'ulteriore conferma dell'efficacia di questo passaggio è il già commentato aumento del numero di studenti che, nel corso dell'intero percorso, hanno utilizzato il linguaggio simbolico per rispondere al quesito di generalizzazione.

iv) **La discussione collettiva in cui gli studenti cercano di descrivere ai compagni il procedimento seguito per risolvere un problema favorisce la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa;**

La prima conferma di questa ipotesi è data già dalla differenza nelle modalità di spiegazione utilizzate per rispondere ai quesiti di generalizzazione delle classi L ed M dello studio pilota. Alle due classi sono stati somministrati problemi identici, nonostante ciò si sono registrate alcune differenze nei risultati. In particolare, i dati relativi a questa variabile, riportati nelle tabelle 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 del Paragrafo 4.1.3 mostrano una notevole differenza fra le due classi per quanto riguarda l'evoluzione delle modalità di spiegazione nel passaggio dal problema risolto individualmente a quello risolto successivamente lavorando in gruppo.

Nella prima L infatti, nel primo problema, 8 studenti su 26 hanno fornito una spiegazione a parole completa. Gli altri si dividono fra chi ha scritto una spiegazione incompleta, chi ha fornito un esempio e chi non ha risposto. Nel secondo problema invece 2 gruppi descrivono l'algoritmo in termini generali utilizzando una spiegazione a parole completa e gli altri 3 utilizzano anche il linguaggio simbolico.

Nella prima M, invece, 2 su 19 forniscono una spiegazione a parole completa nel primo problema, gli altri si distribuiscono fra una spiegazione incompleta, l'esempio e la mancata risposta. Ma mentre nella prima L, nel passaggio dal primo al secondo problema, si registra un miglioramento nelle modalità di spiegazione, questo non accade nella prima M dove, dei 5 gruppi, 3 forniscono una spiegazione a parole incompleta e 2 solo un esempio.

Come già evidenziato nelle osservazioni discusse alla fine dello studio pilota, la differenza fra ciò che è successo fra il primo e il secondo problema nelle due classi riguarda la discussione collettiva che, per motivi di tempo, non ha avuto luogo nella prima M. L'estratto riportato nel Paragrafo 4.14 mostra infatti che durante la discussione avvenuta nella prima L, alcuni studenti hanno spiegato la strategia utilizzata descrivendola in modo generale. Questo ha portato evidentemente un miglioramento nelle risposte fornite per rispondere al quesito di generalizzazione del successivo problema. Miglioramento che invece non è avvenuto per la prima M in cui tale discussione non ha avuto luogo.

Anche i risultati del percorso con le prime confermano che le discussioni che seguivano la somministrazione dei problemi hanno portato un miglioramento nelle descrizioni degli algoritmi. Una delle fasi delle discussioni aveva infatti come obiettivo la produzione di una descrizione generale condivisa delle strategie utilizzate per rispondere ai questi aritmetici. Il grafico riportato nella Figura 4.14 del Paragrafo 4.2.2 mostra infatti che il numero di chi fornisce un esempio o non risponde diminuisce mentre quello di chi fornisce una spiegazione a parole incompleta resta pressoché costante nei tre problemi. Invece aumentano il numero di chi fornisce una spiegazione a parole completa insieme al numero di chi utilizza anche il linguaggio simbolico. Quindi le discussioni collettive in cui gli studenti hanno descritto in termini generali i vari procedimenti applicati per risolvere i problemi anno favorito la produzione di una descrizione verbale dell'algoritmo di calcolo sempre più chiara e precisa.

v) **La necessità di spiegare con chiarezza i passaggi necessari a risolvere un problema generale porta, attraverso discussioni collettive opportunamente guidate dall'insegnante, all'abbandono di alcune caratteristiche dei registri colloquiali verso la produzione di testi che utilizzano registri evoluti;**

Per commentare questa ipotesi si deve verificare se gli studenti del percorso sperimentale che, per rispondere ai quesiti di generalizzazione del primo problema delle griglie quadrate, hanno prodotto testi con caratteristiche dei registri colloquiali, hanno avuto un'evoluzione nei registri utilizzati durante l'intero percorso. Questo dimostrerebbe che le discussioni che seguivano la risoluzione dei problemi hanno avuto un effetto positivo in questo senso sulle successive produzioni scritte. Se si riprende quindi la suddivisione degli studenti scaturita dall'analisi dei testi prodotti, si vede che il gruppo di studenti per i quali si registra un'evoluzione dei registri corrisponde al 23% degli studenti coinvolti in questa parte dell'analisi. Per comodità si riporta questa suddivisione, già illustrata nel Paragrafo 4.2.3, in Tabella 5.4.

Tabella 5.4: Numerosità dei gruppi risultanti dall'analisi rispetto ai registri utilizzati nei testi prodotti dagli studenti per rispondere al quesito di generalizzazione.

| gruppo | numerosità | % sul totale | % su analizzati |
|---|---|---|---|
| esclusi | 47 | 42% | |
| registri colloquiali | 24 | 21% | 37% |
| registri evoluti | 8 | 7% | 12% |
| da evoluto a colloquiale | 18 | 16% | 28% |
| da colloquiale a evoluto | 15 | 13% | 23% |

Oltre alla bassa percentuale di chi ha un'evoluzione, la tabella mostra anche che il gruppo più numeroso è in realtà quello degli studenti che hanno continuato ad utilizzare registri colloquiali anche nel testo prodotto per l'ultimo problema delle macchinine. Infine è significativo anche il fatto che 18 dei 65 studenti di questa analisi hanno prodotto, per l'ultimo problema, testi che contenevano più caratteristiche dei registri colloquiali rispetto al primo testo prodotto per il problema delle griglie quadrate.

Nonostante le discussioni collettive abbiano effettivamente favorito la produzione di descrizione degli algoritmi sempre più chiara, la composizione di queste spiegazioni in termini di registri colloquiali o evoluti, non è stata sempre influenzata positivamente. Questo fatto sembra in contraddizione con le descrizioni delle due tipologie di registri riportate nel Paragrafo 3.1.3. In generale infatti, un testo scritto prodotto con un registro colloquiale risulta meno chiaro di uno in cui si utilizza un registro evoluto a causa della sua alta dipendenza dal contesto per l'uso di riferimenti deittici o per l'omissione di parti del discorso. Nonostante ciò, l'analisi delle modalità di spiegazione degli studenti che usano sempre un registro colloquiale, i cui dati sono riportati a pagina 167, mostrano che metà di essi hanno avuto un'evoluzione dal punto di vista della modalità di spiegazione e 11 hanno fornito o una spiegazione a parole completa o una formula per rispondere al quesito di generalizzazione dell'ultimo problema. Anche nel gruppo degli studenti per cui si è registrata una regressione dal punto di vista dei registri, la metà ha invece avuto una evoluzione per quanto riguarda le modalità di spiegazione dell'algoritmo e, nell'ultimo problema, 9 su 18 hanno fornito una spiegazione a parole completa o una formula. Questa apparente discrepanza è dovuta al fatto che le categorie di indicatori per i quali si è registrata una regressione non hanno influito sulla chiarezza del testo prodotto. Infatti la regressione in questi casi riguardava per lo più la struttura e quindi il fatto che l'algoritmo fosse descritto mediante un testo formato sostanzialmente da proposizioni principali o coordinate rette dalla congiunzione "e" o separate da punti, senza l'utilizzo di molti tipi di subordinate o periodi ipotetici.

Quindi la discussione collettiva ha portato effettivamente all'abbandono di alcune caratteristiche dei registri colloquiali, ovvero quelle caratteristiche che inficiano la chiarezza di un testo, ma non ha avuto effetto oppure ha avuto a volte l'effetto contrario su altre categorie di indicatori.

**vi) La capacità di scrivere autonomamente l'espressione algebrica corrispondente ad un algoritmo di calcolo è legata alla capacità di descrivere con chiarezza mediante il linguaggio verbale l'algoritmo stesso e quindi alla padronanza dei registri evoluti.**

Quest'ultima ipotesi è chiaramente legata a quella appena discussa quindi, per quanto precedentemente detto, non è completamente verificata. Come già osservato, infatti, non tutte le caratteristiche dei registri evoluti sono necessariamente legate alla chiarezza del messaggio prodotto. Ciò che rimane quindi da discutere è il legame fra la capacità di produrre un'espressione algebrica che corrisponde ad un preciso algoritmo e la padronanza dei registri evoluti.

A questo proposito si riprendono le osservazioni scaturite dal confronto fra i gruppi formati in base all'evoluzione dei registri nei tre problemi somministrati. Il grafico riportato in Tabella 4.58 mostrava le frequenze degli studenti che hanno utilizzato il linguaggio simbolico nell'ultimo problema delle macchinine per ciascuno dei gruppi. Se è vero che la percentuale maggiore (40%) si trova nel gruppo di chi ha avuto un'evoluzione nella tipologia di registro utilizzata, è anche vero che alcuni studenti sia del gruppo che rimane costante sui registri colloquiali (4 su 24), sia del gruppo di studenti per cui si registra una regressione (4 su 18) hanno descritto l'algoritmo facendo uso del linguaggio simbolico.

Il dato relativo al gruppo dei registri colloquiali è un indicatore del fatto che abilità dal punto di vista di formazione e comprensione delle espressioni algebriche possono essere raggiunte anche da studenti che non padroneggiano i registri evoluti. Questo confuta l'ipotesi che ci sia necessariamente un legame fra la padronanza dei registri evoluti e la capacità di produrre espressioni algebriche dotate di significato.

Per quanto riguarda invece il gruppo degli studenti per cui si è registrata una regressione, le conclusioni che si possono trarre sono maggiormente legate alla necessità di argomentazione di questi studenti piuttosto che alla loro padronanza dei registri evoluti. Le abilità e la propensione all'argomentazione non sono aspetti del processo di insegnamento/apprendimento trattati in questo lavoro. L'unica osservazione che si intende fare riguarda il fatto che gli studenti appartenenti a questo gruppo hanno dimostrato di essere in grado di produrre un testo con le caratteristiche dei registri evoluti rispondendo al quesito di generalizzazione del primo problema delle griglie quadrate. Di seguito si riportano i testi prodotti da due di questi 4 studenti, gli altri due erano stati riportati nel Paragrafo 4.2.3 a pagina 183.

> Io sono d'accordo con Claudio perché se ad esempio tu mi chiedi la figura 13 io ti risponderei 169 perché ho scoperto che la figura ad esempio 1 invece di avere un quadretto di dimensione ne ha 2 così per fare la figura 13 ho calcolato 14x14 (Studente I20; Problema delle griglie quadrate)
>
> Sì perché io faccio 6+4 × n°fig (Studente I20; Problema delle macchinine)
>
> Si, perché se per esempio prendiamo la figura 12, l'operazione che devo fare è 13 × 13 contando i quadretti ai lati della figura che avranno sempre un numero in più rispetto a, in questo caso, 12. (Studente G06; Problema delle griglie quadrate)
>
> Sì con l'operazione (6 × NUMERO FILA) +4 (Studente G06; Problema delle macchinine)

Come si evince da questi testi, la *regressione* è dovuta al fatto che nella risposta relativa al problema delle macchinine si sono quasi esclusivamente limitati a fornire la formula senza aggiungere una spiegazione a parole o senza argomentarla o motivarla, questo ha avuto come conseguenza un impoverimento della struttura e della sintassi del testo, impoverimento che ha portato alla classificazione di questi studenti come *decrescenti* dal punto di vista dei registri utilzzati.

## 5.2 Sul pensiero algebrico

La caratterizzazione del pensiero algebrico considerata in questo studio, scaturita dalle definizioni trovate in letteratura, è incentrata sui processi di generalizzazione. Sono state pertanto considerate algebriche tutte le situazioni in cui gli studenti non si sono occupati di dati noti o particolari, anche quando queste non comprendevano l'uso delle lettere o del linguaggio simbolico.

Per questo motivo, tutte le considerazioni riguardanti la messa in in atto di processi propri del pensiero algebrico o l'evoluzione di questo per gli allievi coinvolti in questo studio sono scaturite dall'analisi delle modalità con cui questi hanno fornito le risposte al quesito di generalizzazione dei problemi somministrati, quesito che, si ricorda, riguardava la possibilità e il modo in cui fosse possibile determinare il numero di oggetti di cui è composto un qualsiasi elemento di una successione. Sono state dunque considerate indicatori di messa in atto del pensiero algebrico le modalità di spiegazione in cui la risposta veniva fornita con una descrizione a parole completa dell'algoritmo o con la scrittura di una formula generale mediante il linguaggio simbolico. L'utilizzo di un esempio, poiché riguardante dati noti o particolari, o la mancata risposta sono stati considerati indicatori dell'assenza di pensiero algebrico. Infine le risposte che contenevano un tentativo di spiegazione generale dell'algoritmo in cui però questo non veniva descritto completamente o chiaramente sono state considerate indicatori di un inizio di sviluppo di pensiero algebrico non ancora compiuto.

I risultati riguardanti le tipologie di problemi proposti, portano innanzitutto ad affermare che per lavorare sul pensiero algebrico sono sicuramente utili problemi sulle successioni numeriche purché questi vengano costruiti tendendo conto di alcuni criteri riguardanti in primo luogo la tipologia dei quesiti posti: non è possibile infatti trarre conclusioni sulle capacità di generalizzazione di uno studente se i quesiti che gli si pone sono "aritmetici" ovvero riguardano solo dati noti. In secondo luogo giocano un ruolo in questo senso anche le caratteristiche della successione proposta: la necessità di individuare la relazione generale, e quindi di attivare processi di tipo algebrico, che sussiste fra la posizione di un elemento nella successione e il numero di oggetti di cui è composto si presenta raramente se la soluzione può essere determinata applicando un'unica formula (geometrica o aritmetica) nota, soprattuto se la quantità a cui applicare una tale formula coincide con la posizione dell'elemento nella successione.

Per quanto detto poc'anzi sulla relazione qui considerata fra pensiero algebrico e modalità di spiegazione di un algoritmo, l'analisi di queste ultime, anche dal punto di vista della verifica delle ipotesi formulate a riguardo, permette di fare alcune considerazione sull'influenza che il breve percorso realizzato con lo studio con le prime ha avuto sul pensiero algebrico degli studenti. Il grafico riportato in Figura 4.14 a pagina 152 mostra che le uniche due modalità di spiegazione che subiscono una diminuzione in termini di frequenza sono l'esempio e la mancata risposta. Questo dimostra che, nel corso dei tre laboratori, è diminuito il numero degli studenti che restavano in campo aritmetico o che comunque non mettevano in atto processi di generalizzazione propri del pensiero algebrico. Le uniche frequenze che aumentano durante il percorso sono quella degli studenti che forniscono una spiegazione completa e quella degli studenti che scrivono una formula, ovvero le due modalità che sono indice di messa in atto del pensiero algebrico.

La Tabella 5.5 mostra la distribuzione del comportamento degli studenti dal punto di vista delle modalità di spiegazione. L'andamento *crescente* o *decrescente* è stato stabilito sulla base del grafico riportato in Figura 4.16 a pagina 164, confrontando le modalità di spiegazione fornite nel primo problema delle griglie quadrate e nell'ultimo delle macchinine. Gli studenti presenti in entrambi gli incontri erano, complessivamente, 81.

Tabella 5.5: Frequenze degli andamenti delle modalità di spiegazione per rispondere al quesito di generalizzazione.

| Andamento spiegazione | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| crescente | decrescente | costante non risp | costante esempio | costante incompl. | costante completa | costante formula |
| 42 | 12 | 4 | 1 | 9 | 12 | 1 |
| 52% | 15% | 5% | 1% | 11% | 15% | 1% |

Questi dati mostrano che il modo in cui sono stati progettati i laboratori e, in particolare, le fasi delle discussioni collettive che miravano all'individuazione e alla descrizione, prima con il linguaggio verbale e poi con quello simbolico, di un algoritmo generale, ha portato un'evoluzione nelle modalità di spiegazione per più del 50% di questi studenti. Solo per il 32% di essi si è registrato un risultato negativo ovvero una regressione o l'uso costante di una modalità considerata "non algebrica" secondo quanto spiegato sopra. Quindi è possibile concludere che le fasi delle discussioni collettive hanno influenzato positivamente dal punto di vista dello sviluppo del pensiero algebrico, limitatamente a questo breve percorso, quasi il 70% degli studenti per cui si è potuto fare questo confronto.

L'ultimo aspetto del pensiero algebrico considerato in questo studio riguarda la relazione che questo ha con l'utilizzo di registri colloquiali o evoluti nella descrizione di un algoritmo. Il confronto dei gruppi scaturiti sulla base dell'evoluzione dei registri rispetto alle modalità di spiegazione fornite nel quesito di generalizzazione (si veda Figura 4.17) ha mostrato che gli 8 studenti che hanno sempre utilizzato un registro evoluto e 13 dei 15 studenti che hanno avuto un'evoluzione hanno fornito, nell'ultimo problema affrontato, modalità di spiegazione che indicano abilità di generalizzazione, ovvero la spiegazione a parole completa o la formula. Sulla base di questo risultato e dell'analisi dell'evoluzione nelle modalità di spiegazione degli studenti dei quattro gruppi (si veda Figura 4.18) è possibile quindi affermare che risultati positivi nell'utilizzo dei registri evoluti sono accompagnati, tranne per pochissimi studenti, da risultati positivi anche dal punto di vista dei processi di generalizzazione. È d'altra parte importante sottolineare che non valga il viceversa, infatti non accade che un andamento positivo nelle modalità di spiegazione sia proprio solamente dei gruppi che hanno un andamento positivo dal punto di vista dei registri. Anche nei gruppi di chi ha utilizzato sempre un registro colloquiale o di chi ha avuto un regresso nell'uso dei registri sono infatti presenti studenti che hanno avuto un'evoluzione dal punto di vista delle modalità di spiegazione e quindi delle attività del pensiero algebrico.

## 5.3 Sulle strategie

Le strategie contemplate a priori e applicate dagli studenti per rispondere ai quesiti aritmetici sono, come si è detto:

- strategie basate sul *disegnare e contare*,
- strategie *ricorsive* con cui il valore di un elemento della successione viene determinato sulla base di elementi precedenti,
- strategie basate sulla proprietà di *linearità* con cui il valore di un elemento della successione viene determinato applicando la proprietà additiva $f(n+m) = f(n)+f(m)$ o di omegeneità $f(kn) = kf(n)$ a partire da altri elementi già noti della successione,
- strategie *dirette* con cui il valore di un termine della successione viene determinato individuando la relazione fra la posizione dell'elemento della successione e il suo valore e applicando quindi la regola esplicita corrispondente.

Le strategie applicate nel corso dei quattro incontri con gli studenti delle prime sono state analizzate innanzitutto dal punto di vista della loro evoluzione, sia per quanto riguarda la variazione della frequenza di ciascuna strategia nei tre problemi somministrati, sia prendendo in considerazione la variazione di strategia degli studenti che hanno partecipato al primo e all'ultimo incontro.

In questo studio la definizione di *evoluzione* nelle strategie è stata formulata sulla base della definizione di attività del pensiero algebrico qui considerata ovvero qualunque attività che riguardi relazioni generali fra grandezze. In questo caso la relazione generale che scaturisce dai problemi sulle successioni è quella fra la posizione dell'elemento della successione e il suo valore, quindi una strategia è considerata più evoluta di un'altra se nella sua applicazione tale relazione è più esplicita.[1]

L'obiettivo delle discussioni collettive per quanto riguarda le strategie era dunque quello di indurre gli studenti ad applicare una strategia diretta, abbandonando invece quelle che fanno uso del disegno e quelle ricorsive. Per questo motivo si era ipotizzata a priori la diminuzione del numero di studenti che applicano le ultime due e l'aumento del numero di chi applica una strategia diretta, a prescindere dalle caratteristiche dei problemi utilizzati. I risultati ottenuti hanno però confutato in parte questa ipotesi infatti, se è vero che il numero di chi utilizza il disegno è diminuito azzerandosi nell'ultimo problema, lo stesso non si è verificato per le strategie ricorsive la cui frequenza è andata aumentando nel corso dei tre problemi. Anche le previsioni sulla frequenza delle strategie dirette sono state disattese poiché il numero di chi ha applicato questo tipo di strategia è rimasto pressoché costante. Il fatto che questo comportamento si ritrovi anche, separando i dati, in ciascuna classe dimostra che la variabile *insegnante*, diversa in tutte le classi, non ha influito in modo significativo sul tipo di strategia utilizzata in ciascun problema. Questi dati, insieme all'analisi delle caratteristiche dei problemi, hanno dimostrato che l'utilizzo di successioni aritmetiche in cui ogni termine della successione può essere individuato aggiungendo al precedente una ragione costante, e l'esplicitazione di questo procedimento di costruzione nel testo del problema hanno influenzato gli studenti dal punto di vista delle strategie utilizzate più di quanto abbiano fatto le discussioni collettive. Infatti, come si deduce da alcuni estratti delle discussioni e dei dialoghi nel lavoro in coppia, commentati nel Paragrafo 4.2.2, a pagina 143, non solo le strategie ricorsive vengono percepite come "più sicure" perché rispecchiano il procedimento di

[1] L'ordinamento delle strategie secondo questa definizione è schematizzato in Figura 4.16.

costruzione della successione ma, se la successione è di tipo aritmetico queste strategie sono le prime ad essere individuate e solo in alcuni casi c'è il tentativo, a volte senza successo, di trovare anche una strategia diretta.

Tabella 5.6: Frequenze degli andamenti delle strategie applicate per rispondere al quesito aritmetico.

| Andamento strategie | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| crescente | decrescente | costante non risp | costante disegno | costante ricorsiva | costante linearità | costante diretta |
| 24 | 20 | 2 | 0 | 11 | 0 | 24 |
| 30% | 25% | 2% | | 14% | | 30% |

Se si considera però l'evoluzione delle strategie per ciascuno studente si ha che, da questo punto di vista, il percorso ha avuto un'influenza positiva per il 60% degli 81 studenti presenti sia al primo che all'ultimo incontro. Nella Tabella 5.6, che riporta le frequenze dell'andamento delle strategie applicate da uno stesso studente, si legge infatti che 24 studenti hanno modificato la strategia applicata dal primo all'ultimo problema secondo un andamento crescente e altri 24 hanno utilizzato in entrambi i problemi una strategia diretta. Si ha inoltre che dei 20 studenti *decrescenti* solo uno passa dal disegno a non fornire alcuna risposta mentre tutti gli altri sono passati da una strategia diretta a una ricorsiva indotta, come si è detto, dal tipo di successione e dal testo del problema delle macchinine.

Oltre ad essere analizzate da un punto di vista temporale, i tipi di strategie applicati nei quesiti aritmetici sono stati confrontati con le modalità di spiegazione fornite per rispondere al corrispondente quesito di generalizzazione. I grafici riportati e commentati nel Paragrafo 4.2.2, a pagina 158, mostrano in primo luogo che gli studenti che utilizzano il disegno per risolvere i quesiti aritmetici sono caratterizzati da una bassa propensione alla generalizzazione visto che solo una coppia che nel problema degli stuzzicadenti ha utilizzato il disegno fornisce una spiegazione a parole completa. I dati relativi invece alle due modalità di spiegazione che sono qui considerate come indicatori di abilità nei processi di generalizzazione, ovvero la spiegazione a parole completa e la formula algebrica, mostrano che, in tutti e tre i problemi, gli studenti per cui si registra la frequenza maggiore per queste due modalità sono quelli che utilizzano una strategia diretta. Inoltre, a parte un'unica eccezione nel problema delle macchinine, tutti gli studenti che hanno fornito una formula avevano utilizzato una strategia diretta per rispondere al quesito aritmetico.

Anche l'attività con la terza, descritta nel Paragrafo 4.3, porta a risultati analoghi da questo punto di vista. Infatti gli unici studenti di questa classe che hanno fornito una spiegazione a parole completa (nessuno aveva fornito una formula) avevano applicato una strategia diretta per rispondere al quesito aritmetico.

Quindi per quanto riguarda il legame fra le strategie e i processi di generalizzazione, secondo i risultati di questo studio si potrebbe dire che la strategia diretta favorisca i processi di generalizzazione più di quanto non facciano le altre strategie individuate, in particolare per quanto riguarda la scrittura di un'espressione algebrica corrispondente all'algoritmo applicato.

I tipi di strategie applicati nei quesiti aritmetici sono stati messi in relazione anche con la terza variabile considerata in questo studio ovvero l'utilizzo di registri colloquiali o evoluti nella scrittura delle risposte ai quesiti di generalizzazione. Più precisamente i quattro gruppi, *costante colloquiale*, *costante evoluto*, *decrescente*, *crescente*, scaturiti dall'analisi delle variazioni dei registri, sono stati confrontati anche dal punto di vista delle strategie utilizzate dagli studenti che ne fanno parte. Ciò che scaturisce da questa analisi è il fatto che un andamento crescente dal punto dei registri è accompagnato, per la maggior parte dei casi, da un comportamento positivo, nel senso spiegato poc'anzi, anche per quanto riguarda le strategie. In generale però la distribuzione degli studenti che hanno andamenti positivi o negativi è simile nei quattro gruppi e questo porta alla conclusione che l'andamento (crescente, decrescente o costante) nelle strategie di uno studente non è determinato dal gruppo, ovvero dall'andamento nel registro, a cui lo studente appartiene.

## 5.4 Piste aperte

### 5.4.1 Difficoltà in algebra elementare: un ostacolo di origine epistemologica?

Alcuni autori (Vailati, 1908 ; Menghini, 1994 ; Ainley et al., 2003 ; Navarra, 2009 ; Assude et al., 2012 ; Chevallard & Bosch, 2012 ; Mercier, 2012) considerano le pratiche attualmente utilizzate nell'insegnamento una possibile causa della mancanza di senso delle espressioni e delle operazioni algebriche, attribuendo quindi a tali difficoltà il carattere di ostacolo di origine didattica.

Altri studi indicano inoltre una relazione fra lo sviluppo delle abilità di astrazione e generalizzazione, fortemente legate allo sviluppo del pensiero algebrico, e l'età degli studenti. L'ipotesi in questo caso è quindi che alcune difficoltà siano dovute all'ancora non completo sviluppo di queste capacità cognitive ovvero che sia presente un ostacolo di origine ontogenica.

Lo studio realizzato con gli studenti del primo anno della scuola secondaria di primo grado mostra che già all'età di 10-11 anni sono in grado utilizzare lettere per indicare una grandezza variabile e di costruire espressioni algebriche che descrivano un algoritmo di calcolo e quindi di comprendere il senso di un'espressione algebrica in questo senso. Quindi già a questa età gli studenti possiedono le capacità di astrazione necessarie ad affrontare il calcolo letterale dunque non sembra corretto affermare che le difficoltà in algebra, che nel sistema scolastico italiano viene presentata al terzo anno della scuola secondaria di primo grado, possano essere dovute all'incapacità di trattare le lettere come variabili o incognite. Quindi la mancanza di senso delle espressioni algebriche sembra non essere dovuta ad un ostacolo di origine ontogenica.

Durante le discussioni collettive è apparso chiaramente che, se guidati con opportune domande, gli studenti sono stati in grado di parlare in modo generale del termine di una successione e delle operazioni da applicare alla variabile e di descrivere questi algoritmi anche utilizzando espressioni algebriche. È quindi possibile che la mancanza di senso di queste ultime, annoverata fra le cause principali delle difficoltà in algebra, sia dovuta alle pratiche attualmente utilizzate dagli insegnanti per introdurre il calcolo letterale, ovvero che sia presente un ostacolo di origine didattica.

Ciò che ci si chiede ora è se, attuando nuove pratiche che siano orientate più verso il senso delle espressioni algebriche e verso le componenti delle generational activities, e global, meta-level activities del lavoro algebrico in classe, si possano superare le difficoltà nella componente transformational activities che sono quelle in cui si registrano gli errori più comuni e frequenti. Ovvero se nuove pratiche possano far insorgere spontaneamente la capacità di operare con e sulle variabili, ovvero eliminare il *cognitive gap* individuato da Herscovics e Linchevski (1994).

Fino a questo momento, in questo lavoro, non è stata presa in considerazione l'ipotesi che le difficoltà in algebra siano dovute ad un ostacolo di tipo epistemologico e gli studi esistenti considerati non sono stati qui analizzati da questo punto di vista. Se si intendono di origine epistemologica quegli ostacoli che "on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée" e "[o]n peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes" (Brousseau, 1983, pag. 108) allora si potrebbe interpretare in questo senso la seguente affermazione

> The history of algebra was presented here as a long sequence of acts of creation in which generations of mathematical objects of increasing abstractness were brought into existence. Students who learn algebra have to recreate these objects for themselves. [...] It is not surprising that what was far from easy for mathematicians invariably proved to be quite difficult for the learner. (Sfard, 1995, pag. 34)

La citazione riportata sopra si trova al termine di un excursus storico in cui Sfard confronta le difficoltà incontrate dai matematici nei momenti di genesi di nuovi oggetti matematici e evidenzia come tali difficoltà e tali momenti coincidano con quelli incontrati dagli studenti contemporanei.

Ma se si considera la concezione di Brousseau (1989) di ostacolo epistemologico che deriva da quelle di Bachelard (1938) e Duroux (1982) occorre tener conto di altri aspetti. L'ostacolo epistemologico descritto da Bachelard per le scienze empiriche è stato definito da Duroux per mezzo di una lista di condizioni necessarie:

i) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.

ii) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.

iii) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.

iv) De plus cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse ( ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de PIAGET). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.

v) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre. (Brousseau, 1989, pag. 42)

Secondo questa definizione le difficoltà in algebra elementare possono essere attribuite ad un ostacolo epistemologico se gli errori sono dovuti all'applicazione di una conoscenza pregressa che risulta corretta in un ambito già noto ma che, applicata all'algebra elementare fallisce.

Se per algebra elementare intendiamo, secondo il punto di vista comognitivista della Sfard, il primo *strato* dell'algebra ovvero il discorso sui numeri e sulle operazioni fra numeri che passano dall'essere processi ad essere oggetti di un discorso, allora le proprietà dell'algebra elementare, quelle che regolano le operazioni fra le espressioni algebriche, sono ancora le stesse proprietà dell'aritmetica. Quindi le conoscenze aritmetiche, che sono, insieme alla geometria euclidea, le uniche conoscenze matematiche apprese a scuola prima di incontrare l'algebra, valgono ancora nel nuovo contesto. D'altra parte, come già illustrato, molti sono d'accordo nel dire che alcune delle difficoltà in algebra sono dovute a interpretazioni diverse dei simboli o delle proprietà in aritmetica (ad esempio l'interpretazione unidirezionale del simbolo dell'uguale porta anche all'interpretazione unidirezionale delle proprietà delle operazioni quali la proprietà distributiva che giustifica, in un verso le moltiplicazioni fra polinomi e nell'altro il metodo del raccoglimento a fattor comune) che però, come mostrato da alcuni studi, dipendono dal modo in cui l'aritmetica viene insegnata. Quindi, anche tenendo conto di questo, non si può parlare di ostacolo epistemologico ma ancora una volta di ostacolo didattico.

Una proprietà utilizzata anche quando non valida dagli studenti di questo studio, è la proprietà di linearità. Come già detto, alcuni studenti, e non in un'unica classe, determinavano il numero di oggetti di un elemento della successione come somma degli oggetti di altri due oppure come multiplo degli oggetti di un altro elemento. Ovvero, detta $f$ la funzione che associa alla posizione dell'elemento nella successione il numero di oggetti di cui è composto, determinavano $f(n+m)$ calcolando $f(n)+f(m)$; oppure $f(2n)$ come $2f(n)$. Anche fra gli errori nella risoluzione di disequazioni individuati in questo studio compariva l'applicazione della proprietà additiva alla radice quadrata, errore che nello studio preliminare, era stato annoverato nella classe degli errori di origine epistemologica. Nella trattazione di espressioni algebriche non è raro imbattersi in scritture del tipo $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ e $(a+b)^3 = a^3 + b^3$. Potrebbe, anche questo tipo di errori, provenire dall'applicare una proprietà (la linearità) che funziona in un contesto già noto, in nuovi contesti? In tal caso, quali sono le occasioni precedenti del lavoro matematico in cui gli studenti hanno a che fare con funzioni per cui vale la proprietà di linearità? Ci sono altri errori frequenti e comuni che possono essere spiegati in questo senso? Per poter rispondere a queste domande e avere conferma dell'origine epistemologica di questo tipo di errori, sarebbe necessario uno sviluppo dello studio; sviluppo che dovrebbe approfondire, per esempio, due aspetti delle occasioni precedenti: a livello di scuola primaria nei numerosi studi esistenti del passaggio dal lavoro nell'ambito aritmetico delle strutture additive a quello delle strutture moltiplicative, e a livello di scuola secondaria negli studi sulla genesi e sullo sviluppo del concetto di funzione sia nelle ricerche in didattica che nelle ricostruzioni storiche.

### 5.4.2 L'influenza del lavoro in coppia

Nel Paragrafo 4.2.3 si è precisato che l'analisi della tipologia di registro utilizzata nelle risposte ai quesiti di generalizzazione è stata effettuata confrontando le risposte date da ciascuno studente al primo e al terzo problema. Le risposte al quesito di generalizzazione del secondo problema non sono state prese in considerazione in quanto la risoluzione in quel caso è il frutto di un lavoro di coppia e dunque il testo prodotto non poteva essere utilizzato per trarre conclusioni sull'evoluzione o meno della tipologia di registro utilizzata da un singolo studente. Ciò non toglie che un confronto fra tutti e tre i testi sia possibile e ciò che emerge in alcuni casi fa sorgere due domande. Nel caso in cui il secondo testo abbia caratteristiche diverse dagli altri due è spontaneo chiedersi: *cosa ha determinato questa differenza?* E per quegli studenti per cui c'è stata un'evoluzione, da colloquiale a evoluto, o una regressione, da evoluto a colloquiale, dal primo al terzo problema *il lavoro in coppia ha in qualche modo avuto un ruolo in questa variazione?*

In questo paragrafo non si pretende di dare una risposta a questi quesiti ma si vogliono illustrare alcuni esempi dei casi in questione.

Fra gli studenti che risultano avere un comportamento costante, o perché in entrambi i testi analizzati hanno usato sempre un registro colloquiale o sempre un registro evoluto, 5 hanno prodotto, per rispondere al quesito affrontato lavorando in coppia, un testo con caratteristiche diverse rispetto agli altri due. La composizione delle rispettive coppie di questi casi e la tipologia di registro utilizzata in ciascun problema sono illustrate nella Tabella 5.7 in cui è stato indicato con "e" il registro evoluto, con "c" il registro colloquiale, con "mr" la mancata risposta al quesito di generalizzazione, e con "ass" gli studenti assenti.

Come mostrato in tabella, tre di questi studenti, nel primo e nel terzo problema, hanno prodotto testi con caratteristiche dei registri colloquiali mentre il testo relativo al problema degli stuzzicadenti presenta più caratteristiche dei registri evoluti. Scaturisce naturalmente l'ipotesi che questa differenza sia dovuta alla collaborazione con il compagno: due di questi studenti hanno lavorato con altrettanti compagni che fanno parte del gruppo *decrescente* ovvero del gruppo di coloro che nel terzo problema delle macchinine hanno usato registri con più caratteristiche colloquiali rispetto al testo prodotto per il primo problema delle griglie quadrate. In questi due casi

Tabella 5.7: Schema dei registri utilizzati dalle coppie in cui uno studente ha mostrato un comportamento "anomalo" dal punto di vista dei registri, nel testo prodotto in coppia.

| | studente 1 | | | studente 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | primo problema | secondo problema | terzo problema | primo problema | secondo problema | terzo problema |
| COPPIA 1 | c | e | c | e | e | c |
| COPPIA 1 | c | e | c | e | e | c |
| COPPIA 3 | c | e | c | ass | e | e |
| COPPIA 4 | e | c | e | mr | c | mr |
| COPPIA 5 | e | c | e | c | c | c |

quindi, sebbene la collaborazione abbia da una parte portato un "anomalo" testo evoluto fra quelli di studenti *costanti colloquiali*, dall'altra è proseguita con un andamento decrescente.

L'altro degli studenti *costanti colloquiali* che, lavorando in coppia, aveva prodotto un testo più evoluto, aveva invece lavorato con uno compagno che non era presente al primo incontro ma che poi, nel terzo problema, ha utilizzato un registro evoluto.

Per due studenti che invece hanno utilizzato registri più evoluti sia nel primo che nel terzo problema è accaduto il contrario: il testo relativo al problema degli stuzzicadenti ha più caratteristiche dei registri colloquiali. Uno di questi due studenti aveva lavorato con un compagno che, negli altri due problemi, non aveva fornito alcuna descrizione dell'algoritmo utilizzato per i quesiti aritmetici, mente l'altro aveva collaborato con un compagno che, negli altri due problemi, aveva utilizzato sempre registri colloquiali. Anche in questo caso, i risultati negativi dei due compagni hanno influito sul registro utilizzato nella risposta al quesito di generalizzazione del secondo problema.

È quindi lecito chiedersi se in qualche caso la collaborazione di studenti con caratteristiche diverse abbia influito positivamente o negativamente sulle caratteristiche del terzo testo, prodotto successivamente nel lavoro individuale.

In alcuni casi studenti che nel primo problema avevano utilizzato un registro colloquiale hanno avuto un'evoluzione dopo aver collaborato con un compagno che invece ha prodotto nel primo e nel terzo problema sempre testi evoluti. Per altre coppie è accaduto che lo studente che nel primo problema aveva utilizzato un registro colloquiale abbia poi avuto un evoluzione mentre il compagno che nel primo problema aveva prodotto un testo più evoluto ha poi avuto una regressione nel terzo.

La collaborazione fra compagni che nel primo testo avevano utilizzato entrambi un registro colloquiale si è conclusa a volte con l'evoluzione di uno solo dei due, a volte con l'evoluzione di entrambi, altre volte tutti e due hanno continuato a produrre testi con caratteristiche dei registri colloquiali.

Anche per coppie formate da studenti che nel primo problema avevano prodotto testi dalle caratteristiche dei registri evoluti si sono verificate tutte e tre le possibilità.

Lo scopo di questo studio non era quello di analizzare come la collaborazione fra pari influisse sui registri utilizzati nelle risposte ai quesiti. È chiaro quindi che, per poter trarre conclusioni su questi aspetti, sia necessaria un'analisi più approfondita e più dettagliata che tenga eventualmente conto anche di aspetti di tipo culturale e sociale relativi alla provenienza degli studenti. Tali aspetti hanno certamente un ruolo fondamentale nello sviluppo di competenze comunicative degli alunni, ma non sono stati presi in considerazione in questo lavoro perché sono state esaminate quasi esclusivamente produzioni scritte. Nel caso di uno sviluppo dello studio che voglia prendere in considerazione l'incidenza dell'interazione tra pari, in coppia o in gruppo, tali aspetti andrebbero presi in considerazione insieme ad un dispositivo sperimentale che non si limiti ad esaminare un solo episodio di interazione. L'ipotesi che si può comunque formulare è che l'interazione fra pari, sia in coppia che in gruppo, prolungata nel tempo possa effettivamente portare effetti positivi dal punto di vista della tipologia di registri utilizzati dagli studenti. Uno studio condotto da Pesci (2014) con alunni di 12-13 anni, volto a verificare che l'interazione fra pari favorisca le abilità di argomentazione di studenti "bravi" in matematica, ha avuto risultati positivi in particolare per quanto riguarda alcuni degli indicatori utilizzati nell'analisi e che sono stati inseriti anche nella griglia impiegata in questo studio. Uno di questi indicatori riguarda il ragionamento condizionale rivelato dall'utilizzo di espressioni quali "se..., allora..." (forma esplicita) o di termini quali "quindi", "di conseguenza", "perciò" (forma implicita). Lo studio mostra una leggera variazione positiva, a seguito delle 18 attività di lavoro collaborativo, per quanto riguarda l'utilizzo della forma esplicita del ragionamento condizionale. Questo aspetto, nella griglia utilizzata nel presente studio per l'analisi dei registri colloquiali ed evoluti, corrisponde all'indicatore *Presenza di periodi ipotetici*. Il risultato ottenuto dallo studio di Pesci, quindi, secondo la griglia qui utilizzata, indica un'evoluzione nella categoria *Struttura del testo*. Da ciò è ragionevole ipotizzare che fra le concause dell'evoluzione in questa categoria dei registri, individuata per la maggior parte degli studenti del gruppo *crescente*, ci sia l'effetto positivo del lavoro collaborativo del secondo incontro. Uno studio sperimentale prolungato nel tempo analizzato con opportuni strumenti sarebbe comunque necessario a verificare tale ipotesi.

Un secondo dato positivo registrato nello studio sulle abilità argomentative di studenti bravi riguarda la "presenza di verbalizzazione" ossia di descrizioni e spiegazioni verbali delle componenti figurali o simboliche che costituiscono la strategia risolutiva "autonoma" applicata nella risoluzione dei problemi somministrati. Questo indicatore risulta significativo nel presente studio relativamente alle osservazioni riguardanti il gruppo degli studenti che hanno subito un regresso nelle caratteristiche dei registri: si ricorda infatti che in alcuni casi il regresso era dovuto ad un impoverimento della struttura e della sintassi dovuto al fatto che la risposta era formulata fornendo solamente l'espressione algebrica corrispondente all'algoritmo applicato nel quesito aritmetico senza alcuna spiegazione o argomentazione (si veda il Paragrafo 4.2.3). Lo studio sulle abilità argomentative ha mostrato una significativa evoluzione di questo indicatore. I risultati descritti riguardano, come si è detto, studenti "bravi" in matematica ma si può ragionevolmente ipotizzare che un'attività continuativa di interazione fra pari possa portare un'evoluzione nelle due componenti citate, per tutti gli studenti.

Queste osservazioni aprono quindi la strada verso ipotesi e domande riguardanti l'influenza della collaborazione fra pari nella tipologia di registri utilizzati per giustificare un procedimento seguito, ma anche nelle altre due variabili di interesse di questo studio ovvero le strategie di soluzione applicate nei quesiti aritmetici e le modalità di spiegazione utilizzate nei quesiti di generalizzazione legati, come più volte precisato, alle attività del pensiero algebrico.

# Bibliografia


Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2003). Designing tasks for purposeful algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 3rd conference of the european society for research in mathematics education.* (Disponibile on-line all'indirizzo http://www.mathematik.uni- dortmund.de/ erme/CERME3/Groups/TG6/TG6 ainley cerme3.pdf)

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005a). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(3), 191–215.

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005b). Purposeful task design and the emergence of transparency. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 17–24.

Arcavi, A. (1995). Teaching and learning algebra: Past, present, and future. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 145–162.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2001). From body motion to algebra through graphing. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, pp. 33–40).

Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège: atomisation et réduction. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 41–62). Grenoble.

Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. *Paris, Vrin.*

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for reasonings and notations developed by students. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the twelfth ICME study conference: The future of the teaching of algebra and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 69–78).

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 41–73.

Bessot, A. (1994). Panorama del quadro teorico della didattica della matematica in francia. *L'educazione Matematica*, *15*(1), 37–74.

Blanton, M., & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. part ii: Transforming practice on a district-wide scale. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th icmi study conference. the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 87–95).

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics.* Wiley & Sons. Inc.

Britt, M. S. (2001). Linear equations and introductory algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th icmi study conference. the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 103–109).

Brizuela, B. M., & Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th icmi study conference. the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 110–119).

Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de laryngologie otologie rhinologie*, *3*, 107–131.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, 41–64.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). Kluwer Academic Publisher.

Bulmer, M. (2001). Algebra in an age of numerical mathematics. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th icmi study conference. the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 136–139).

Campbell, S. R. (2001). Number theory and the transition from arithmetic to algebra: Connecting history and psychology. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), (pp. 147–154).

Carraher, D., Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2000). Bringing out the algebraic character of arithmetic: Instantiating variables in addition and subtraction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of te XXIV Conference of the International group of the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 2).

Carraher, D., & Schliemann, A. (2002). Modeling reasoning. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 295–304). Springer.

Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? In *Proceedings of te XXV Conference of the International group of the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–130).

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education (formerly Zentralblatt fur Didaktik der MAthematick*, *40*(1), 3–22.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51*, 45–65.

Chaachoua, H., Chiappini, G., Pedemonte, B., Croset, M.-C., & Robotti, E. (2012). Introduction de nouvelles représentations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre. , 253–281.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. du savoir savant au savoir enseigné* (Vol. 95). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2007). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007.*

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 19–40). La pensée sauvage.

Clark, A. (1997). *Being there: Putting brain, body, and world together again.* MIT press.

Coulange, L., Ben Nejma, S., Constantin, C., & Lenfant-Corbin, A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 57–79). Grenoble : La pensée sauvage.

Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J. L., & Robert, A. (Eds.). (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives.* Éditions La Pensée Sauvage.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2012). Educational processes in early algebra to promote a linguistic approach: behavior and emerging awareness in teachers. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 305–326). Grenoble : La pensée sauvage.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure.* Bordeaux : Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio: quadro teorico e idee per la didattica.* Pitagora.

Ferrari, P. L. (2007). Le radici linuistiche delle difficoltà in matematica. *Matematica e difficoltà : i nodi del linguaggio. Atti del Convegno Nazionale*

*"Matematica e Difficoltà" n.15*, 3–14.

Ferrari, P. L. (2012). Linguaggio, formalismo e costruzione del significato in matematica. In *Logica, linguaggio e didattica della matematica* (pp. 129–142). Grenoble : La pensée sauvage.

Ferrari, P. L., & Lunardi, L. (2005). Inventare notazioni per risovlere problemi. *L'insegnamento delle scienze integrate*, *8*(5), 451–474.

Filloy, E., & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought.(a clinical study with 12-13 years old). In *Proceedings of the 6 th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 51–56).

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 19–25.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Gola, E., & Adornetti, I. (2009). *Modelli e sistemi di comunicazione.* Editori riuniti University Press.

Grugeon-Allis, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne. (2012). Diagnostic et parcours differencies d'ensegnement en algebra elementaire. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 137–162). Grenoble : La pensée sauvage.

Haspekian. (2012). Apports et limites du tableur dans l'enseignement del l'algébre. questions d'instrumentation. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 123–136). Grenoble : La pensée sauvage.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hoch, M. (2003). Structure sense. In *Proceedings of the Terd Conference of the European Society for Research in Mathematics Educaion.* (Disponibile on-line all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/ didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_list.html)

Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 371–388.

Katz, V. J. (1997). Algebra and its teaching: An historical survey. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(1), 25–38.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons. *Proceedings of PME*, *18*, 157–175.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In *8th international congress on mathematical education: selected lectures: Sevilla 14-21 july 1996* (pp. 271–290).

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299–317.

Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 41–54.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 113–120.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, *40*(2), 173–196.

Menghini, M. (1994). Form in algebra: reflecting, with peacock, on upper secondary school teaching. *For the learning of mathematics*, *14*(3), 9–14.

Mercier, A. (2012). Vous avez dit "Algèbre"? In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 163–180). Grenoble : La pensée sauvage.

Navarra, G. (2009). Il Progetto ArAl. In F. Mura & S. Sini (Eds.), *Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico quaderno n. 7 attività in ambiente early algebra.* (Disponibile on-line all'indirizzo http://www.aralweb.unimore.it)

Pesci, A. (2014). Peer interaction for improving high students' argumentation ability in mathematics problem solving: Results from a study. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the 12th international conference "the future of the mathematics education in a connected world", september 21-24, 2014, Herceg Novi, Montenegro.*

Polo, M. (2000). Interpretare e gestire le risposte degli alunni nelle attività con la matematica. *La matematica e la sua didattica*, *4*, 423–437.

Polo, M. (2014). Introduzione. In P. Malloci, M. Polo, & D. Sanna (Eds.), *Matematica in laboratorio. problemi, costruzioni, strumenti e software per attività laboratoriali in classe.* CRSEM.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237–268.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. In (pp. 87–106).

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. In *Enseignement del l'algèbre élémentaire. bilan et perspectives* (pp. 107–124). Grenoble : La pensée sauvage.

Schliemann, A. D., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000). From quantities to ratio, functions, and algebraic relations. In *2000 aera meeting (22 pp.),* *new orleans, la.*

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15–39.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613.

Sfard, A. (Ed.). (2009). *Psicologia del pensiero matematico. il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo.* Trento : Erickson.

Vailati, G. (1908). Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane. In *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, 6–11 aprile 1908.*

Zan, R. (1998). Dalla correzione degli errori.... all'intervento sulle difficoltà. *Supplemento al n 10 del Notiziario UMI*, 12–28.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica.* Springer.

# Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno, in modi diversi, partecipato alla realizzazione di questa tesi, precisando che comunque ogni eventuale errore o imprecisione è di mia esclusiva responsabilità.

In primo luogo la Professoressa Maria Polo, supervisore della tesi, che mi ha incoraggiato ad intraprendere questo percorso e seguito in questi tre anni. Un ringraziamento speciale va a tutte le insegnanti e gli insegnanti che mi hanno accolto nelle loro classi e agli studenti che hanno partecipato alle sperimentazioni: senza di loro questa tesi non esisterebbe. Ringrazio le colleghe del CRSEM che, oltre al supporto morale, mi hanno donato tutta la loro esperienza acquisita in anni di sperimentazione in didattica della matematica. Un doveroso grazie va ai compagni di viaggio e coinquilini dell'aula dottorandi sempre pronti a fornire preziosi consigli. E infine ringrazio la mia famiglia che, seppur lontana, ha condiviso con me fatiche e gioie.

# Allegati

# Allegato A

# Trascrizioni della discussione sul problema delle griglie quadrate

## A.1 Estratti relativi alla fase b)

Tabella A.1: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima D durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora... prendiamo la domanda di Claudio... Diciamo che queste c'erano servite per rispondere alla domanda a) e alla domanda b) che abbiamo già discussio l'altra volta |
| | Ricercatore | *Proietta il quesito c) e lo legge a voce alta* |
| | Ricercatore | Alzi la mano chi è d'accordo con Claudio |
| | Nicola | Io non sono d'accordo |
| | Ricercatore | Perché? |
| | Non lo so... | |
| | Ricercatore | Lui dice: guarda Nicola se tu mi chiedi |
| | Nicola | [*Interrompe*] Ah no sì è possibile! È giusta! |
| | Ricercatore | Hai capito cosa chiede? |
| | Nicola | Sì s' non avevo capito la domanda. Dice che secondo lui è possibile scoprire il numero di quadretti di qualsiasi figura della successione |
| | Ricercatore | Ed è vero? |
| | Nicola | Sì |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 1 | Se sai la base e l'altezza |
| | Studente 2 | No basta sapere che numero di figure è |
| | Andrea | Secondo me... sono d'accordo con Claudio perché se ci danno... possiamo usare sia il metodo due[1]... però se mi dicono la figura 300... è un po' difficile aggiungendo sempre |
| | Ricercatore | E quindi cosa faresti? |
| | Andrea | Sapendo che il numero del lato è sempre uno in più di quello della figura... quindi 301 per 301 |
| | Ricercatore | ok quindi Andrea riuscirebbe comunque a trovare un metodo |
| | Ricercatore | Lucia tu sei d'accordo con Claudio? |
| | Lucia | *Fa cenno di sì* |
| | Ricercatore | E sei in grado di fare quello che dice Claudio? |
| | Lucia | Sì |
| | Ricercatore | E cosa faresti? |
| | Lucia | allora devo aggiungere... per determinare il numero di quadratini di una figura bisogna calcolarli |
| | Ricercatore | E come li calcoleresti? |
| | Lucia | Io ho fatto base per altezza |
| | Ricercatore | Ok tu hai fatto base per altezza... e sai quant'è la base e l'altezza per una figura qualsiasi? |
| | Lucia | No devo trovarla |
| | Ricercatore | Devi trovarla... E come la troveresti? |
| | Lucia | con le figure che ho... figura 4 poi figura 5... |
| | Ricercatore | Le disegni? |
| | Lucia | No calcolo fino ad arrivare alla figura |
| | | [...] |
| | Ricercatore | Giulia anche tu sei d'accordo con Claudio? |
| | Giulia | Sì |
| | Ricercatore | e la base e l'altezza come fai a saperle? |
| | Giulia | Quella cosa che ha detto Andrea prima |
| | Ricercatore | Quella cosa che ha detto Andrea... quindi col fatto del numero della figura? Ridimmela che non me la ricordo |

*continua nella pagina seguente*

[1]Si riferisce alla strategia ricorsiva.

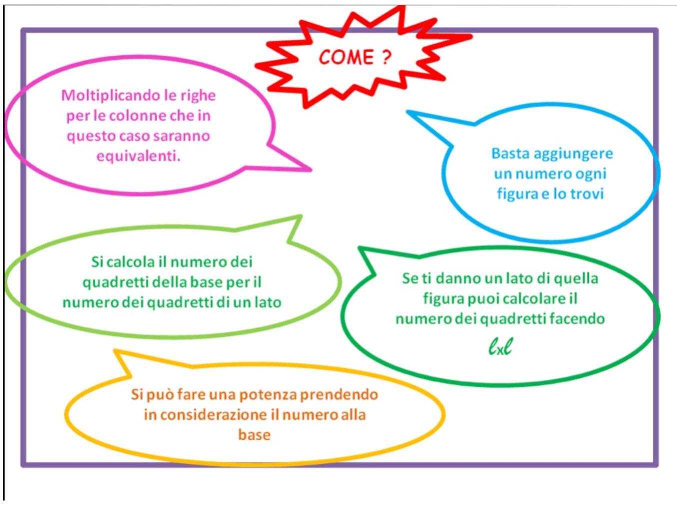
*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Andrea | Allora dato che sappiamo che ogni figura ha un quadretto in più |
| | Ricercatore | Un quadretto in più? |
| | Andrea | Nel senso la figura 3 4 quadretti, la figura 4 5 quadretti, la figura 330 avrà 301 quadretti e quindi facciamo 301 per 301 |
| | Ricercatore | ok. . . quindi tutti quanti avreste un modo per trovarlo? Serena? |
| | Serena | Anche io base per altezza[2] |
| | Ricercatore | Come lo determini quanto è la base e quanto è l'altezza per moltiplicarli? |
| | Serena | Aggiungere sempre un quadretto |
| | Ricercatore | Aggiungere sempre un quadretto a chi? Alla figura precedente? |
| | Serena | Sì |
| | Ricercatore | Ok va bene |
| | | [. . . ] |
| | Ricercatore | Ok allora facciamo così. . . fra le risposte che voi avete dato ce n'erano. . . erano corrette però magari gli mancava qualcosa. . . nel senso che. . . se una persona che non ha visto la successione vuole sapere come si determina il numero di quadretti. . . magari quelle che avete dati voi non so se sono proprio corrette. . . cioè se quella persona riesce poi a fare il calcolo. Io ve ne faccio leggere qualcuna e cerchiamo di capire come possiamo spiegare ad una persona che non ha visto la successione o che non sa cosa stiamo facendo come fare a determinare il numero di quadretti di una figura, va bene? *Viene proiettata la slide riportata sotto* |

*continua nella pagina seguente*

[2] "Base per altezza" era il modo in cui in questa classe veniva indicata la strategia diretta.

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*




| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Queste sono alcune delle cose che avete scritto che secondo me non sono sbagliate... vediamo cosa ne pensate voi |
| | Francesca | Io non ho capito la prima, quella viola |
| | Tommaso | Ti sta dicendo che devi moltiplicare le righe e le colonne... che in questo caso saranno equivalenti... che saranno uguali |
| | Ricercatore | È più chiaro Francesca ora che te lo ha spiegato Tommaso? |
| | Francesca | Sì un po' di più |
| | Ricercatore | Quindi questa... è giusto che si può trovare moltiplicando le righe per le colonne? Che sono uguali? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |
| | Andrea | Sì però te lo devono dare il numero di colonne e di righe |
| | Ricercatore | Qui c'è scritto solamente che bisogna moltiplicare le righe per le colonne, che è giusto, però che cos'è che non sappiamo? |
| | Andrea | Quante righe e quante colonne ci sono |
| | Ricercatore | Quante righe e quante colonne... cioè se lo dovete spiegare a qualcuno che lo vuole calcolare e non ha visto le figure... e voi gli dite: devi moltiplicare le righe e le colonne... lui ci riesce a determinare il numero di una? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Gaia | Gli devi dire come è fatta la figura 1 |
| | Gabriele | Gli devi dire base e altezza |
| | Ricercatore | Gliela dai tu? |
| | Gabriele | Sì |
| | Ricercatore | E cosa gli dici? |
| | Gabriele | Per la figura... che ne so... facciamo ... la figura... no una figura a caso ... è un rettangolo? |
| | Ricercatore | È di questa successione |
| | Gabriele | Sempre un quadrato? Ok allora la figura 500... 501... il lato è 501. Se lui sa che è un quadrato 501 per 501 |
| | Ricercatore | Però tu gli stai facendo già un pezzo del calcolo... glielo stai dando tu il numero del lato... noi vogliamo dirgli come fare lui a trovarlo |
| | Gabriele | Ae non ha il riferimento... se non sa che la figura 500 avrà 501 quadretti per lato... cioè se non c'è scritto |
| | Andrea | Basta dargli... per sapere la figura 500 bisogna fare un ragionamento logico perché se sai che la figura 1 ha sempre due quadretti quindi uno in più... basta che gli dai una figura minore di quella che deve calcolare e riesce a capirlo |
| | Ricercatore | Ok quindi tu dici: gli faccio vedere un'altra figura |
| | Andrea | Sì |
| | Ricercatore | Ok? c'è qualcuno che ha un'altra proposta? |
| | Francesca | nella figura 500 la base è di 501 |
| | Ricercatore | Quindi tu cosa gli diresti? |
| | Gabriele | Ma se non c'è scritto figura 500 e tu non gli dici che... che ne so tu ti trovi davanti un quadrato e non c'è scritto nulla... diviso in centimetri... come fai? |
| | Ricercatore | Francesca tu ad un ipotetico studente che passa di qua e non sa come è fatta la nostra successione, cosa puoi dirgli per spiegargli come fare a calcolare una figura qualsiasi? |
| | Francesca | Gli fai vedere il primo... la prima figura della successione |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Gabriele | E lui però come fa a sapere dov'è collocata nella successione quella figura? Cioè tu gli dai la uno ma la 500 lui non lo sa che quella è la 500! Sa che quella è la uno ma non sa che quella è la 500 |
| | Ricercatore | Gaia tu sei d'accordo con loro o riesci a spiegare ad una persona che sta fuori come fare a fare il calcolo? |
| | Studente 3 | Cioè qualcosa glielo devi dire... può essere la 800 la 3 la 8 |
| | Studente 4 | Però devi dargli... |
| | Gaia | Dirgli qual è la figura |
| | Gabriele | Ma se prima non lo sai tu? |
| | Gaia | Gli stai dando tu la figura |
| | Ricercatore | Gli stai chiedendo tu la figura, cioè la domanda è... qualcuno gli sta chiedendo: Claudio calcola la figura mmm... tu gli devi spiegare come fare a calcolarlo |
| | Gaia | Gli do il... Gli faccio vedere la prima figura e la seconda e la terza |
| | Ricercatore | Solo così si può fare? |
| | Gabriele | No gli fai vedere la figura... |
| | Ricercatore | Ok. Gabriele tu riesci a calcolare adesso il numero dei quadretti della figura 300? |
| | Gabriele | Allora... 301 per 301... |
| | Ricercatore | non fa niente se non fai il calcolo.. dimmi che calcolo fai? |
| | Gabriele | 301... Cioè se tu mi dici che è la figura 300 io so che sarà 301 quindi faccio 301 per 301 |
| | Ricercatore | E come fai a sapere che è 301? Te l'ho detto io? |
| | Gabriele | No però io l'ho capito perché avevo tutti i numeretti [3] però se l'altra persona non ha tutti i numeretti |
| | Ricercatore | E tu non riesci a spiegare all'altra persona come fare? Nello stesso modo in cui lo fai tu? |
| | Gabriele | Riesco a spiegarglielo però lei non avrà i numeretti |
| | Ricercatore | E cosa gli spieghi? |

*continua nella pagina seguente*

[3]Con i numeretti intende i numeri scritti sotto alle figure

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Gabriele | Se voglio usare figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 le spiegherò che ne so che se prende la figura 1, il lato della figura 1 avrà un quadretto in più rispetto al numero con cui è ordinata quindi avrà il lato di 2... oppure la figura 300 avrà un quadretto in più rispetto al numero con cui è ordinata quindi avrà un lato di 301 però se lui non ha i numeretti non può... cioè se lui non ha scritto sotto figura 1 figura 2 figura 3? |
| | Anna | [*Interrompendolo*] Io direi sia il quadrato azzurro sia il fumetto verde scuro però non ce n'è uno che dice precisamente come facciamo noi in classe... cioè "basta aggiungere un numerò alla figura" ma non lo trovi e poi fai il lato il numero... |
| | Ricercatore | Quindi Anna se ho capito bene tu uniresti questi due?[*Indica i due fumetti di cui parla Anna*] |
| | Anna | Sì, si aiutano a vicenda |
| | Ricercatore | Facciamo così se noi le uniamo queste due allora Claudio che passa in corridoio e gli diciamo: Guarda Claudio, se vuoi calcolare il numero di quadretti di una qualsiasi figura basta aggiungere un numero ogni figura |
| | Anna | E poi fare quel numero per se stesso |
| | Ricercatore | Il numero per se stesso... allora secondo voi |
| | Gabriele | [*Interrompendo*] Ma se lui trova figura 400 e sa come si fa è come se io gli stessi dando il lato |
| | Ricercatore | Gli state dando il lato? O gli state dando come calcolare il lato? |
| | Gabriele | Ma lui non troverà figura 400 sotto la figura che deve calcolare |
| | Ricercatore | Ma la domanda è... Quello che dice Claudio è: se tu mi chiedi una figura qualsiasi della successione io ti so dire come si calcola |
| | Gabriele | Eh ma una figura qualsiasi della successione non una qualsiasi figura |
| | Ricercatore | C'è scritto della successione |
| | Gabriele | Allora della successione gli spieghi come fa a calcolare la figura |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | E come glielo spieghi? |
| | Gabriele | Come ho detto prima: devi aggiungere uno al numero secondo cui è ordinata la figura quindi che ne so la figura 1 è ordinata con il numero 1 ma ha un lato di 2 perché devo aggiungere uno quindi che ne so la figura 300 è ordinata con il numero 300 e per ottenere il lato dovrò aggiungere uno quindi il lato è 301 |
| | Ricercatore | Ok? Mi sembra che funzioni... voi siete d?accordo con Gabriele o ci manca ancora qualcosa? Silvia secondo te ora che praticamente abbiamo aggiunto il fumetto blu... quindi riusciamo a spiegare a qualcuno come si fa a calcolare una figura qualsiasi? |
| | Silvia | Secondo me si |
| | Ricercatore | Cosa gli diciamo? Gli diciamo devi fare questo... Cosa deve fare? |
| | Silvia | Ehm? |
| | Ricercatore | Se adesso arriva un altro studente da un'altra classe e ti chiede: Silvia ma come fate a calcolare i numeri delle figure tu che cosa gli dici? |
| | Silvia | Basta sapere il lato |
| | Ricercatore | Eh ma il lato come fai a saperlo? |
| | Silvia | Glielo diamo noi |
| | Ricercatore | Glielo diamo noi? È necessario che gli diamo noi il lato? |
| | Andrea | No gli dici il numero della figura |
| | Ricercatore | Gli dici il numero della figura... E poi? Lui cosa deve fare? |
| | Andrea | E poi gli dici anche che il lato di ogni figura sarà uno in più... un quadretto in più al numero della figura |
| | Ricercatore | Ok, e poi cosa dovrà fare? |
| | Andrea | E poi fa... mettiamo che era la figura 500 quindi 501, diventa il lato, per 501 |
| | Io | ok? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore<br><br><br>Alessandro | Alessandro, tu adesso sei d'accordo col fatto che si può spiegare a qualcuno come fare a calcolare il numero dei quadretti?<br>Sì |
| | Ricercatore | E come glielo spiegheresti tu? |
| | Alessandro | Dandogli il numero della base o il numero della figura |
| | Ricercatore | E gli dai il numero della base o il numero della figura? |
| | Alessandro | È uguale |
| | Rocercatore | È uguale però quello che vuole sapere un compagno che entra è come faccio a calcolare il numero dei quadretti di una figura? Della figura. . . ? Di una figura qualsiasi? Tu gli dici: guarda se ti chiedono una figura qualsiasi devi fare questo? cosa gli spieghi? |
| | Alessandro | Che. . . Ma senza numero? |
| | Gabriele | No con il numero |
| | Ricercatore | Beh se qualcuno ti chiede? gli dai il numero. . . Qualcuno gli chiede di calcolare il |
| | Alessandro | [*Interrompendo*] Ah allora il numero lo sa? |
| | Gabriele | si è quello che dicevo io all'inizio |
| | Ricercatore | Il numero della figura lo sa |
| | Alessandro | Gli spiego che la base è sempre di uno in più rispetto al numero della figura e bisogna moltiplicarlo per l'altezza |
| | Ricercatore | E l'altezza quanto è? |
| | Alessandro | Lo stesso della base |
| | Ricercatore | Ok, quindi siamo d'accordo adesso che si può spiegare a qualcuno? Cioè se qualcuno sa il numero della figura riesce a calcolare il numero dei quadretti? |
| | Nicola | sì |
| | Ricercatore | Giusto Nicola? Quindi come deve fare qualcuno per calcolare il numero dei quadretti? |
| | Nicola | Allora. . . cioè |
| | Ricercatore | Se sa il numero della figura |
| | Nicola | Se sa il numero della figura? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Sì |
| | Nicola | Ah ok deve aggiungere un quadretto alla base e poi fai una moltiplicazione |
| | Studente 5 | E all'altezza |
| | Nicola | Uno all'altezza e uno alla base e poi fa la moltiplicazione |
| | Ricercatore | In che senso un quadretto alla base e un quadretto all'altezza? |
| | Nicola | Cioè allora se ha la figura 20 saprà che sicuramente all'altezza ci sono 21 quadretti alla base ci sono 21 quadretti e moltiplica 21 per 21 |
| | Ricercatore | Ok tutti adesso siete convinti? Mi sembra che questa cosa funzioni. Abbiamo dovuto unire un paio di queste [*Si riferisce alle risposte scritte nella slide*] e l'abbiamo trovata. Facciamo così: provate a scriverla voi nel quaderno... che cosa direste voi a qualcuno per spiegare, se sa il numero della figura, come fare a calcolare il numero dei quadretti? va bene? Provate a scriverlo |
| | | *Dopo 5 minuti quasi tutti hanno finito di scrivere e il ricercatore chiede chi vuole leggere la propria proposta* |
| | Nicola | Se la figura è per esempio 20 dovrà aggiungere un quadretto alla base e uno all'altezza così si moltiplicheranno 21 per 21 uguale 441, la figura quadrato e di 441 quadretti |
| | Ricercatore | Ok quindi lui gli sta dando la regola usando che cosa? |
| | Studente 6 | I numeri |
| | Andrea | Un esempio |
| | Ricercatore | Un esempio, giusto? I numeri... Se non vogliamo usare i numeri? Ce l'avete una senza numeri? |
| | Arrigo | Basta aggiungere un numero all'altezza e alla base e moltiplicare per se stesso |
| | Ricercatore | Bisogna aggiungere un numero all'altezza? E alla base? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Arrigo | Alla figura cioè... Basta aggiungere un quadretto alla fig... no un numero alla figura e moltiplicarlo per se stesso |
| | Ricercatore | Basta aggiungere un numero alla figura e moltiplicarlo... moltiplicare che cosa? |
| | Gaia | Un quadretto alla base e all'altezza e moltiplicarlo per se stesso |
| | Ricercatore | Però Gaia se tu... Allora un quadretto alla base... Basta aggiungere un quadretto alla base? In che senso alla base? |
| | Gaia | Che se la base è di quattro ne aggiungi uno |
| | Studente 6 | No basta aggiungere... basta che dici... basta aggiungere un quadretto in più al numero della figura e poi |
| | Studente 7 | Moltiplicarlo |
| | Gabriele | Per calcolare l'area di quadrati ordinati in ordine crescente alla base dei quali c'è un quadrato due per due ordinato come quadrato 1, si potrà facilmente intuire che il lato del quadrato di due quadretti, è superiore di un numero rispetto al numero con il quale è ordinato, dunque ci potremo rendere conto che questo vale per ogni numero dell?ordine ad esempio il quadrato 36 avrà il lato di 37, quadretti, sapendo che la figura in questione è un quadrato basterà moltiplicare il lato per se stesso per conoscere l'area |
| | Ricercatore | Allora c'è tutto in quella di Gabriele? |
| | Studente 6 | Veramente non si è capito niente |
| | Anna | Se si sa il numero della figura si aggiunge un'unità alla base e all'altezza, a quel punto si può calcolare il numero dei quadretti con lato per lato o base per altezza perché ... è la stessa cosa... e poi ho fatto l?esempio. |
| | Ricercatore | Voi... dite sempre che bisogna aggiungere uno, giusto? Allora io adesso vi chiedo... mi sembra che Gabriele è quello che l'ha scritto... più preciso... A chi è che devo aggiungere uno? |
| | Studente 7 | Alla base e all'altezza |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 6 | No basta che dici aggiungo un quadretto al lato |
| | Ricercatore | Un quadretto al lato? E il lato quanto è? |
| | Studente 6 | Eeeh... |
| | Gabriele | Aumento di uno cioè aggiungo... aumento... aggiungo uno al numero secondo il quale è ordinato il quadrato e quello dovrà essere il lato |
| | Ricercatore | Ok facciamo così... Decidiamo che questo numero secondo cui è ordinato il quadrato gli diamo un nome... è il numero della figura... il nome della figura... va bene Gabriele? |
| | Gabriele | Cioè in che senso il nome? Non stavo seguendo |
| | Ricercatore | Allora tu dici: il numero secondo cui è ordinata la figura |
| | Gabriele | sì |
| | Ricercatore | Allora facciamo che è come se fosse il nome? Per esempio qua [*Proietta nuovamente la slide in cui sono riportate le tre figure del testo*] questa figura è ordinata secondo il numero 3... allora la chiamiamo Figura 3, va bene? |
| | Gabriele | Ok |
| | Ricercatore | Allora parliamo del numero della figura... o del nome della figura... va bene? Così è più breve che dire "il numero secondo cui è ordinata la figura" che è corretto |
| | Ricercatore | Allora Francesca, a cosa lo aggiungiamo uno? |
| | Francesca | A una riga e una colonna |
| | Ricercatore | A una riga e una colonna? |
| | Altri | *Rispondono "no" tutti insieme* |
| | Andrea | Lo aggiungiamo al numero che dà il nome alla figura |
| | Ricercatore | Al numero che dà il nome alla figura! È vero? Che uno lo aggiungiamo al numero che dà il nome alla figura? |
| | Andrea | Si quindi per sapere il lato |
| | Ricercatore | Per sapere il lato? |
| | Andrea | Devi aggiungere... uno al nome della figura |

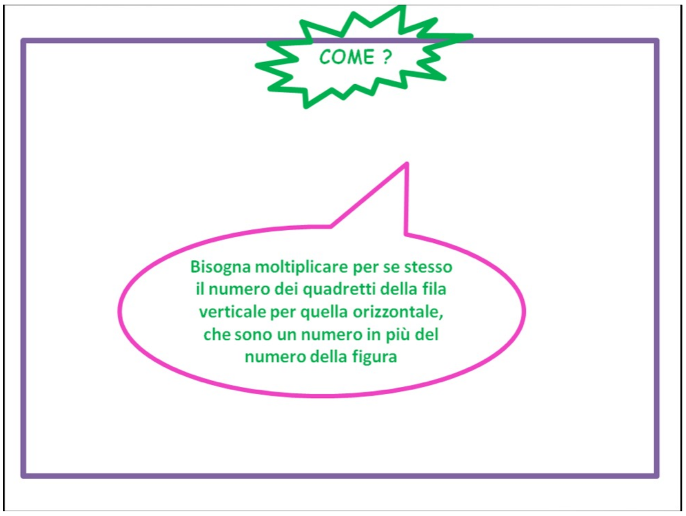
*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | È vero questo? Che per sapere il lato basta aggiungere uno al... Eugenio... secondo te? Quello che ha detto Andrea va bene? |
| | Eugenio | Che basta aggiungere un numero alla figura |
| | Ricercatore | Basta aggiungere uno al numero... |
| | Eugenio | Della figura |
| | Ricercatore | Che da il nome alla figura... al numero della figura |
| | Andrea | E si scopre il lato... E col lato possiamo calcolare l?area |
| | Ricercatore | E si scopre il lato... ora che ho il lato devo calcolare l?area. Cosa devo fare? |
| | Eugenio | Lato per lato |
| | Ricercatore | Quindi glielo possiamo dire così a una persona che passa? Se sai il numero della figura che cosa bisogna... Gaia se so il numero della figura che cosa devo fare? |
| | Gaia | Come in questo caso... devo aggiungere sempre due in pratica... |
| | Studente 6 | Uno! |
| | Gaia | Uno |
| | Ricercatore | Ok devo aggiungere uno a che cosa? |
| | Gaia | Alla base e all'altezza |
| | Ricercatore | Ma la base quanto è? |
| | Gaia | Se in questo caso è la figura 5 per esempio... alla base bisogna aggiungere... la base è sei |
| | Ricercatore | La base è sei... quindi vedi che tu non aggiungi alla base tu dici direttamente "la base è sei"... questo sei come l?hai ottenuto? |
| | Gaia | *Non risponde* |
| | Ricercatore | Aggiungendo uno a che cosa? |
| | Gaia | Alla... figura precedente |
| | Ricercatore | Alla figura precedente? |
| | Studente 7 | No alla base della figura precedente |
| | Andrea | No al nome della figura stessa! |
| | Ricercatore | L?hai aggiunto al nome della figura come dice Andrea? Se io ti dico: calcola il lato della figura 303... cosa fai? Quanto è il lato? |
| | Gaia | 304? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Che cosa hai fatto? Hai aggiunto uno a chi? |
| | Gaia | Al lato della figura precedente |
| | Tommaso | Alla base e all'altezza |
| | Altri | Al nome/Alla figura |
| | Andrea | Al nome della figura!! Quindi se la figura è 303 il lato sarà 304 perché devo aggiungere uno al nome della figura! |
| | Francesca | Aaah! |
| | Ricercatore | [*Mostrata la slide con la risposta che più si avvicinava a quella corretta*] Ce n'era un'altra... era sempre una di quelle che avevate scritto voi... vediamo un po' se questa è completa o se la possiamo aggiustare...<br> |
| | Ricercatore | *Legge a voce alta* |
| | Ricercatore | Magari noi lo stiamo dicendo al rovescio mi sembra... diciamo prima come trovare il lato e poi come trovare il numero dei quadretti.. però più o meno è quello che abbiamo detto adesso giusto? Ne scriviamo una che piace a noi? Che cosa gli diremmo a Claudio che passa in corridoio se sa il numero della figura? Come fare? Cosa gli diciamo... allora Claudio tu devi fare così |
| | Studente 6 | Per calcolare l'area |
| | Ricercatore | L'area... Va beh il numero dei quadretti diciamo |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 6 | Devi sapere il lato e per sapere il lato |
| | Ricercatore | Devi sapere il lato. Per sapere il lato? |
| | Studente 6 | Per sapere il lato devi... Aggiungere... |
| | Ricercatore | Ce lo dice Gaia... cosa devi aggiungere? |
| | Gaia | Uno |
| | Ricercatore | Uno... |
| | Gaia | Al nome della figura |
| | Ricercatore | Al nome della figura, ci piace? Va bene? |
| | Lucia | Va bene |
| | Ricercatore | Siamo d'accordo che basta fare questo? |
| | Gabriele | Al numero del nome della figura |
| | Ricercatore | Al numero del nome della figura? Al numero che c'è nel nome della figura? |
| | Alcuni | Sì |
| | Ricercatore | Ok va bene |
| | Ricercatore | E poi? |
| | Studente 7 | Fare la moltiplicazione |
| | Studente 8 | Moltiplicare per se stesso |
| | Studente 6 | Fare la potenza |
| | Ricercatore | Ok lo scriviamo in tutti e due i modi... Moltiplicare per se stesso chi però? |
| | Tutti | il lato |
| | Ricercatore | Oppure? |
| | Studente 9 | Oppure fai il lato al quadrato |
| | Ricercatore | È la stessa cosa fare il lato al quadrato oppure moltiplicarlo per se stesso? È la stessa cosa? |
| | Tutti | *Rispondono di sì* |
| | Studente 6 | Sarebbe elevato due |
| | Ricercatore | Elevato due cosa vuol dire? |
| | Tutti | Il numero per se stesso |
| | | *L'immagine sottostante mostra la slide prodotta al termine di questa discussione* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.1: continua dalla pagina precedente*

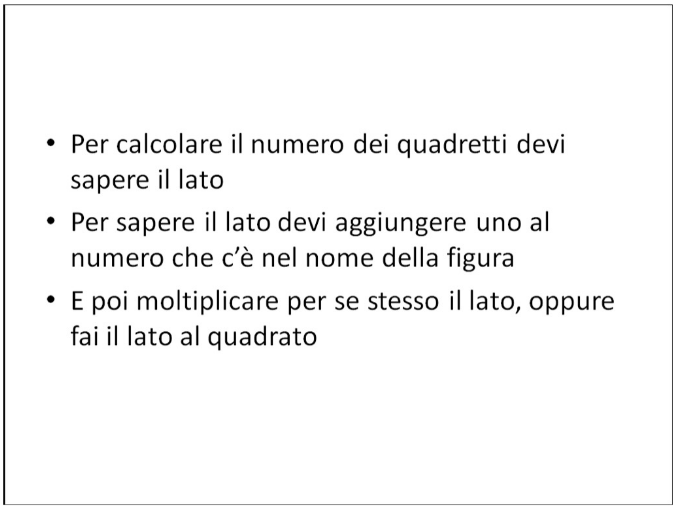
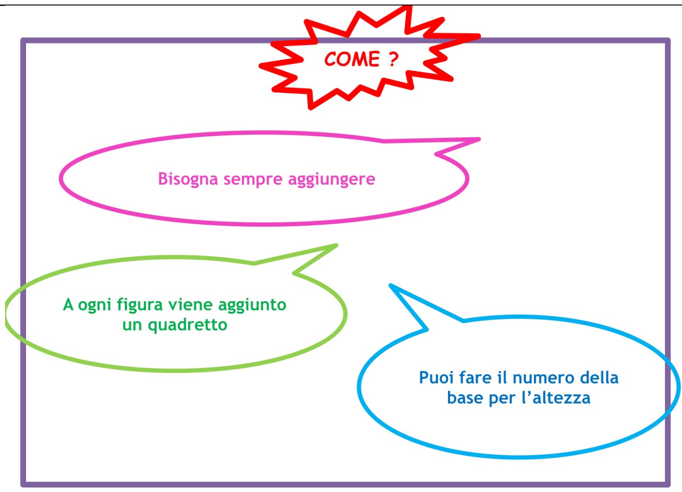
| | | |
|---|---|---|
| | |   |

Tabella A.2: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima E durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Benedetta tu sei d'accordo con Claudio? Tu ci riusciresti? Qualsiasi figura della successione riusciresti a dire di quanti quadretti è composta? |
| | Benedetta | Sì |
| | Ricercatore | E come faresti? |
| | | *Benedetta non risponde* |
| | Ilaria | Col metodo di oggi |
| | Ricercatore | Il metodo di oggi funziona per tutte le figure della successione? |
| | | *Rispondono di sì parlando tutti insieme* |
| | Ricercatore | Allora facciamo così.. cerchiano di spiegarlo bene il metodo di oggi, anche per quelli che non c'erano e anche per noi per chiarirci un po' le idee. Però anziché partire da zero vi faccio vedere che cosa ha scritto qualcuno di voi... vediamo se queste risposte ci piacciono o non ci piacciono o se le vogliamo aggiustare |
| | | *Viene proiettata la slide in figura* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.2: continua dalla pagina precedente*




| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | [*Leggendo una delle descrizioni nella slide*] Allora qualcuno dice: si ci riesco perché bisogna sempre aggiungere... Questa affermazione è sufficiente per dire cosa bisogna fare? |
| | Studente 1 | È giusta però non è sufficiente |
| | Ricercatore | È giusta perché bisogna sempre aggiungere ma non è sufficiente perché cosa manca? |
| | Alcuni | [*Parlando insieme*] Quanto/Cosa bisogna aggiungere |
| | Ricercatore | cosa devo aggiungere... quanto devo aggiungere... a che cosa lo devo aggiungere... giusto? Quindi manca qualche cosa... In quella verde c'è scritto: ad ogni figura viene aggiunto un quadretto... questa cosa vi sembra? |
| | Alcuni | [*Parlando insieme*] Falsa! |
| | Ricercatore | Alessia perché falsa? |
| | Alessia | Perché vanno aggiunti tutti i quadretti del bordo |
| | Ricercatore | Tutti i quadretti del bordo... quindi non è proprio vero che bisogna aggiungere un quadretto... Come la possiamo aggiustare? |
| | Studente 2 | E poi bisogna fare il numero della base per l'altezza |
| | Ricercatore | Manca anche questo |
| | | *Alcuni studenti notano che quella parte è scritta nel fumetto azzurro* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora questo c'è scritto in quella azzurra... in quella azzurra c'è scritto puoi fare il numero della base per il numero dell?altezza... questa è giusta? |
| | | *Rispondono di sì parlando insieme* |
| | Ricercatore | E ci basta? |
| | | *Rispondono di sì parlando insieme* |
| | Ricercatore | Quindi se dovete descrivere, se dovete spiegare a qualcuno che non ha visto le figure... e che non sa come sono fatte e gli dovete spiegare cosa deve fare per calcolare il numero di quadretti, basta che voi gli diciate: se ti chiedono una figura qualsiasi basta che moltiplichi il numero della base per il numero dell'altezza |
| | Studente 3 | No perché non sai quanto è la base e quanto è l'altezza |
| | Ricercatore | Non gli sto dicendo quanto è la base e quanto è l?altezza... giusto? Gli sto dicendo che li deve moltiplicare ma non gli sto dicendo... quanti quadretti ci sono, giusto? |
| | Ricercatore | *Propone a ciascuno di provare a completare le descrizioni nella slide scrivendo una proposta nel quaderno e poi invita gli studenti a leggere ciò che hanno scritto* |
| | Studente 4 | Prima devi sapere il numero della base e dell'altezza della figura e poi moltiplicare la base per l'altezza |
| | Studente 5 | Anch'io ho scritto la stessa cosa... Bisogna prima sapere la base e l'altezza e poi bisogna fare base per altezza... è uguale |
| | Ricercatore | Allora questa è completa? Per uno che vuole fare il calcolo? |
| | Viviana | Bisogna sapere il numero della figura nella successione, sapendo che il numero della figura è uguale a quello della base e dell'altezza più uno si possono moltiplicare la base e l'altezza e così ottenere il numero totale dei quadretti della figura. |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Michelle | La mia è un po' più sintetica. Ho scritto: basta fare il numero della figura più uno e poi fare base per altezza |
| | Ricercatore | Perché il numero della figura più uno cosa ci dà? |
| | Michelle | Il... Cioè... |
| | Studente 1 | Il numero dei quadretti che si trovano nella base e nell'altezza |
| | Ricercatore | È vero? |
| | Michelle | Sì |
| | Ricecatore | La prima operazione che dice Michelle ci serve per trovare il numero dei quadretti della base e dell'altezza così poi li posso moltiplicare... è come ha detto Viviana insomma... giusto? |
| | Ricercatore | *Chiede a Viviana di rileggere la sua proposta* |
| | Ricercatore | Ok lei precisa che facendo quell'operazione si possono sapere il numero dei quadretti della base e dell'altezza, c'è questa precisazione in più, che secondo me è utile cosa dite? Michelle anche il tuo è uguale... mancava questa precisazione ma va bene. Ognuno di noi aggiungerà un pezzettino finché non arriviamo a dirne una perfetta. C'è qualcuno che vuole leggere la sua? |
| | Studente 6 | Puoi fare il numero della base per quello dell'altezza ma prima bisogna aggiungere uno al numero della figura e poi moltiplicare. |
| | Ricercatore | Mi pare che sia sempre... è come quella di Michelle e come quella di Viviana... Qualcun altro vuole leggere la sua? |
| | | *Nessuno risponde quindi il ricercatore propone di leggere un'altra risposta scritta negli elaborati e proietta la slide nell'immagine sottostante* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | |   |
| | Ricercatore | Vediamo se questa ci va bene o se la possiamo aggiustare usando le cose che avete scritto |
| | Studente 3 | Io ho scritto: bisogna sempre aggiungere un quadretto alla base e all altezza rispetto al numero della figura e moltiplicare |
| | Ricercatore | Anche questa mi sembra completa |
| | Ricercatore | *Apre una slide vuota e propone di scriverne una nuova completa* |
| | Ricercatore | Come la iniziamo questa frase? Come le avete iniziate le vostre? |
| | Insegnante | Viviana come l'hai iniziata la tua? |
| | Viviana | Bisogna sapere il numero della figura nella successione |
| | Ricercatore | *Scrive nella slide bianca ciò che ha detto Viviana* |
| | Ricercatore | Poi una volta che sappiamo il numero della figura? Cosa dobbiamo fare? |
| | Tutti | *Parlando insieme* Aggiungere uno! |
| | Ricercatore | Bisogna aggiungere uno a che a che cosa? |
| | Tutti | *Parlando insieme* Alla base e all'altezza! |
| | Ricercatore | Dovete aggiungere uno a una cosa che sapete |
| | Studente 3 | Al numero della figura |
| | Ricercatore | Al numero della figura, giusto? C'è scritto bisogna sapere il numero della figura... poi cosa me ne faccio di questo numero della figura? |
| | Tutti | *Parlando insieme* Ci aggiungo uno! |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Aggiungo uno giusto? Quindi [*mentre scrive*] bisogna aggiungere uno... a che cosa? |
| | Tutti | *Parlando insieme* Al numero della figura! |
| | Ricercatore | Al numero della figura... ok e dopo che ho fatto questo cosa faccio? |
| | Tutti | *Parlando insieme* moltiplico la base per l'altezza |
| | Studente 7 | Moltiplico il numero per se stesso |
| | Ricercatore | Giusto? Il numero che mi è venuto lo moltiplico per se stesso... giusto? Se scrivo così si capisce? |
| | Tutti | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | È finito così? |
| | Tutti | *Rispondono di sì* |
| | | *La slide prodotta alla fine della discussione è riportata nella figura sottostante* |

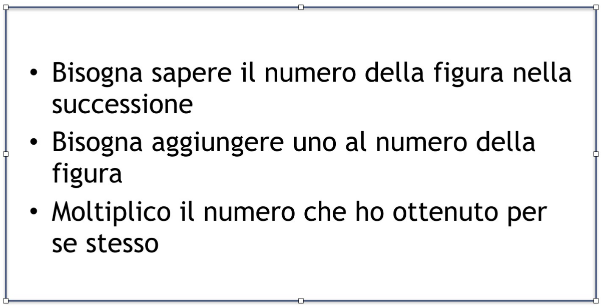



Tabella A.3: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima G durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora, vogliamo una risposta che sia condivisa da tutti. Qui c'è scritto "Sei d'accordo con Claudio? Spiega perché." Allora mi pare di capire che più o meno tutti, tranne Elena, siete d'accordo con Claudio, cioè voi diete che c'è un modo per calcolare il numero di quadretti per qualsiasi figura. Allora Elena vediamo se riusciamo a convincerti... o magari alla fine ci convincerai tu tutti quanti... chi lo sa? Se noi spieghiamo a Elena come si può fare forse la convinciamo... Però per non iniziare da zero io qua ho riportato un po' delle vostre risposte |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Viene proiettata la slide riportata nella figura sottostante<br>
</td></tr>
<tr><td></td><td>Alessandro</td><td>Io non sono d'accordo con una</td></tr>
<tr><td></td><td>Ricercatore</td><td>Con quale non sei d'accordo?</td></tr>
<tr><td></td><td>Alessandro</td><td>Eh con quella gialla: ad ogni figura aggiunge un quadretto, perché non è un quadretto sono tanti! Sono più di un quadretto!</td></tr>
<tr><td></td><td>Ricercatore</td><td>ok? allora la gialla dice ad ogni figura si aggiunge un quadretto... Alessandro dice non è vero perché ad ogni figura se ne aggiungono di più... è vero che se ne aggiungono di più?</td></tr>
<tr><td></td><td>Tutti</td><td>Parlando insieme rispondono di sì</td></tr>
<tr><td></td><td>Studente 1</td><td>Una fila semmai!</td></tr>
<tr><td></td><td>Alessandro</td><td>Eh ma non c'è scritto una fila! C'è scritto un quadretto!</td></tr>
<tr><td></td><td>Ricercatore</td><td>Allora la aggiustiamo? Come la dovremmo aggiustare?</td></tr>
<tr><td></td><td>Studente 2</td><td>Si aggiunge un numero di quadretti pari al numero di lati nel quadrato</td></tr>
<tr><td></td><td>Studente 3</td><td>Una fila!</td></tr>
<tr><td></td><td>Studente 4</td><td>Si aggiungono tot quadretti</td></tr>
</table>

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Tot quadretti. E così per esempio Antonella che non sa niente di questo problema se tu le dici... ad ogni figura devi aggiungere tot quadretti... Antonella tu ci riesci a contarli? A calcolarli? Se ti dice tot quadretti? |
| | Antonella | No |
| | Studente 1 | Devi aggiungere una fila orizzontale e una verticale! |
| | Augusto | Secondo me non bisogna toccare la figura però bisogna toccare il numero della figura... cioè figura uno... se è composta da due quadretti la prima figura, cioè la figura <u>uno</u>... |
| | Ricercatore | Quindi a che cosa bisogna aggiungere <u>un</u> quadretto? |
| | Studente 1 | Al numero della figura! |
| | Ricercatore | Al numero della figura? E cosa vuol dire? |
| | Studente 1 | Per esempio che quella 12 ha 13 quadretti di lato |
| | Arianna | Rispetto al numero della figura per lato |
| | Ricercatore | Allora facciamo così ... Arianna ha parlato di lato... facciamo così ne leggiamo un'altra |
| | Studente 1 | La verde scura |
| | Ricercatore | Ecco questa qui è collegata un po' a quella gialla e a quello che dice Arianna.. c'è scritto: Basta sapere di quanti quadretti è composto un lato... e poi si fa il numero dei quadretti di un lato per il numero dei quadretti di un altro lato... Allora... secondo voi questo è vero? Quindi se so il numero dei quadretti di un lato, lo posso saper il numero dei quadretti totali come c'è scritto qua? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |
| | Ricercatore | Però qua non c'è scritto come fare a sapere di quanti quadretti è composto un lato... giusto? |
| | Federica | In base al numero della figura |
| | Ricercatore | In base al numero della figura. In che senso Federica? |
| | Federica | Per esempio nella figura sempre 25... 26 |
| | Ricercatore | Quanti ce ne sono nella figura 25? Nel lato? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Federica | 26 |
| | Ricercatore | 26... Quindi cosa bisogna fare per saper il numero dei quadretti di un lato? |
| | Alessandro | ah aggiungere uno al numero della figura |
| | Ricercatore | ah aggiungere uno al numero della figura... Ci piace qesta cosa che ha detto Alessandro? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |
| | Ricercatore | ok quindi ... vediamo un po'... c'è qualcuno che vuole dire la frase intera? Anzi facciamo così... Antonella, che non c'eri, da questo che stiamo dicendo tu l'hai capito come fare a trovare il numero di quadretti di una figura qualsiasi? Cosa dovremmo fare secondo te? |
| | Antonella | Allora... bisogna sapere quanti quadrati ci sono in un lato e poi moltiplicarli |
| | Ricercatore | Ok e come facciamo? Ce l'abbiamo un modo per sapere quanti quadretti ci sono in un lato? |
| | Gioele | Usiamo come riferimento le prime tre figure perché nella prima figura ci sono due colonne ognuna di due quadretti e quindi si fanno per due e il risultato è quattro, il quadrato perfetto Nella figura due ci sono tre colonne di tre quadretti |
| | Ricercatore | Ok quindi come faccio a sapere quanti quadretti ci sono in un lato di una figura qualsiasi? |
| | Studente 1 | Calcolandola |
| | Ricercatore | E come lo calcolo? |
| | Studente 1 | Facendo la moltiplicazione |
| | Ricercatore | Quello per saperli tutti, ma per sapere i quadretti di un lato? |
| | | *Parlano tutti insieme dicendo che bisogna aggiungere uno* |
| | Studente 1 | Aggiungi uno al numero del lato |
| | Altri | *Parlando tutti insieme* Al numero della figura! |
| | Studente 5 | Si aggiunge sempre un... un quadretto al numero della figura come se... |
| | Ricercatore | E cosa ottengo? |
| | Studente 5 | La figura... |
| | Studente 1 | Mille! La figura mille sarà milleuno |

*continua nella pagina seguente*

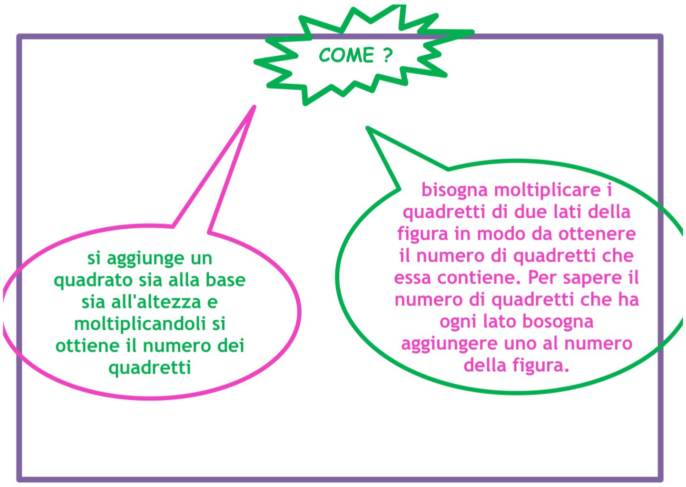
*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | I quadretti di tutta la figura? |
| | Studente 1 | Di un lato |
| | Federica | Allora... per sapere come avviene la successione bisogna sapere il numero della figura che ti serve e aggiungere un numero al numero della figura |
| | Ricercatore | E poi? |
| | Federica | Si capisce qual è il numero dei lati poi bisogna moltiplicarli e si ottiene il totale dei quadretti |
| | Ricercatore | Ci piace come ha detto Federica? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |
| | Ricercatore | *Propone che ciascuno scriva nel quaderno la risposta completa e dopo alcuni minuti chiede di leggere le risposte* |
| | Studente 6 | Per esempio nella figura 7 ci saranno 8 quadretti perché bisogna aggiungere un quadrettino in questo caso orizzontale e verticale |
| | Ricercatore | Ci piace? O manca qualcosa? |
| | | *Rispondono tutti insieme che manca qualcosa* |
| | Studente 7 | Io ho scritto facendo la moltiplicazione e aggiungendo un quadretto al numero della figura |
| | Gioele | Moltiplicando e ottenendo il prodotto al numero di quadretti al numero della figura si arriverà a sapere il loro numero |
| | Ricercatore | Questo ci basta quello che ha scritto Gioele o manca qualcosa? |
| | | *Alcuni rispondono che manca qualcosa* |
| | Studente 8 | Per calcolare il numero dei quadretti di un quadrato basta applicare la regola della sua area... area uguale lato per lato |
| | Ricercatore | Questo? È sufficiente? |
| | | *Alcuni rispondono che manca qualcosa* |
| | Federica | Per scoprire una successione di figure bisogna sapere il numero della figura che dobbiamo sapere e infine bisogna moltiplicare il numero dei quadretti in orizzontale e in verticale e si scopre il numero totale dei quadretti. |
| | Ricercatore | Questa? Siete d'accordo con questa? O ci manca qualcosa anche qui? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Alessandro | Per trovare il numero di quadretti per lato di una figura bisogna aggiungere uno al numero della figura, dopodiché moltiplichiamo il numero che abbiamo trovato ovvero il numero di quadretti per lato per un altro lato e otteniamo il numero di quadretti che formano il quadrato. |
| | Mattia | È simile alla mia: bisogna sapere con una formula F di figura Q quadretti e la formula è F tre uguale 4 quadretti e quanti quadretti ci sono in una riga |
| | Ricercatore | Ok Mattia ha scritto più o meno quello che ha scritto Alessandro però lui lo ha spiegato con un esempio… giusto? |
| | Ricercatore | *Propone di commentare altre due risposte e proietta la slide riportata nella figura sottostante* |




| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | *Legge a voce alta il fumetto a sinistra* |
| | Ricercatore | Cosa dite questa è sufficiente per sapere quanti quadretti ci sono? |
| | | *Alcuni rispondono di no* |
| | Ricercatore | Cosa manca? |
| | Studente 9 | Dovrei aggiungere in ogni riga un quadrato |
| | Ricercatore | In ogni riga un quadrato… quindi dovrei dire che devo aggiungere uno.. a che cosa lo devo aggiungere uno? |
| | Studente 7 | Alla figura |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.3: continua dalla pagina precedente*

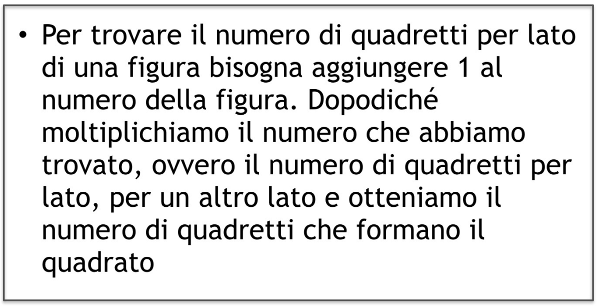
| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Al numero della figura e ottengo il numero dei quadretti del lato... come diceva Alessandro |
| | Ricercatore | *Propone di leggere anche l'altro fumetto e di provare poi a scriverne uno che vada bene per tutti* |
| | Federica | [*Riferendosi al secondo fumetto*] Sì questa è la più giusta |
| | Ricercatore | Allora cosa dite? Quale possiamo prendere? Fra tutte quelle che abbiamo detto? |
| | Federica | Alessandro |
| | | *La figura sottostante mostra la slide prodotta alla fine della discussione*   |

Tabella A.4: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima I durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | | *Viene proiettato e letto a voce alta il quesito c)* |
| | | *Rispondo in coro di essere d'accordo* |
| | Ricercatore | Ok, quindi vuol dire che tutti quanti riuscite a fare quello che dice Claudio? |
| | Tutti | *Rispondono sì* |
| | Ricercatore | E come potete fare? Giacomo ad esempio... |
| | Giacomo | Se mi dà il ... Cento possiamo fare 101 per 101 |
| | Ricercatore | Ok. Riccardo secondo te Claudio ha ragione? |
| | Riccardo | Sì |
| | Ricercatore | Quindi sei in grado di calcolare il numero di quadretti di qualsiasi figura di questa successione? |
| | Riccardo | Sì... Anche se è gigantesco... potrei metterci un'ora |
| | Ricercatore | Perché? Cosa dovresti fare? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Riccardo | Bisogna aggiungere uno e poi moltiplicare il numero per se stesso |
| | Lorenzo | Elevarlo per due in buona sostanza |
| | Ricercatore | È vero che è la stessa cosa? Perché Riccardo dice: e poi moltiplicarlo per se stesso e invece Lorenzo dice elevarlo per due |
| | Lorenzo | È la stessa cosa |
| | Ricercatore | È la stessa cosa? |
| | | *Alcuni rispondono di si* |
| | Ricercatore | Quindi cerchiamo di scrivere una risposta per Claudio. Cioè cerchiamo di scrivere che cosa bisognerebbe dire ad una persona per fare quello che dice Claudio, ad una persona che non ha visto le nostre figure e non ha sentito la nostra discussione |
| | Giacomo<br>Ricercatore | Allora bisogna... si può... è possibile che... si può fare tutte le successioni di figure perché tutti i numeri sono infiniti quindi tutte anche tutte le figure sono infinite<br>Ok. e come bisogna fare per calcolare il numero dei quadretti? |
| | Giacomo<br>Ricercatore | Col metodo più uno cioè ad esempio, c'è la figura 1000 bisognare fare 1001 per 1001... ci metti un po' ma lo puoi fare<br>Matteo D., tu sei d'accordo adesso con Claudio? |
| | Matteo D. | Sì |
| | Ricercatore | E come si fa a determinare... Qual è il metodo che si può usare? |
| | Matteo D. | Io uso più uno [*Si riferisce alla strategia diretta*] Aggiungendo più uno al numero della figura |
| | Matteo D. | Elevandolo per se stesso |
| | Studente 1 | Elevandolo per due! |
| | Matteo C. | Elevandolo per se stesso?! E cos'è? |
| | Ricercatore | Quindi moltiplicandolo per se stesso che vuol dire elevandolo...? |
| | Matteo D. | Per due |
| | Ricercatore | Per due |
| | Ricercatore | Facciamo così, vi faccio vedere alcune cose che avete scritto voi e le commentiamo |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *Viene proiettata la diapositiva riportata di seguito*<br><br> |
| | Studente 3 | Il viola e quello giallo scuro sono sbagliati |
| | Ricercatore | allora il viola e quello giallo scuro sono sbagliati. . . siete tutti d'accordo? |
| | | *Rispondono di sì* |
| | Gabriele S | È la stessa cosa praticamente |
| | Ricercatore | Allora Gabriele dice: è la stessa cosa? C'è scritta la stessa cosa? |
| | Davide | Sì ma è espresso in modo diverso |
| | Ricercatore | Davide in che senso è espresso in modo diverso? |
| | Davide | Comunque lui fa un esempio e lui invece dice la risoluzione |
| | Ricercatore | Ok. . . Allora è vero quello che dice Davide? È vero che dicono la stessa cosa? |
| | | *Rispondono di si* |
| | Ricercatore | Però questo lo dice usando un esempio invece questo lo dice. . . |
| | Davide | La risoluzione |
| | Ricercatore | La risoluzione. . . chiamiamola così |
| | Nicolò | Fare 15 per 15 o elevato due è la stessa cosa |
| | Lorenzo | Però è sbagliato |
| | Ricercatore | Lorenzo è sbagliato. . . Perché? |
| | Lorenzo | Perché 15. . . La figura 15 avrà 16 quadrati di lunghezza e 16 quadrati di larghezza |
| | Ricercatore | Ok e quindi non bisognerà fare 15 per 15 ma |
| | | *Rispondono 16 per 16* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ok quindi siamo d'accordo che queste sono uguali, sono sbagliate ma sono dette in modo diverso |
| | Matteo C. | Potrei scrivere la formula |
| | Ricercatore | Ok finiamo questo e poi scriviamo sul quaderno. Qualcun altro vuole dire qualcosa? |
| | Matteo P | Io non ho capito quella giallo scuro, non riesco a capire quello che dice |
| | Nicolò | Numero intende numero di figura |
| | Ricercatore | Allora Nicolò dice che per numero intende il numero di figura... cioè manca una parola per spiegarlo bene cioè: basta prendere il numero della figura ed elevarlo... cosa manca? |
| | Studente 4 | Per due |
| | Ricercatore | Per due o alla seconda... Ok? |
| | Riccardo | Quella gialla chiara e quella celeste dicono la stessa cosa in modo diverso |
| | Ricercatore | Allora quella gialla chiara e quella celeste indicano la stessa cosa? |
| | Ricercatore | *Legge le due risposte a voce alta* |
| | Giacomo | No, l'hanno detta nello stesso modo |
| | Matteo C | Usano semplicemente un altro esempio |
| | Ricercatore | Ok... tutti e due usano esempi dunque? |
| | Tutti | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | Quindi qua abbiamo tre che usano esempi, due giusti e uno sbagliato, invece uno non usa un esempio usa... la soluzione ha detto Davide, usa la soluzione |
| | Studente 5 | Però è sbagliata |
| | Ricercatore | Però è sbagliata? Riusciamo a scrivere nel quaderno la risoluzione, cioè senza esempio, però quella giusta? |
| | Studente 5 | Eh ma dipende da che metodo |
| | Ricercatore | Scegliamo il metodo... Quale metodo vogliamo usare? |
| | Tutti | Più uno![4] |
| | Studente 6 | Ma il più uno è già stato scritto |

*continua nella pagina seguente*

[4]Si riferiscono alla strategia diretta.

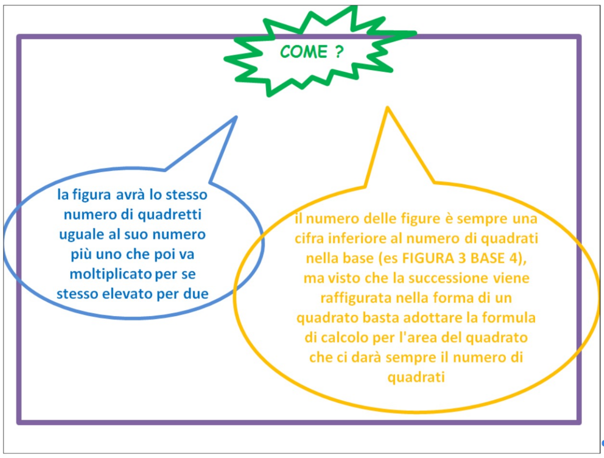
*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Però è stato scritto usando che cosa? |
| | Studente 7 | Un esempio |
| | Ricercatore | Un esempio... Noi vogliamo una spiegazione senza l'esempio |
| | Giacomo | Allora è più facile più due[5] |
| | Ricercatore | Giacomo se secondo te è più facile scrivere il più due, scrivi quello |
| | Ricercatore | Sono stata chiara a spiegarvi cosa voglio che facciate? |
| | Studente 8 | Una risoluzione senza esempio |
| | Ricercatore | Cioè: pensate che passa uno in corridoio e non sa cosa abbiamo fatto e gli dovete spiegare bene come fare a calcolare il numero dei quadretti senza usare un esempio |
| | Ricercatore | *Dopo alcuni minuti chiede se qualcuno vuole leggere ciò che ha scritto* |
| | Giacomo | Bisogna aggiungere al numero della tabella un numero in più e poi bisogna moltiplicare |
| | Ricercatore | Cosa dite? Se lo diciamo a uno che passa in corridoio? Ci capisce? |
| | Alcuni | *Rispondono di no* |
| | Nicolò | Per ottenere il numero dei quadretti di una figura basta guardare il numero della figura e aggiungere uno ai lati dell'altezza e della lunghezza e poi moltiplicarli poiché la figura, essendo un quadrato, basta moltiplicare un lato per se stesso |
| | Alcuni | Osservano che la spiegazione di Nicolò è troppo lunga |
| | Gabriele S. | Basta prendere il numero della figura e moltiplicarlo per se stesso però prima di farlo dobbiamo aggiungere uno alla cifra |
| | Laura | Per capire quanti quadretti ci sono in una figura bisogna aggiungere 1 alla lunghezza e alla larghezza e poi bisogna moltiplicare il numero per se stesso |
| | Ricercatore | Cosa dite? Questo va bene? |
| | Lorenzo | Basta aggiungere uno al numero della figura e elevarlo per due |

*continua nella pagina seguente*

[5] Si riferisce alla strategia ricorsiva.

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ah questa è molto concisa. . . Secondo voi c'è scritto tutto in quella di Lorenzo? |
| | Alcuni | Rispondono sì |
| | Gabriele G | Basta prendere il numero della figura e aggiungergli uno e moltiplicare il numero modificato per se stesso |
| | Ricercatore | Moltiplicare il numero modificato per se stesso. . . che è come quello di Lorenzo . . . però Lorenzo cosa aveva scritto? |
| | Lorenzo | aggiungere uno al numero della figura e elevarlo per due |
| | Ricercatore | Elevarlo chi? |
| | Lorenzo | elevarlo per due |
| | Ricercatore | Chi è che bisogna elevare alla seconda? |
| | Lorenzo | Il numero modificato, il numero della figura più uno |
| | Ricercatore | Il numero della figura più uno bisogna elevarlo alla seconda oppure bisogna moltiplicarlo per se stesso. Ok ora ne scriviamo una che ci va bene per tutti? Anzi prima vi faccio vedere. . . Vediamo se queste vi piacciono. . . sono vostre. . . prendiamo tutte quelle che abbiamo detto e poi ne scriviamo una che ci va bene per tutti |
| | | *Viene proiettata la seguente slide con altre risposte scritte la volta precedente*   |
| | Studente 9 | Ma la c'è l'esempio |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | I n quale? |
| | Studente 9 | In quella gialla |
| | Ricercatore | Se togliamo la parentesi va bene? |
| | | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | È lunga però? Secondo voi se la diciamo a qualcuno ci riesce a calcolarli? |
| | Gabriele G. | *Alza la mano per chiedere la parola* |
| | Ricercatore | Gabriele G., la prima cosa che bisogna fare cos'è? |
| | Gabriele G | Bisogna aggiungere alla figura uno |
| | Lorenzo | Al numero della figura |
| | Ricercatore | Al numero della figura, siamo d'accordo? |
| | Riccardo | Al numero del quadrato è più preciso |
| | | *Gli altri bocciano subito la proposta di Riccardo* |
| | Ricercatore | *Scrive la prima frase nelle slide* |
| | Ricercatore | Bisogna aggiungere al numero della figura uno, questo è vero? |
| | | *Rispondono di si* |
| | Ricercatore | E poi? |
| | Gabriele G | Bisogna prendere la figura e moltiplicarla per se stessa |
| | Ricercatore | Ma la figura si può moltiplicare? |
| | Giacomo | Dopo che ha scritto della figura uno, bisogna scrivere solo: poi bisogna moltiplicare |
| | Ricercatore | Allora scrivo... poi bisogna? |
| | Giacomo | Moltiplicare |
| | Ricercatore | E che cosa? |
| | Giacomo | Il numero della tabella, più uno |
| | Valeria | Ma c'è scritto: bisogna aggiungere alla Figura uno, e poi non c'è scritto niente |
| | Ricercatore | Ok facciamo così: bisogna aggiungere uno al numero della figura. Così si capisce? |
| | | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | E poi bisogna moltiplicare... Però bisogna dire cosa dobbiamo moltiplicare |
| | Valeria | Elevare per due il numero trovato |
| | Ricercatore | Così va bene? Secondo voi così è giusto? |
| | Ricercatore | *Rilegge la frase costruita* |
| | | *La maggior parte risponde che va bene* |

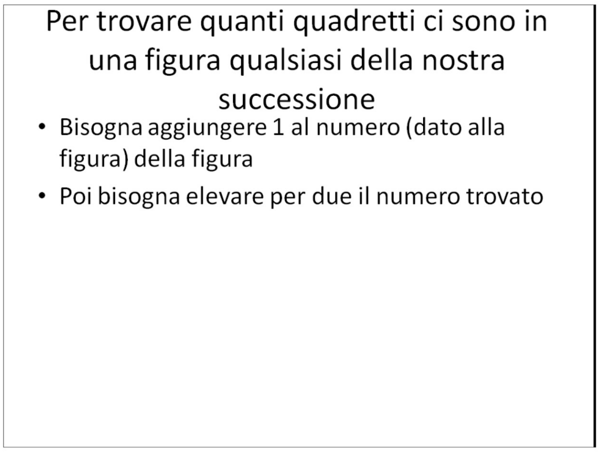
*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Matteo D | Secondo me bisognerebbe dire il nome della figura |
| | Studente 10 | Il numero dato alla figura |
| | Ricercatore | Il numero dato alla figura? |
| | Matteo D | Secondo me il numero che fa da nome alla figura |
| | Ricercatore | *Propone di scriverlo in due modi e che ognuno scelga come chiamare il numero della figura* |
| | Gianmarco | Io nella seconda cosa che abbiamo scritto c'è scritto poi bisogna elevare per due il numero trovato... Io non so se è finita così però bisogna dire anche che cosa dobbiamo trovare |
| | Ricercatore | Ah ok... Scriviamo prima a cosa serve questa regola? |
| | Gianmarco | Sì |
| | Ricercatore | A cosa serve? |
| | Gianmarco | A trovare i quadretti? |
| | Ricercatore | Lo scriviamo nel titolo? Quindi per trovare? Che cosa? |
| | Gianmarco | In questo caso i quadretti? |
| | Ricercatore | Il numero di quadretti? Quanti quadretti? Per trovare quanti quadretti ci sono dove? |
| | Gianmarco | Nella figura |
| | Studente 11 | Che compongono la figura |
| | Ricercatore | ma quale figura? |
| | Studente 12 | Qualsiasi |
| | Studente 13 | Una figura qualsiasi |
| | Ricercatore | Una figura qualsiasi? |
| | Studente 14 | No la nostra! |
| | Ricercatore | Una figura qualsiasi della successione nostra? |
| | Studente 14 | Della nostra successione |
| | | *La diapositiva creata è mostrata nell'immagine seguente* |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.4: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | |   |

## A.2 Estratti relativi alla fase d)

Tabella A.5: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima D in cui avviene il passaggio fra gli esempi e la scrittura della formula algebrica.

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora Tommaso, se devo dire a Claudio come calcolare una figura qualsiasi. . . cosa gli scrivo? Gli devo scrivere un messaggio piccolo. . . |
| | Tommaso | Ma senza numeri cioè una figura. . . |
| | Rocercatore | Qualsiasi |
| | Tommaso | *Non risponde* |
| | Ricercatore | Allora facciamo così: visto che a te non l'ho ancora chiesto e ci manca la 99. . . la 99 con questo metodo come lo scrivo? |
| | Tommaso | Aperta parentesi tonda, 99 più 1, chiusa parentesi tonda, tutto elevato due |
| | Ricercatore | E per una figura qualsiasi come faccio? |
| | Tommaso | fig qualsiasi + 1 tutto elevato due |
| | Alcuni | *Propongono $x$* |
| | Alcuni | *Propongono il punto interrogativo* |

Tabella A.6: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima E in cui avviene il passaggio fra gli esempi e la scrittura della formula algebrica.

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.6: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ok... quindi se vogliamo rispondere a Claudio con questa cosa che abbiamo trovato... Quindi Claudio ci dice: Io vi posso dire il numero di una figura qualsiasi [*Scrive "Figura qualsiasi" sotto gli esempi*] |
| | Ricercatore | Dunque se gli dobbiamo dire il numero di una figura qualsiasi... cosa gli posso scrivere? |
| | Studente | $fq$ più 1 elevato 2 |
| | Studente | [*Mentre il ricercatore scrive alla lavagna*] $fq$ minuscolo... più uno... e quello lo metto tra parentesi... elevato due |

Tabella A.7: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima G in cui avviene il passaggio fra gli esempi e la scrittura della formula algebrica.

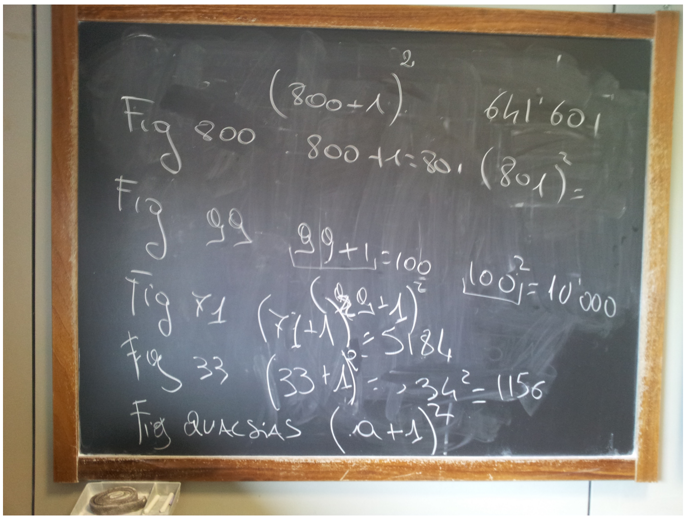
| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Per rispondere alla domanda di Claudio... Se devo fare il calcolo per una figura qualsiasi [*scrive "Fig. qualsiasi" in colonna con gli esempi già calcolati*] cosa devo scrivere? |
| | Studente 1 | Figura qualsiasi... |
| | Ricercatore | Dettami cosa devo scrivere |
| | Studente 1 | Figura... $f$ |
| | Ricercatore | Metto $f$? E basta? |
| | Studente 1 | Sì |
| | Ricercatore | $f$... e poi? |
| | Studente 1 | Più... aspetta prima le parentesi |
| | Ricercaotre | Dove la metto la parentesi? |
| | Studente 1 | Prima di $f$ |
| | Studente 2 | $f$ più uno chiusa parentesi, alla seconda |

Tabella A.8: Estratto della discussione sul problema delle griglie quadrate nella prima I durante la fase d)

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Allora se io voglio rispondere a Claudio e gli voglio dire: guarda Claudio per fare il numero di una figura qualsiasi [*scrive "Fig. qualsiasi" sotto i calcoli per le figure a cui è stato applicato l'algoritmo*] cosa deve scrivere? |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella A.8: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *Alcuni alzano la mano per rispondere, la parola viene data a Filippo* |
| | Filippo | $a\ldots$ aperta parentesi $a$ più 1 chiusa la parentesi elevato due |
| | Alcuni | Giusto |
| | Ricercatore | *Chiede agli altri che volevano intervenire se avrebbero scritto la stessa cosa. Rispondono di sì.* |
| | | L'immagine sottostante mostra la lavagna alla fine di questa parte della discussione   |
| | Ricercatore | Matteo che cos'è questo numero secondo te? *Indica la a nella formula* |
| | Matteo | Un numero qualsiasi o meglio il numero specifico che potrebbe essere un numero qualsiasi |
| | Ricercatore | E cosa rappresenta? |
| | Tutti | Il numero della figura/Il numero di una figura qualsiasi |

# Allegato B

# Trascrizioni della discussione sul problema degli stuzzicadenti

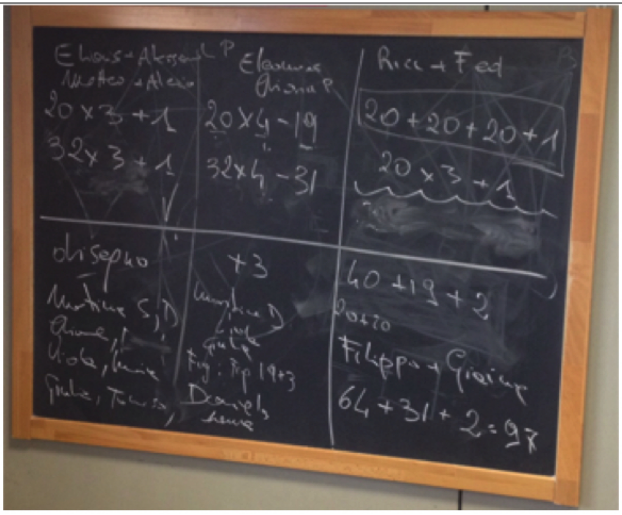
## B.1 Estratti relativi alla fase di descrizione degli algoritmi utilizzati per rispondere ai quesiti aritmetici.

Tabella B.1: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima A durante la fase b).

| | | |
|---|---|---|
| | | *Viene proiettato e letto a voce alta dal ricercatore il quesito c)* |
| | Ricercatore | Chi è d'accordo alzi la mano |
| | | *Non tutti gli studenti alzano la mano* |
| | Ricercatore | Matteo... Come mai tu non sei d'accordo? |
| | Matteo | Io non mi ricordo bene quello che avevamo scritto però no perché... Cioè se gli diamo un inizio e una fine si però cioè... la successione non finisce mai quindi no cioè... |
| | Giaime | Perché se ti danno il numero della figura tu con quei metodi[*Riferendosi alle diverse strategie illustrate da ciascuno nella fase precedente e elencate alla lavagna, come mostrato dall'immagine sottostante*] |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | |  |
| | Studente 1 | Anche la figura milleduecento ottanta |
| | Giame | Puoi calcolare anche la figura due milioni e trecento settantasette mila |
| | Ricercatore | Matteo, ha ragione Giaime che puoi calcolare anche la figura duemilaaa... cento... |
| | Matteo | Sì |
| | Giaime | E quindi è sì |
| | Daniela | Sì |
| | Ricercatore | Allora si può calcolare? Per esempio per chi non c'era e non sa tutto quello che abbiamo detto su Claudio che era quello dell'altro problema... per esempio Andrea... secondo te noi saremmo in grado di dire quanti stuzzicadenti ci sono in una figura qualsiasi della successione? Se ci danno il numero della figura, noi lo sappiamo calcolare il numero della figura? |
| | Marco[1] | Sì |
| | Ricercatore | Marco è d'accordo |
| | Ricercatore | Allora come possiamo fare? Perché ci riusciamo? |
| | Giaime | Se usiamo uno di quei metodi |
| | Elias | Con quei metodi |
| | | *Anche altri rispondono in maniera simile* |

*continua nella pagina seguente*

[1]Anche Marco era uno degli studenti assenti all'incontro precedente.

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Abbiamo tutti questi metodi, giusto? Allora arriva la solita domanda... ci riusciamo? Sì... Come ci riusciamo? Che cosa dobbiamo dire a un ragazzo che passa fuori dalla porta per dirgli cosa dobbiamo fare per calcolare gli stuzzicadenti di una figura? |
| | Giaime | Gli dobbiamo dire per esempio di usare uno di quei metodi |
| | Ricercatore | Quale gli vuoi spiegare Giaime? |
| | Giaime | Il nostro [$s(n) = 2n + (n-1) + 2$] |
| | Ricercatore | Il vostro... questo. [*Indica il quadrato in basso a destra nella lavagna in cui sono scritti i calcoli relativi alla strategia a cui si riferisce Giaime*] |
| | Ricercatore | Quindi tu che cosa gli diresti? |
| | Giaime | Che deve prendere il numero... Dei... Ah sì! Per esempio per trovare la figura anche 20... deve... cioè no no deve addizionare il numero degli stuzzicadenti che sono nella parte superiore della figura a quelli che sono nella parte inferiore della figura. Poi deve sommare questo... il risultato dell'addizione, al numero degli stuzzicadenti che sono... interni |
| | Riccardo | Sì ma la persona non sa quanto è il lato superiore... da quanti stuzzicadenti è formato il lato superiore e inferiore |
| | Ricercatore | Ok, lui sta dicendo se tu gli dici solo: devi prendere gli stuzzicadenti verticali e poi quelli orizzontali, lui come fa a sapere quanti sono? |
| | Giame | Ah ok, perché nella figura 20 saranno il numero della figura |
| | Daniela | Ma lui non le ha viste le figure, non lo sa |
| | Giaime | Se hai la figura 20 ti sto dicendo: se hai la figura venti nella parte superiore hai il numero [*Viene interrottto*] |
| | Studente 2 | Non le vede lui |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Giaime | Se ti dice che devi trovare la figura 20, sai che nella parte superiore della figura gli stuzzicadenti sono 20 e anche nella parte inferiore perché [*Viene interrotto*] |
| | Studente 3 | Come hai fatto? |
| | Giaime | [*Continua senza badare alla domanda*] Gli stuzzicadenti sono il numero... Gli stuzzicadenti superiori orizzontali sono il numero della figura |
| | Ricercatore | Ok, quindi se gli diciamo questa cosa, cioè dobbiamo dirgli che gli stuzzicadenti orizzontali sono... Quanti sono? |
| | Giaime | Uguali al numero della figura |
| | Marco | Io consiglierei quello che ha fatto Elias e Alessandro [$s(n) = 3n + 1$] |
| | Ricercatore | Ok, questo non l'abbiamo detto. Quale consigliereste? Marco per esempio, che non l'ha fatto, tu quale sceglieresti di tutti questi? |
| | Marco | Io quello di Elias, io questo l'ho risolto in fretta grazie a quello di Elias |
| | Ricercatore | Ah ok, questo qua di Fabio l'hai risolto con il metodo di Elias? |
| | Marco | No ma anche gli altri, perché come l'ho visto ho scelto quello di Elias... perché è meno complicato |
| | Ricercatore | È meno complicato, ok. Marco che cosa diresti ad un ragazzo che passa, che non ha visto le figure e non sa cosa stiamo facendo e gli devi spiegare come calcolare il numero di stuzzicadenti di una figura qualsiasi... per usare questo? |
| | Marco | Gli spiegherei che la figura originale ha 4 stuzzicadenti e man mano si aggiungono 3 stuzzicadenti... e gli direi che per calcolare la figura in questione bisognerebbe moltiplicare la figur il numero della figura per 3 e aggiungere un lato |
| | Ricercatore | Ok, se noi gli diciamo: caro Fabio per calcolare gli stuzzicadenti di una figura devi prendere il numero della figura, moltiplicarlo per 3 e poi aggiungere uno, lui ci riesce a fare questo calcolo? |
| | | *Alcuni rispondono di sì* |

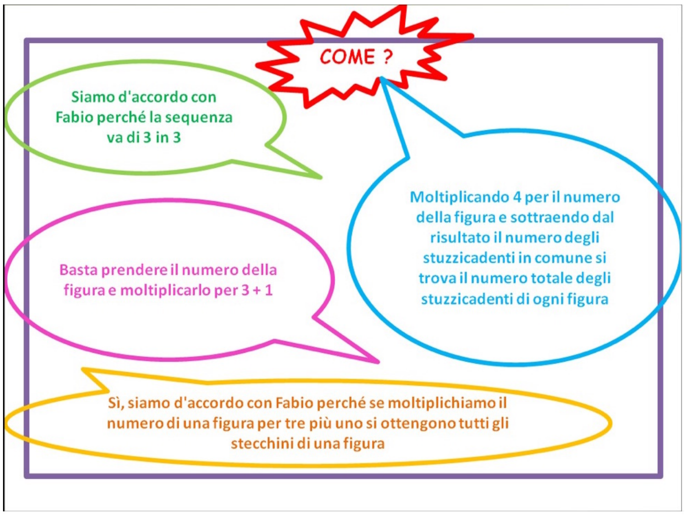
*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Elias ci riuscirà a calcolare il numero degli stuzzicadenti con questa frase? |
| | Elias | Secondo me ci riesce |
| | Giaime | A me ha dato un'altra cosa per rendere più [*non si capisce*] il metodo mio e di Filippo: che basterebbe praticamente, sempre per la figura 20, basterebbe sia... sommati il numero degli stuzzicadenti superiori e inferiori sono il doppio della figura in questione |
| | Ricercatore | Ok quindi bisogna fare il doppio del numero della figura? |
| | Giaime | Sì |
| | Ricercatore | Ok, poi? |
| | Giaime | Appunto poi... non mi ricordo |
| | Ricercatore | Questi?[*Indica il 19 dell'espressione scritta alla lavagna per determinare il numero degli stuzzicadenti della figura 20 usando il procedimento di Giaime e Filippo*] Quanti sono? |
| | Giaime | Dician... No sono quelli interni |
| | Ricercatore | E quindi che cosa sono? |
| | Giaime | I lati interni |
| | Ricercatore | Ok, come facciamo a dire a Fabio quanti ne deve aggiungere? |
| | Giaime | Non mi ricordo |
| | Daniela | Devi fare la figura meno 1 |
| | Ricercatore | La figura meno uno! Ok quindi gli dobbiamo dire... Per ottenere questo cosa deve fare? [*Indica il 40 dell'espressione scritta alla lavagna per determinare il numero degli stuzzicadenti della figura 20 usando il procedimento di Giaime e Filippo*] |
| | Alcuni | Il doppio del numero della figura |
| | Ricercatore | Il doppio del numero della figura... Poi ci deve aggiungere? |
| | Daniela | Ci deve aggiungere il numero della figura meno uno |
| | Giaime<br>Daniela | E poi aggiungere due<br>[*Sovrapponendosi*] E poi aggiungere due |
| | Ricercatore | E poi aggiungere due |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Daniela | Non si può aggiungere il numero della figura e poi aggiungere uno? |
| | Giaime | È la stessa cosa |
| | Ricercatore | Allora Daniela dice: non si può aggiungere il numero della figura e poi aggiungere uno? |
| | Daniela | Però funziona solo in questo caso |
| | Ricercatore | Funziona solo in questo ca? Eh... funziona solo in questo caso? Questa [*domanda*] ce la conserviamo... ce lo ricordiamo di conservarcela dopo? Fra un pochino? Che cerchiamo un modo di capire se funziona solo in questo caso o se funziona per tutti? Daniela ricordati questa domanda! |
| | Ricercatore | Vi faccio vedere quello che avete scritto voi così le commentiamo |
| | | *Viene proiettata la slide mostrata nell'immagine sottostante*   |
| | Ricercatore | Allora queste sono alcune delle cose che avete scritto voi per rispondere alla domanda di Fabio... allora facciamo come l'altra volta: leggeteli un po' che poi li commentiamo. |
| | Elias | Veramente il giallo e il viola vogliono dire la stessa cosa |
| | Studente 4 | Secondo me l'unico sbagliato è il verde |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *La maggior parte è d'accordo con il fatto che la frase nel fumetto verde non spieghi bene cosa si debba fare* |
| | Elias | Bisogna aggiungere uno poi |
| | Studente 5 | No non bisogna aggiungere uno |
| | Ricercatore | È quasi se stesse spiegando il metodo, quello di Giulia, quello di Martina D [*Si riferisce alla strategia ricorsiva*] Però... Si capisce cosa... Non è spiegato bene forse... non è completo |
| | Ricercatore | E questi due, sono uguali, giusto? [*Si riferisce di nuovo ai fumetti viola e giallo*] |
| | | *Rispondo sì* |
| | Ricercatore | Quale metodo sta descrivendo? È uno di quelli che abbiamo scritto noi alla lavagna? |
| | Studente 6 | Sì |
| | Ricercatore | Qual è? |
| | Studente 6 | Quello viola |
| | Ricercatore | È quello Elias e Alessandro |
| | Elias | Anche quello giallo è il nostro |
| | Ricercatore | Ok, quello giallo e quello viola descrivono quello 20 per 3 più uno praticamente, giusto? E questo azzurro cosa fa? |
| | Tutti | È quello di Eleonora![$s(n) = 4n - (n-1)$] |
| | Ricercatore | È quello di Eleonora vero? |
| | Ricercatore | *Legge la frase riportata nel fumetto azzurro a voce alta* |
| | Ricercatore | Facciamo così riusciamo a descrivere... facciamo come l'altra volta... ognuno di voi provi a scrivere nel quaderno che cosa deve dire a Fabio per calcolare il numero degli stuzzicadenti... sceglietene uno... se siete veloci potete anche scegliere tutti... va beh il disegno... non c'è niente da spiegare non lo scriviamo... però per esempio provate a descrivere questo metodo oppure questo metodo o questo di Giame... [*Indica alcune delle strategie dirette riportate alla lavagna*] |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Studente 7 | Il terzo no? [*Si riferisce al procedimento:* $s(n) = n+n+n+1$ *che, nella frase precedente, era stato riconosciuto come equivalente a uno di quelli indicati, ovvero* $s(n) = 3n+1$] |
| | Ricercatore | Allora se volete provate a descriverlo così [*Disegna un rettangolo intorno a 20 +20 +20 +1*] perché questo [*Indica l'espressione sottostante: 20 x 3 +1] è uguale a questo [indica il riquadro in cui è stato applicato il procedimento* $s(n) = 3n+1$ *equivalente*] Ok, provate a scriverlo magari usando questa... poi, ripeto, se siete veloci magari provate a descriverne più di uno così magari troviamo una regola per tutti. Ok? Quindi ricordatevi, dovete riuscire a spiegare ad un'altra persona come fare, quindi dovete dirgli tutto quello che gli serve, va bene? |
| | | *Dopo qualche minuto alcuni hanno finito di scrivere* |
| | Ricercatore | C'è qualcuno che ha già una cosa pronta da scrivere? |
| | Giovanni | Per spiegare a Fabio come risolvere il problema, basta moltiplicare il numero $x$ per 3 più uno |
| | Studente 8 | Il numero $x$ che cosa? |
| | Studente 9 | Della figura |
| | Giovanni | Il numero $x$ è il numero nascosto cioè della figura |
| | Elias | L'abbiamo fatto noi? è il nostro metodo! [*Si riferisce al fatto che lui e il suo compagno hanno scritto negli elaborati un'espressione utilizzando la* $x$] |
| | Ricercatore | *Scrive la proposta di Giovanni in una nuova slide* |
| | Ricercatore | Che domanda avete fatto a Giovanni? |
| | Federico | Che... Che il numero $x$ può essere di qualsiasi cosa ma non indica che è il numero della figura |
| | Ricercatore | E allora cosa facciamo? Glielo diciamo a Fabio? |
| | Federico | Io ho scritto: basta moltiplicare il numero della figura per 3 e aggiungere uno e ho scritto anche una formula: $f$ per 3 più 1 |
| | Ricercatore | Ah ok... Lo scrivo qua sotto |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Mi sembra più o meno come quello di Giovanni, solo che tu usi $f$ e lui usa $x$ |
| | Federico | Però lui non ha indicato che $x$ indica il numero della figura |
| | Ricercatore | Ok quindi prima c'è la spiegazione a parole e poi c'è la formula. Diciamo che anche quello di Giovanni andava bene basta aggiungere che $x$ è il numero? Che cos'è $x$? |
| | Tutti | Il numero della figura |
| | Alessandro P | È un numero naturale |
| | Ricercatore | Ah Alessandro ha detto una cosa... È vero che $x$ deve essere per forza un numero naturale? |
| | | *Alcuni rispondono di no ma poi da soli si correggono* |
| | Giaime | La figura non può essere la figura 2,5 |
| | Ricercatore | La figura non può essere 2,5 ... Sono tutte figure che hanno numeri naturali nel nome quindi sicuramente al posto di $x$ o al posto di $s$ ci devo mettere un numero naturale |
| | Giaime | Però $x$ potrebbe essere qualsiasi numero naturale invece deve essere il numero di quella figura |
| | Ricercatore | Sì, $x$ è il numero della figura di cui vogliamo calcolale gli stuzzicadenti |
| | Elias | eh va beh ma questo deve essere più generale, se noi facciamo come dice Giaime va bene solo per un caso |
| | Ricercatore | In che senso va bene solo per un caso? |
| | Elias | Mi sembra di aver capito che Giaime vorrebbe che anziché scrivere $x$ si mettesse il numero della figura |
| | | *Alcuni iniziano a parlare tutti insieme per spiegare ad Elias cosa intendesse Giaime* |
| | Ricercatore | Giaime preferisce la $f$ perché richiama più "figura", per questo? |
| | Giaime | Sì |
| | Ricercatore | Ok però se noi gli diciamo, a quello che passa, guarda che $x$ è il numero della figura comunque glielo dovrebbe specificare |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Federico | Secondo me è giusto anche quello che ha detto Giaime perché parla sempre in generale... ed è anche più preciso perché dice: dobbiamo moltiplicare il numero di una figura perché sta parlando in generale però della figura che vuoi |
| | Ricercatore | stiamo parlando di una figura in generale |
| | Federico | Senza dire una figura precisa |
| | Ricercatore | Esatto senza dire una figura... Una figura qualsiasi |
| | Ricercatore | Ok allora diciamo che questo ci va bene per il metodo di Elias, Alessandro eccetera. C'è qualcuno che ha provato a spiegare un altro metodo? |
| | Giulia | Sì si può, basta prendere il numero della figura per esempio 51 e lo moltiplico per 4 e poi tolgo o sottraggo il numero equivalente al numero della figura meno 1. Quindi 51 per 4 meno 50 |
| | Ricercatore | Ok, basta prendere il numero della figura, moltiplicarlo per quattro, giusto? [*Scrivo nella slide*] |
| | Giulia | Per esempio 51 lo moltiplico per 4 e poi tolgo o sottraggo il numero equivalente al numero della figura meno 1 |
| | Ricercatore | Ok... |
| | | *Suona la campana* |
| | Ricercatore | Facciamo così: qua abbiamo scritto $f$ per 3 più 1 per quello [*Indica il procedimento corrispondente scritto alla lavagna*] giusto? |
| | Ricercatore | *Scrive la formula nella parte della lavagna in cui è stata riportata la porcedura* |
| | Ricercatore | C'è qualcuno che riesce a scrivere la stessa cosa per il metodo di Eleonora [$s(n) = 4n - (n - 1)$]? Per questo? |
| | Daniela | $f$ per 4 meno 1 |
| | Studente 10 | Nooo |
| | Daniela | $f$ per 4 meno... $f$... meno 1 |
| | Ricercatore | così? |
| | Alcuni | Tra le parentesi! |
| | Ricercatore | Bravissimi! |

*continua nella pagina seguente*

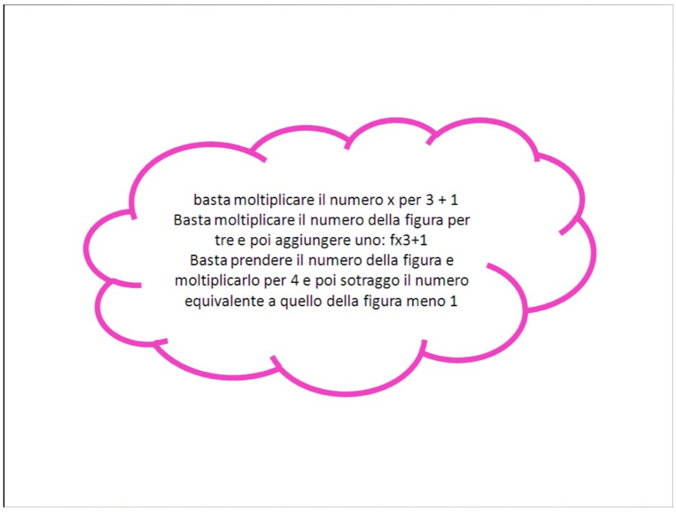
*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | E questo lo sapete scrivere?[*Indica l'ultimo procedimento diretto scritto alla lavagna*] |
| | Tutti | Sì! |
| | Riccardo | Tra parentesi, $f$ per due, poi $f$ meno uno |
| | | *Anche altri a voce più bassa completano la formula insieme a Riccardo* |
| | Ricercatore | E in mezzo cosa ci devo mettere? |
| | Daniela | Più |
| | Ricercatore | Più, e poi? |
| | Riccardo | più due |
| | Daniela | anche $f$ più uno |
| | Studente 11 | Perché? |
| | Ricercatore | Eh... allora è vero che è la stessa cosa scrivere... Daniela dice: ma non posso scrivere $f$ per 2 e poi fare più $f$ più uno? |
| | Molti | *Rispondo no* |
| | Daniela | *Continua ad insistere* |
| | Alcuni | Giusto! È vero! |
| | Giaime | Ha ragione! |
| | Ricercatore | Perché ha ragione? |
| | Giaime | Perché praticamente tu togli uno a 19 ma poi stai aggiungendo quello che a hai tolto |
| | Studente 11 | Più due |
| | Studente 12 | È vero! |
| | Ricercatore | E quindi è vero che vale per tutte le figure? |
| | Giaime | Sì perché non ha senso aggiungere quello che hai tolto |
| | Ricercatore | Ok |
| | Giovanni | [*Chiedere di leggere la sua spiegazione*] Per risolvere il problema basta moltiplicare per due il numero della figura aggiungendo il numero della figura meno uno e aggiungendo due |
| | Ricercatore | Ok |
| | Daniela | Io ho scritto: il metodo che mi è piaciuto di più per calcolare il numero degli stuzzicadenti è stato: il doppio del numero della figura più il numero della figura meno uno più due e quindi lo scriverei a Fabio |

*continua nella pagina seguente*

*Tabella B.1: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *Le immagini sottostanti mostrano la diapositiva costruita e la lavagna in cui sono state scritte le formule* |



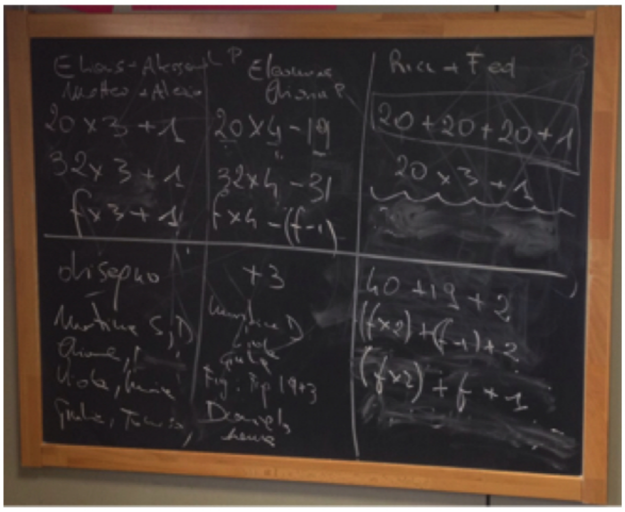




Tabella B.2: Estratto della discussione sul problema degli stuzzicadenti nella prima I durante la fase b)..

| | | |
|---|---|---|
| | Studente | Eh... Si può fare perché con qualsiasi figura come abbiamo visto da quella di Riccardo o da quella di Davide si può ottenere il numero di stuzzicadenti di ogni figura[2] |

*continua nella pagina seguente*

[2] Si riferisce a due delle strategie dirette proposte da due compagni.

*Tabella B.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | | *Viene proiettato il quesito di generalizzazione* |
| | Alcuni | Fabio ha fatto giusto |
| | Ricercatore | Allora Fabio ha fatto giusto? |
| | | *Rispondono sì* |
| | Ricercatore | Chi è d'accordo con Fabio alzi la mano |
| | Ricercatore | Lorenzo tu sei d'accordo? |
| | Lorenzo | Sì |
| | Ricercatore | E cosa avevi scritto nel foglio? |
| | Lorenzo | Eh si può fare perché con qualsiasi figura come abbiamo visto da quella di Riccardo o da quella di Davide[3] si può... ottenere il numero di stuzzicadenti di ogni figura |
| | Ricercatore | Tu te lo ricordi cosa avevi scritto? |
| | Ricercatore | *Chiede il permesso di leggere la risposta a voce alta* |
| | Ricercatore | Lorenzo ha scritto: "Sì, si può fare... se ne hai voglia" |
| | Lorenzo | Sì |
| | Ricercatore | [*Continuando a lelggere*] "ma io non ne ho voglia perché ci impiego molto" |
| | Lorenzo | Ma stavo lavorando da solo... Era troppo noioso |
| | | [...] |
| | Lorenzo | Vorrei commentare quello che ho scritto prima. Stavamo facendo il metodo tipo quello di Gabriele[4] |
| | Ricercatore | E hai pensato "È troppo lungo quindi non lo posso fare per tutte le figure", giusto? |
| | Studente | No allora, ho detto: ok si può fare ma ci vuole una settimana soltanto per fare... una anche abbastanza semplice |
| | Ricercatore | È vero... e invece adesso con gli altri metodi? Si può fare? |
| | Lorenzo | È più semplice... sì |
| | Ricercatore | Facciamo come l'altra volta, cerchiamo un modo di spiegare uno di questi metodi? |

*continua nella pagina seguente*

[3]Si riferisce alle procedure spiegate dai compagni.
[4]Si riferisce alla strategia ricorsiva illustrata da uno dei compagni.

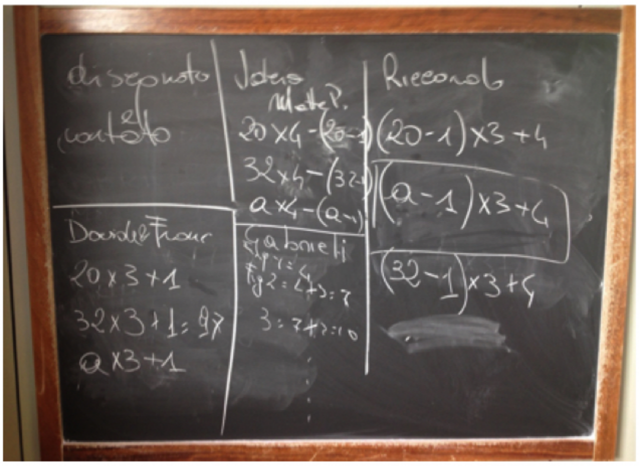
*Tabella B.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | C'è qualcuno... Per esempio quello di Riccardo l'abbiamo già un po' detto... Lucrezia l'ha già detto... perché Riccardo che cosa ci ha fornito?[5] |
| | Riccardo | La spiegazione migliore |
| | Ricercatore | In che senso Riccardo? |
| | Riccardo | Quella che si capiva meglio |
| | Ricercatore | Perché però? Qual è la spiegazione migliore? |
| | Riccardo | La mia e quella di Davide |
| | Ricercatore | No no ma io non voglio dire... se devo spiegare a qualcuno come fare a calcolare il numero |
| | Giacomo | È più facile quella di Riccardo |
| | Ricercatore | E che cosa gli diresti? |
| | Giacomo | Bisogna prendere il numero della figura, sottrarlo a uno, moltiplicarlo per tre e aggiungere la figura uno iniziale che è più 4 |
| | Ricercatore | Va bene questa spiegazione che ci ha detto Giacomo? |
| | Studente 1 | Sì però è diff... è più complicato l'ultimo passaggio |
| | Ricercatore | È più complicato l'ultimo passaggio... va bene... |
| | Studente 1 | Se lo dici a voce è un po' più complicato |
| | Ricercatore | Ah ok se lo dici a voce è un po' più complicato e invece se lo dico così? È più facile? [*Indico la formula corrispondente all'algoritmo applicato da Riccardo e che era già stata scritta alla lavagna durante la fase precedente*] |
| | | *Rispondono di sì* |
| | Ricercatore | Chi vuole provare a fare la stessa cosa per un altro metodo? |
| | Antonio | *Alza la mano* |
| | Ricercatore | Quale metodo vuoi scegliere? |
| | Antonio | Quello di Davide e Francesco [$s(n) = 3n + 1$] |
| | Antonio | $a$ per 3 più 1 |

*continua nella pagina seguente*

[5] Già durante la fase iniziale di condivisione delle diverse strategie utilizzate, Riccardo, per spiegare il suo procedimento [$s(n) = 3(n-1)+4$], aveva aggiunto: "La formula sarebbe... $a$... La formula è $a$ meno 1... dentro la parentesi... per 3 più 4" e Lucrezia aveva spiegato a parole l'algoritmo corrispondente alla formula proposta da Riccardo che era stata scritta alla lavagna.

*Tabella B.2: continua dalla pagina precedente*

| | | |
|---|---|---|
| | Ricercatore | Ok... È vero che lo posso scrivere così il metodo di Davide e Francesco? |
| | | *Rispondono che è giusto* |
| | Ricercatore | Fabio... se lo voglio dire a parole adesso, come ha fatto Giacomo per il metodo di Riccardo, come lo posso dire questo? |
| | Fabio | Allora... devi fare... il numero della figura per 3 più uno |
| | Francesca | Potremmo dire che dobbiamo prendere il numero della figura e moltiplicarlo per tre e aggiungere uno |
| | Ricercatore | Va bene che si può dire così? Questo detto a voce è un po' meno complicato di quello di Riccardo, giusto? |
| | Ricercatore | Qualcuno vuole provare a descrivere il metodo di Valeria [$s(n) = 4n - (n - 1)$] |
| | Matteo C | Se noi... Allora... $a$ per 4 meno aperta parentesi $a$ meno uno |
| | | L'immagine sottostante mostra ciò che era scritto alla lavagna alla fine della discussione   |