UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Dipartimento di Pedagogia, Psicologia e Filosofia
Scuola di Dottorato di Filosofia ed Epistemologia
Corso di Dottorato in Storia, Filosofia e Didattica delle Scienze
XXVI ciclo
M-FIL/01; M-FIL/02; M-FIL/06

L'implicazione in C.I. Lewis

La nascita dell'implicazione stretta dagli scritti giovanili alla Symbolic Logic

Relatore:
Prof. Francesco Paoli

Presentata da:
Luca Cuscusa

Anno Accademico 2013-14

Indice

Abstract

The necessity of ordering the philosohpical path that leads Clarence Irving Lewis to the formulation of the systems of strict implication gives birth to this work of thesis. After a short general introduction about the life and the philosophical view of Lewis, which is not strictly related to the logical writings, the attention has been at first focused on the historical-philosophic period between the nineteenth and twentieth centuries the framework in which his logical studies are put in, and afterwards on one of the first debates about material implication which shows Bertrand Russell and Hugh MacColl as leading actors. Subsequently an analysis of the early writings of Lewis has been performed. This period started with *Implication and the Algebra of Logic*, published in 1912, and ended in 1918 with *Survey of Symbolic Logic*; and the subsequent revisions written in 1920 in the article *A Strict Implication - An Emandation*. For the first time, the theory of the strict implication has been shown. Chapter three is dedicated to the *Symbolic Logic*. This text is known as fundamental in the history of Lewis' thought. Particularly, the work has been interested in a specific way to those chapters dedicated to truth-value systems and to the notions of implication and deducibility, central ideas in the Harvard's philosopher logic system. Furthermore a section has been dedicated to the analysis of the systems of strict implication: S1, S2, S3, S4, S5, that represent the highest peak of the Lewis' logical study.

Introduzione

Il presente lavoro di tesi ha come obiettivo quello di illustrare il percorso che Clarence Irving Lewis affrontò, partendo dagli scritti giovanili dei primi anni '10 fino alla scrittura della Symbolic Logic nel 1932, per arrivare alla formulazione di una teoria dell'implicazione stretta. Principalmente ho voluto mantenere una generale visione filosofica dell'argomento, non disdegnando di quando in quando l'analisi di questioni tecniche legate al linguaggio logico e alla simbologia. La decisione di intraprendere questo percorso, nonostante gli studi precedenti sulla filosofia antica, nasce tra l'incontro con le conoscenze del mio supervisore, il Prof. Paoli, e la mia curiosità riguardo alla logica. Dopo una serie di incontri ho deciso di intraprendere questo cammino.

La letteratura sugli scritti logici di Lewis è molto nutrita; esistono numerosi scritti e articoli su particolari aspetti della sua logica, ma non ÃÍ presente un lavoro completo dedicato allo sviluppo della logica dell'implicazione stretta in Lewis, che tenga conto soprattutto dello sviluppo della sua filosofia. Chiaramente questo lavoro è lontano dall'essere minimamente completo sia dal punto di vista della profondità di lettura dei testi, che dalla comprensione totale dell'opera del logico americano; vuole essere piuttosto una "traccia" su cui far poggiare un lavoro futuro (o lavori futuri) che continuino laddove ora si è solo iniziato.

La metodologia con la quale ho voluto procedere in questo lavoro si basa sostanzialmente sulla lettura, sul commento e sul confronto della letteratura primaria, articoli e non. Contestualmente ho lavorato da una parte per acquisire un grado di conoscenza in campo logico tale da permettere una lettura agevole degli scritti di Lewis, dall'altra ho cercato di ricostruire un contesto storico nel quale le opere dello stesso Lewis si sono inserite.

Nel primo capitolo della tesi ho voluto descrivere, con un occhio di riguardo alla sinteticità, quegli aspetti della filosofia di Lewis che non riguardano strettamente la logica, ma che in un certo qual modo possono aver influenzato anche la sua visione filosofica della logica, come la conoscenza empirica e il concetto di a-priori, senza dimenticare l'etica, argomento che a Lewis sta molto a cuore negli anni della maturità. Dopo aver descritto brevemente questi argomenti mi sono concentrati sul contesto storico nel quale si sviluppano le idee di Lewis: dal programma logicista di Frege ai *Principia Mathematica* di Russell fino ai primi dibattiti sull'implicazione materiale.

Il secondo capitolo si occupa di una fase importante della filosofia di Lewis. In quel fervente contesto di rifondazione della logica e della matematica iniziano a svilupparsi le prime idee sull'implicazione materiale, e sulla necessità di creare qualcosa di più adatto a tradurre in linguaggio logico il linguaggio naturale. In questa sezione si analizzano gli articoli giovanili che vanno dal 1912 fino al biennio 1918-1920, dall' *Implication and the Algebra of Logic* fino al *Survey of Symbolic Logic* in cui possiamo dirsi conclusa la fase 'giovanile' di sperimentazione e ricerca.

Il capitolo successivo è interamente dedicato alla *Symbolic Logic*. Ho voluto dare particolare risalto, in virtù di quel taglio maggiormente filosofico che ho voluto dare a tutto il lavoro, ai capitoli sui sistemi vero-funzionali e sul concetto di implicazione e deducibilità. In questi capitoli Lewis concentra i suoi sforzi per dare un' impalcatura filosofica solida al suo sistema dell'implicazione. In questa sezione ci sarà spazio per un paragrafo dedicato a due aspetti molto importanti in tutta la filosofia del logico di Harvard: il pluralismo logico e il pragmatismo logico.

I capitoli dedicati agli scritti logici sono corredati di un paragrafo che si occupa dell'analisi dei sistemi di implicazione stretta che ci vengono proposti negli articoli del periodo giovanile fino alla *Symbolic Logic* dove vengono infine descritti, *dulcis in fundo*, i cinque sistemi dell'implicazione stretta che renderanno tanto famoso Lewis.

Capitolo 1

Clarence Irving Lewis: La vita e il suo pensiero

1.1 La vita

> Lewis [...] was a philosopher in essence and a professor only per accidens, and it speaks well for the academic world that it so much honored so unacademic a man. Modest to a fault, he always wondered at this and would never presume upon it. [33, pag. 162]

Questo è solo un breve giudizio sull'uomo che fu Lewis. Poche parole scritte da Donald Williams nella biografia dedicata allo studioso di Harvard ad un anno dalla sua scomparsa, ma che ne raccontano bene la natura.

Clarence Irving Lewis nacque a Stoneham, in Massachusetts, il 12 di aprile del 1883. Crebbe in piccole cittadine e fattorie del New Hampshire e qui iniziò precocemente una serie di lavori che lo accompagnarono fino al suo inevitabile approdo ad Harvard. I lavori che fece prima di cominciare la sua lunga attività accademica — per lo più umili, come il lavoro nei campi, nelle fabbriche o negli alberghi — contribuirono, in una qualche misura, anche alla formazione del suo carattere riservato e, appunto, umile. Alla High School di Haverville, in Massachusetts, conobbe il suo amore di una vita, Mabel Maxwell Graves; un amore che, potremmo dire, si consolidò sotto la tutela della filosofia greca.

Rimase ad Harvard, per completare il suo corso di studi, dal 1902 al 1906, anno nel quale si laureò 'con menzione speciale in Inglese e Filosofia', e subito dopo la laurea si recò all'Università del Colorado per tenere un insegnamento di Inglese e fare l'assistente in Filosofia. Fu il gennaio del 1907 quando sposò il suo amore giovanile Mabel Graves. Lewis, dopo aver sistemato la sua vita privata, arrivò a Cambridge nel 1908 per affrontare il suo corso di dottorato che si concluse nel 1910 quando presentò la sua tesi dal titolo "The Intuitive Element in Knowledge", e contemporaneamente seguì un corso del Prof. Royce sulla logica moderna, che si rivelerà profetico e importantissimo per la sua futura carriera.

Nel 1911 arrivò in California dove venne assunto come *Instructor*, e dove nel 1914 divenne *Assistant Professor*. Pochi mesi dopo sopraggiunse in tutto il mondo la prima guerra mondiale e Lewis si arruolò come volontario nell'artiglieria pesante arrivando sino al ruolo di capitano prima di ritornare in California, alla fine della guerra, nel 1918. Due anni dopo la fine della guerra raggiunse nuovamente Harvard e iniziò a lavorare come *lecturer*. Questo ambiente funzionò da catalizzante per la sua carriera accademica: nel 1924 divenne Professore Associato; nel 1930 divenne Professore Ordinario e nel 1946, alla pensione di Perry, divenne *Edgar Pierce Professor*. La sua filosofia e la sua logica, ma soprattutto la sua persona, ricevettero diversi e importanti riconoscimenti: fu membro della Società Filosofica Americana, membro onorario della Phi Beta Kappa, fu *fellow* dell'Accademia Americana di Arti e Scienze e presidente nel 1934 della divisione orientale della 'Associazione Filosofica Americana'. L'Università di Chicago gli conferì nel 1941 il grado di *Doctor of Human Letters*, riconoscendolo come un "logico acuto le cui lucide investigazioni di logica simbolica e di teoria della conoscenza hanno imbevuto la filosofia americana di rigore scientifico, distinzione accademica e chiarezza filosofica" . Nove anni dopo, nel 1950, la Columbia University lo descrisse come "un eccezionale protagonista della logica formale moderna, un creativo sistematizzatore della teoria pragmatica della conoscenza e distinto e influente docente di filosofia" consegnandogli la medaglia d'oro *Butler.*

Il nostro logico e filosofo si congedò da Harvard nel 1953 per stare un anno a Princeton e successivamente arrivare a Menlo Park in California. Insegnò senza soluzione di continuità a Stanford fino a quando ebbe settantacinque anni, con piccole parentesi all'Università del Michigan e all'Università della California del Sud. Nel 1961 ricevette anche un premio in denaro del valore di diecimila dollari dall'*American Council of Learned Societies* "per le realizzazioni illustri nella scienza umanistica" . Attribuì sempre alla sua abitudine di dedicare ogni mattinata allo studio sulla sua scrivania tutti i suoi risultati e la sua produttività, ma nonostante le sue capacità mentali rimanessero inalterate, il suo corpo mal accompagnava questa sua giovinezza mentale. La sua insufficienza cardiaca cronica lo portò piano piano alla morte che avvenne in piena tranquillità in un letto dell'ospedale di Stanford, la mattina del 3 febbraio del 1964.

1.2 Il suo pensiero

Come per ogni pensatore di ogni tempo la semplice analisi della vita non rende giustizia della completezza sia della persona che dello studioso. Si cercherà ora di affrontare in maniera completa, ma non troppo approfondita, gli aspetti fondamentali della filosofia di Lewis, dalle sue considerazioni sul pragmatismo concettuale fino alle sue idee sulla conoscenza empirica e sull'etica. Tralasceremo in questa sezione introduttiva gli aspetti del pensiero di Lewis legati strettamente alla logica, in quanto costituiranno il nucleo principale dell'intero lavoro.

1.2.1 La conoscenza empirica

La ricerche di Lewis in campo logico lo portarono a esprimere diverse critiche al sistema che Russell e Whitehead espressero nei *Principia Mathematica* e queste critiche gli fecero sentire l'esigenza di costruire un sistema alternativo che superasse appunto quelle criticità. L'esperienza che quindi Lewis ebbe in prima persona di un sistema di logica alternativo alla logica classica, contemporaneamente alla nascita dei primi sistemi di logiche non standard e di logiche a più valori di verità, spinsero Lewis a domandarsi sul valore della logica e sul suo significato. In questa pluralità di sistemi formali, in quale modo si deve scegliere quello più adatto? Quali leggi regolano quindi la scelta di un sistema formale che meglio dovrebbe adattarsi alle situazioni empiriche che mano a mano ci si propongono quotidianamente? La risposta a questi interrogativi per Lewis è il " pragmatismo concettuale" , teoria che si basa sul presupposto che se si ritengono i sistemi formali come costruzioni di relazioni vuote, possono coesistere innumerevoli sistemi tutti diversi fra loro, ma ancora non si ha un qualche tipo conoscenza. Si arriva alla conoscenza nel momento in cui si collocano i dati, ciò che ci comunicano i sensi, all'interno di queste reti di relazioni, o meglio di una di queste reti di relazioni. E cosa ci deve far scegliere fra una rete ed un'altra, fra un sistema ed un altro? L'applicazione di un certo sistema a priori piuttosto che di un altro è semplicemente dettata da tentativi e da errori: saremo tentati di sostituire un certo sistema con un altro non badando alla propria verità assoluta, ma alla forza con la quale si presenta e alla sua semplicità. Il criterio che ci guiderà nella scelta sarà appunto pragmatico: nel caso in cui un certo sistema non soddisferà alcune nostre previsioni sul futuro Saremo tentati di considerare tale sistema e la sua conseguente teoria come cattivi strumenti di previsione, e quindi saremo spinti a cambiare il nostro sistema di dati a priori con uno che verificheremo essere più affidabile. È chiaro che la bussola per poterci orientare e per evitare il caos fra gli infiniti sistemi è il pragmatismo. In tal modo Lewis voleva spiegare la conoscenza mediante l'a priori, il dato e l'interpretazione:

> Devono esserci, in un senso o nell'altro, alternative concepibili a ciò che è a priori. In quelle modalità della nostra attività intellettuale che sono esibite nei criteri dati dalle definizioni, esistono di queste alternative.

> Una definizione può essere data in un modo o nell'altro: noi classifichiamo, ordiniamo e comprendiamo come noi stessi stabiliamo. Una volta che i nostri concetti esatti sono stati scelti, il loro sviluppo è una verità assoluta: non c'è, riguardo a questo, alcuna alternativa. Ma ciò che può essere questione di scelta, è quali concetti formuleremo, e quali applicheremo. Il pensiero affronta il caos dell'esperienza con i suoi strumenti intellettuali, che sono indipendenti dal dato come il dato è indipendente da loro. Verità e conoscenza rappresentano l'incontro di questi due elementi.[17]

Secondo Lewis esistono quindi tre elementi fondamentali nell'analisi della conoscenza empirica:

1. ciò che immediatamente "sentiamo", sul quale non possiamo compiere degli errori, cioè il dato;

2. l'atto di interpretazione del dato sensoriale come un'esperienza che riusciamo a distinguere da un'altra;

3. il concetto tramite il quale noi interpretiamo il dato sensibile in relazione ad altre esperienze, vale a dire l'*a priori*.

In definitiva Lewis sostiene che la nostra esperienza del mondo è una costruzione operata da noi stessi usando come mattoni i dati sensibili modificati dai nostri atti di interpretazione. Ora, nel momento in cui mi trovo davanti ad un oggetto della realtà, ad esempio un foglio di carta, automaticamente rifletto sulle mie esperienze passate avute con un foglio di carta, realizzando istantaneamente che ci sono alcune caratteristiche sensibili e specifiche che mi si presentano, che fanno sì che io mi aspetti di fare certe altre esperienze nel momento in cui, ad esempio, allungo un braccio per toccare il cuscino. In questo modo si vuol dire che l'aspettativa di certe esperienze cambia nel momento in cui ho a che fare con determinati oggetti piuttosto che con altri, che sono essi stessi dettati da esperienze differenti. Secondo questo ragionamento Lewis è convinto che solo gli esseri attivi, capaci di ragionare, possono avere conoscenza e che la funzione principale della conoscenza empirica è di essere uno strumento che rende possibile la transizione fra un presente reale ad un futuro che noi ci aspettiamo e del quale il presente è foriero di segnali. Le affermazioni mediante le quali definiamo le nostre credenze sulla realtà sono equivalenti ad un indefinito insieme di affermazioni controfattuali su quelle esperienze che noi dovremo avere. Che la realtà sia confermabile o no in principio dall'esperienza, è una cosa che Lewis considerava senza significato. Lui pensava che ciò che distingueva il suo pensiero da quello dei positivisti logici fosse l'enfasi e l'importanza che lui dava al ruolo dell'agente. In ogni caso le esperienze che quotidianamente si fanno non sono garanzia di soddisfazione delle mie aspettative. Le interpretazioni sono fallibili, non sempre aderiscono all'esperienza e, spesso, sono soggette a revisione, alla luce di esperienze che possiamo avere in futuro. Nell'ultimo capitolo di questo lavoro entreremo nello specifico del pragmatismo logico di Lewis mettendolo in relazione con il suo pluralismo. Pragmatismo e pluralismo logico sono due grandi temi della filosofia della logica di Lewis, due convinzioni filosofiche che influenzeranno la costruzione dei suoi sistemi logici.

1.2.2 L'*a priori*

Lewis pensa che le verità necessarie siano sia conoscibili *a priori*, sia conoscibili con certezza. Le nostre conoscenze, sostiene sempre Lewis, costituiscono la nostra conoscenza empirica nello stesso modo in cui le nostre passate esperienze ci danno una buona ragione per fare delle predizioni. Noi non facciamo predizioni sul futuro quando affermiamo semplicemente certi concetti, o quale sia la loro definizione, o quali criteri di definizione forniscono per applicarli all'esperienza. Questi tipi di affermazioni sono esplicativi e non predicativi, non sono falsificabili da false proposizioni, né verificabili da predicazioni di successo, né giustificate da evidenze induttive. In maniera analoga in un testo del 1929, *Mind and World Order*, Lewis sostiene che l'*a priori* vada esteso a leggi fondamentali della natura che definiscono i concetti di base, come la massa, l'energia o la simultaneità, e pertanto incluso in alcune delle cose che sono in genere considerate come i principi di base di una teoria scientifica.

Tuttavia, vi è una differenza tra una proposizione che può essere falsificabile o meno, e il suo essere verificabile o meno. Lewis aveva poco di positivo da dire su come noi conosciamo una proposizione e quindi anche su come una proposizione può essere conosciuta a priori. Lewis definisce l'*a priori* conoscibile mediante la formulazione riflessiva e critica dei nostri principi di classificazione, e che le verità *a priori* sono certificabili con il solo riferimento al significato. Ciononostante, non ha mai spiegato come la riflessione sulle nostre categorie, significati, o l'inserimento di una in un altro, potrebbe darci certezza, piuttosto che garantire che è fallibile e rivedibile attraverso una riflessione ulteriore.

Sempre in *Mind and the World-Order* affermava proprio l'incertezza e la falsificabilità di tutte le teorie scientifiche. Consideriamo, scrive Lewis, la proposizione "questo penny è rotondo" . Ebbene, tale proposizione implica "una somma di esperienza possibile che è illimitata e inesauribile" . Difatti: "se questo penny è rotondo, allora - qualora lo si misurasse con strumenti di precisione - il risultato sarebbe questo o quest'altro; se questo penny è rotondo, allora non apparirà ellittico se guardato standogli di fronte" ; e di implicazioni del genere è possibile farne quante ne vogliamo. E ciò sta a dirci che la proposizione "questo penny è rotondo" non è una proposizione verificabile in modo completo; è una proposizione che resta aperta a controlli futuri che la possono ancora confermare o anche non confermare. Quel che abbiamo detto per la proposizione "questo penny è rotondo" vale, sostiene Lewis, per ogni conoscenza empirica: ogni conoscenza empirica è soggetta alla prova dell'esperienza futura, nel senso che questa esperienza futura la può invalidare. Prendiamo in considerazione le seguenti due proposizioni:

1. "Tutti i cigni sono uccelli" ;

2. "Tutti i cigni sono bianchi" .

Ebbene, "la prima proposizione non può essere falsificata da alcuna possibile esperienza perché la sua verità ha una garanzia puramente logica [...]. Ma la proposizione [*scil.* “Tutti i cigni sono bianchi”] non ha tale garanzia logica e può essere falsificata dall'esperienza: possono essere scoperte creature nere che abbiano tutte le caratteristiche dei cigni" [18, p.171]. La generalizzazione empirica è sicuramente un *a priori*, ma non è una verità analitica; e non è una verità analitica per la ragione che "il colore bianco non è compreso come essenziale nella denotazione assegnata a “cigno”" [18, p.171]. E, più specificamente, la proposizione "Tutti i cigni sono bianchi" può venir falsificata giacché "ogni proposizione universale afferma la non esistenza di una classe di cose: [...] che tutti i cigni siano bianchi, afferma che la classe dei cigni con un altro colore è una classe vuota" [18, p.171]. Ecco, dunque che "la generalizzazione empirica sarà sempre dipendente dall'esperienza futura, e quindi soltanto probabile, mentre la proposizione a priori sarà sempre certa" [18, p.171]. La conoscenza empirica - nei suoi concetti e nelle sue teorie - implica la previsione: per questo l'esperienza futura può sempre mostrarla falsa. Ma - afferma Lewis - "è proprio la possibilità, tutt'altro che teoria, che le generalizzazioni di cui ci fidiamo siano false, che rende la pratica scientifica piacevolmente eccitante" [18, p.171].

Qual è quindi per Lewis la natura dell'a priori? L'a priori è sicuramente di natura analitica, per così dire definitoria, e non sarà sicuramente una verità materiale, non racchiude il contenuto che ricaviamo dall'esperienza. L'a priori comprenderà i concetti puri delle scienze formali come la matematica, i criteri del nostro discernere. E il fatto che esistano infiniti a priori, infiniti sistemi, evidenzia che è un prodotto della nostra creatività. Al contrario del dato empirico che si offre per intero, e diversamente dalla realtà che è prodotto dell'interpretazione, l'a priori consiste di pure regole e leggi, che non costituiscono una verità materiale: quando dico che 2+2=4 non esprimo altro che un mio personale (o al massimo condiviso) modo di propormi, le scienze formali non descrivono oggetti, non parlano di nessun oggetto platonico:

> In breve, mentre l'a priori non è dettato né da ciò che è presentato nell'esperienza né da qualche fattore trascendente ed eterno della natura umana, risponde tuttavia a criteri del tipo che chiamiamo "pragmatico". L'animale uomo con i suoi bisogni ed interessi si trova di fronte un'esperienza in cui questi devono essere soddisfatti, se mai devono essere soddisfatti. Sia il carattere generale dell'esperienza che la natura dell'animale si rifletteranno nei modi di comportamento che segnano questo tentativo di realizzare i suoi fini[18, p.179].

1.2.3 L'etica

In contrasto con i positivisti logici che pensavano che le dichiarazioni di valore che esprimono atteggiamenti, pro o contro, rispetto a oggetti, persone o situazioni, non sono né vere né false, Lewis ritiene che le dichiarazioni di valore possano essere vere o false, come le affermazioni empiriche, e altrettanto empiricamente verificabili o falsificabili. I sentimenti come bontà e cattiveria ci sono dati direttamente nell'esperienza e particolari affermazioni "espressive" devono essere utilizzate per esprimere tali sentimenti. Tali affermazioni, come altri tipi di affermazioni "espressive", sono passibili di essere vere o false, semplicemente descrivendo il verificarsi di un certo dato dell'esperienza, pur tuttavia non indicando esistenza di oggetti, situazioni o persone. Si tratta quindi di giudizi di valore che sono empiricamente confermabili o no per induzione come qualsiasi altro giudizio obiettivo empirico. Lewis sostiene in tal modo che la sua teoria del valore è del tutto naturalistica e umanistica, piuttosto che trascendentale, ma ancora oggettivista.

Per Lewis infatti, trovare direttamente la bontà sembra essere ancora naturale tanto quanto trovare proprietà "oggettive" in alcune esperienze, e nello stesso identico modo vengono apprese dall'esperienza. Tuttavia, il valore di una parte di esperienza, anzi una vita intera, non solo il valore (e disvalore) delle parti, Lewis critica il tentativo di Bentham di creare un calcolo di valori. Per Lewis, il valore intrinseco nell'esperienza di una sinfonia non è solo la somma del valore intrinseco dei movimenti presi singolarmente, ma rispecchia il carattere della sinfonia. Ciò che in definitiva per Lewis è buona cosa è la qualità della vita, e la dobbiamo considerare "buona" esattamente nel viverla. Le esperienze costituenti dunque, potrebbero avere valore per se stesse, ma hanno anche un valore per il loro contributo al valore di tutta la vita di cui sono parti. In conclusione, dal punto di vista della conoscenza, secondo Lewis la validità dei giudizi etici non deriva dall'esperienza, ma da una scelta: quella di perseguire la ragione sempre e comunque nelle proprie azioni piuttosto che farsi guidare dalla dicotomia piacevole-spiacevole.

1.3 Il contesto

1.3.1 Sviluppi della logica e degli studi sui fondamenti della matematica

Non si può prescindere, parlando di logica moderna, dal lavoro e dalla filosofia di Gottlob Frege, e non è concepibile cercare di comprendere compiutamente il lavoro di Frege se si cerca di decontestualizzarlo, di considerarlo in modo isolato. Il filo conduttore di tutto il lavoro e l'opera del filosofo tedesco si può riassumere in quello che comunemente viene definito "programma logicista" di fondazione della matematica, il quale aveva due propositi fondamentali:

1. di definire in termini puramente logici i concetti della matematica pura, in particolare quello di numero naturale;

2. di derivare le verità della matematica pura partendo da principi meramente logici.

Per raggiungere tale scopo Frege si rende conto della necessità di una risistemazione preliminare della logica, una risistemazione che è subordinata allo scopo principale: assicurare una fondazione certa, incontrovertibile e indiscutibile alla matematica. I punti saldi della sua nuova impresa si possono ricavare considerando le varie polemiche che Frege sollevò: la sua ricerca si muoveva pur sempre su uno "sfondo filosofico" di tutto rispetto. Il punto di partenza non poteva che essere la *Critica* Kantiana, ma non si limitò a questo: i suoi bersagli furono l'empirismo matematico e lo psicologismo logico di J.S. Mill, appunto l'intuizionismo matematico di Kant, il formalismo ingenuo di Thomae e Hankel e quello più evoluto di Hilbert. Le sue critiche proseguirono non risparmiando né Cantor né Dedekind.

Il programma di Frege appare in tutta la sua peculiarità già nel 1879 quando nell'*Ideografia — Un linguaggio in formule del pensiero puro a imitazione di quello aritmetico* presenta un calcolo logico per quella che oggi viene definita logica dei predicati del secondo ordine. Questo testo non verrà accolto con entusiasmo dal pubblico cosicchè Frege fece seguire all'*Ideografia*, nel 1884, un altro gioiello della letteratura filosofico-scientifica: *I fondamenti dell'aritmetica. Ricerca logico-matematica sul concetto di numero*. In questo testo presenta a livello non simbolico tutto il suo programma, con una cura particolare alle ragioni filosofiche della sua idea, rimandando in maniera esplicita alla necessità di una trattazione simbolica e rigorosa della parte propriamente esecutiva del programma stesso.

Il programma logicista di Frege però ebbe una battuta d'arresto piuttosto pesante, proprio nel momento cruciale: mentre Frege lavorava ai due volumi dei *Principi dell'aritmetica,* che avrebbero rappresentato la vera e propria realizzazione del programma logicista, venne raggiunto da una lettera di Bertrand Russell in cui il filosofo inglese esponeva un'antinomia che vanificava, se non del tutto almeno in gran parte, il lavoro svolto fin lì dal logico tedesco. Dopo questo brutto colpo Frege non scrisse più su questi temi, ma si limitò a scrivere su argomenti di filosofia legati al linguaggio e alla gnoseologia.

Paradossalmente il programma logicista vide un fervido sostenitore in colui che aveva trovato una falla piuttosto profonda nel lavoro di Frege: Bertrand Russell che, in collaborazione con Alfred Whitehead, fece un suo tentativo di costruire su basi interamente logiche l'intero edificio della matematica classica. Nascono così i *Principia Mathematica* la cui prima edizione risale al 1910-13. Questo scritto nasce sotto una doppia influenza: da un lato i dibattiti sul predicativismo di Poincaré, dall'altro l'analisi fregeana della logica, ma supera entrambi perchè è più radicale per alcuni versi del tentativo fregeano presentando nel contempo problemi e aspetti tecnici che ne fecero un punto di riferimento non solo per i logicisti, ma anche per i detrattori delle idee di Poincarè e dei semi-intuizionisti.

L'obiettivo primo dei *Principia* è quello di mostrare come, una volta risolte le antinomie, fosse possibile costruire l'intero edificio della matematica classica partendo da nozioni e principi logici. Per Russell, diversamente da Frege, non esistono eccezioni alla riduzione della matematica alla logica: la teoria dei numeri, l'analisi e la geometria, possono essere fondate sulla logica. In tal modo il logicismo russelliano esiste solo come interpretazione di tutto il lavoro sui fondamenti fatto nel secolo precedente. Il contenuto della logica è così costituito da schemi e forme universali che il matematico usa in ambiti determinati: i teoremi della logica sono tutti gli enunciati universali, veri, riguardanti le sole costanti logiche fondamentali, e sono in sintesi forme pure.

Il calcolo nei *Principia Mathematica* prende il via dalla descrizione delle funzioni di proposizioni: "un'aggregazione di proposizioni — considerate come degli interi non necessariamente determinati in maniera non ambigua — in una proposizione singola più complessa dei suoi costituenti, è una funzione *con le proposizioni come argomenti*" [29, Cap. 1, pag. 24]; quattro però sono i casi di importanza fondamentale, perché tutte le aggregazioni di subordinate possono essere create con queste, o mediante queste, tramite passaggi successivi. Tali "casi particolari" sono : la Funzione Contraddittoria, la Somma Logica o Funzione Disgiuntiva, il Prodotto Logico o Funzione Congiuntiva e la Funzione Implicativa.

La Funzione Contraddittoria è una funzione con un solo argomento, p, e asserisce che p non è vera, è infatti la proposizione contraddittoria di p. Viene denotata con $\sim p$ e viene letta come non-p; ha come significato la negazione di p. La Somma Logica è al contrario una funzione proposizionale con due argomenti p e q e asserisce p o q in maniera disgiuntiva, tale che almeno una delle due deve essere vera. Viene denotata in questo modo: $p \vee q$. p o q risulterà vera nel momento in cui una delle due sia vera senza esclusione del caso in cui siano vere entrambe entrambe. Il Prodotto Logico è anch'esso una funzione con due argomenti p e q ed è la proposizione che asserisce che sia p che q sono entrambe vere e viene denotata così $p.q$ (in una notazione moderna $p \wedge q$). Come ci suggerisce Russell questa ultima funzione può essere vista e scritta in funzione delle altre due in questo modo: $\sim (\sim p \vee \sim q)$ volendo significare che è falso che sia vera non-p o non-q. L'ultimo caso particolare è la Funzione Implicativa che è anch'essa una funzione a due argomenti p e q. Tale funzione è espressa da $\sim p \vee q$. Ciò significa che se p è vera , non-p è falsa e di conseguenza l'alternativa unica è che q sia vera, in altre parole se p e $\sim p \vee q$ sono entrambe vere allora q è vera. Tale funzione viene letta p implica q e il suo simbolo è "$p \supset q$".

Questi quattro connettivi rappresentano le fondamentali funzioni proposizionali costanti, tutte le altre vengono generate da esse medianti passaggi successivi. Un esempio è *l'equivalenza*: "Si dice che due proposizioni p e q sono equivalenti quando p implica q e q implica p. Tale relazione fra p e q è denotata da '$p \equiv q$'. Pertanto '$p \equiv q$' sta per '$(p \to q) \wedge (q \to p)$".[29, Cap 1, pag. 27]

Prima di elencare gli assiomi e la regola di inferenza del calcolo esposto da Russell e Whitehead consideriamo il segno di *asserzione* "$\vdash$". Tale simbolo significa che ciò lo che segue viene asserito: tale simbolo messo prima di una proposizione ne asserisce il contenuto: "Per esempio, se ricorre '$\vdash (p \to p)$', ciò deve essere considerato un'asserzione completa che sta ad indicare un errore degli autori, a meno che la proposizione '$(p \to p)$' non sia (com'è) vera" [29, Cap 1, pag. 29]

Siamo ora in grado di poter elencare e comprendere i cinque assiomi, o proposizioni primitive, del calcolo dei *Principia Mathematica:*

1. $\vdash$: $p \vee p. \supset .p$, ossia se p o p è vera, allora p è vera. Questa viene chiamata *principio di tautologia* o brevemente *Taut.*

2. $\vdash$: $q. \supset .p \vee q$, ossia se q è vera, allora p o q è vera. Questa viene chiamata *principio di addizione* o *Add.*

3. $\vdash$: $p \vee q. \supset .q \vee p$, ossia se p o q è vera, allora q o p è vera. Questa viene chiamata *principio di permutazione* o *Perm.*

4. $\vdash$: $p \vee (q \vee r). \supset .q \vee (p \vee r)$, ossia se p è vera oppure "q o r" è vera, allora q è vera oppure "p o r" è vera. Questa viene chiamata *principio associativo* o *Assoc*.

5. $\vdash$: $.q \supset r. \supset$: $p \vee q. \supset .p \vee r$, ossia se q implica r, allora "p o q" implica "p o r". Questa viene chiamata *principio di sommazione* o *Sum.*

Abbiamo anche una regola di inferenza chiamata *modus ponens* o *rule of detachment:* "viene asserita una proposizione 'p', e viene asserita una proposizione 'p implica q', e poi come seguito viene asserita la proposizione 'q. La fiducia che riponiamo nell'inferenza consiste nel credere che se le prime due asserzioni non sono errate, non lo è neppure l'asserzione finale".[29, Cap 1, pag. 29]

Ciò significa che ogni volta ricorrono sia $\vdash p$ che $\vdash (p \supset q)$ ricorrerà anche $\vdash q$.

1.3.2 I primi dibattiti sull'implicazione materiale

Ne *I Principi della Matematica* Russell affronta il problema dello studio dei fondamenti della matematica mediante un sistema di logica formale. Lo stesso Russell nell'introduzione alla seconda edizione sostiene che:

> La tesi fondamentale dell'opera, che la matematica e la logica siano identiche, è una tesi che io non ebbi finora ragione di modificare. Essa fu dapprima impopolare, a causa della tradizione che associava alla logica con la Filosofia e con Aristotele, per modo che i matematici sentivano la logica estranea ai loro interessi, e coloro che si consideravano dei logici accettavano mal volentieri di essere costretti ad impadronirsi di una tecnica matematica nuova e piuttosto difficile [28, Introduzione alla seconda edizione].

.

In quest'opera Russell, suggerise una distinzione tra *proposizione* e *funzione proposizionale*. Brevemente possiamo illustrarla in questo modo: la funzione proposizionale è un'espressione avente ad esempio la forma "x è un uomo" dove x è una variabile sostituibile da un termine definito, detto costante, ad esempio dal termine "Socrate", dando luogo alla proposizione "Socrate è un uomo". Una funzione proposizionale non è vera o falsa, è la proposizione che si ottiene sostituendo la variabile con una costante che possiamo determinare essere vera o falsa.

Mantenendo tale distinzione come punto fermo Russell introduce un'altra distinzione fra implicazione e implicazione formale "incolpando" chi lo ha preceduto su questi temi di scarsa chiarezza e ambiguità. Dice Russell:

> Si era soliti, nei trattati di logica, confondere i due tipi di implicazione [*scil.* quello formale e quello materiale], e spesso veniva in realtà considerato il tipo formale dove in apparenza era in gioco soltanto l'implicazione materiale. Per esempio quando si dice che "Socrate è un uomo, perciò Socrate è un mortale", Socrate viene *sentito* come una variabile: egli è un tipo di essere umano, e noi sentiamo che qualsiasi altro uomo avrebbe servito ugualmente allo scopo. Se, invece di usare il *perciò*, che implica la verità

> dell'ipotesi e della tesi, noi mettiamo "Socrate è un uomo implica Socrate è un mortale", è subito chiaro che noi possiamo sostituire al posto di Socrate non soltanto un altro uomo, ma qualsiasi altra entità. Così, benché ciò che viene esplicitamente asserito sia in tal caso una implicazione materiale, ciò che si vuol significare è una implicazione formale; ed è necessario qualche sforzo per limitare la nostra immaginazione alla implicazione materiale [28, Cap. 2, § 15].

Esistono quindi due tipologie di implicazione, i cui significati non devono essere confusi per non cadere in un errore che spesso è stato commesso. Un possibile equivoco si basa sulla differente interpretazione che si può dare al termine Socrate in "Socrate è un uomo". Di fatto comunemente si utilizza il termine 'Socrate' come variabile per indicare qualsiasi uomo come Socrate. In realtà la vera accezione è che 'Socrate' sia Socrate, cioè un termine costante. Dire "Socrate è un uomo, perciò Socrate è mortale", con l'uso normale che se ne fa nella lingua del perciò, significa asserire la verità dell'ipotesi e la verità della conseguenza. Al contrario se al posto di 'perciò' si utilizza 'implica' e cioè: "Socrate è un uomo, implica Socrate è mortale" sembra che questa restrizione non debba esserci. Allora, in questo caso, se consideriamo 'Socrate' come variabile, si può sostituire ad esso non solo qualsiasi uomo, ma qualsiasi altro ente. In definitiva si hanno due possibilità che generano l'equivoco: se si utilizza il termine Socrate come variabile per indicare qualsiasi uomo come Socrate ci troviamo innanzi ad una implicazione formale. Quindi la nostra: "Socrate è un uomo, implica Socrate è mortale" è di fatto una implicazione materiale che però viene trattata come formale tra proposizioni nel solo senso derivativo.

Come sostiene Russell in chiusura del capitolo terzo dei *Principi*, cercando di tirare le somme del suo discorso:

> una implicazione formale, abbiamo detto, è l'affermazione di *ogni* implicazione materiale di una certa classe; e

> questa classe di implicazioni materiali è, in casi semplici, la classe di tutte le proposizioni nelle quali si afferma che una data asserzione fissa, concernente un certo soggetto o certi soggetti, implica un'altra data asserzione fissa concernente lo stesso soggetto o gli stessi soggetti. Allorché sussiste una certa implicazione formale, si è concordi nel considerarla, ogni volta che sia possibile, come dovuta a qualche relazione tra le asserzioni interessate [28, Cap. 3, § 45].

Altro passo importante per il prosieguo del nostro lavoro è l'affermazione che Russell fa nei *Principi* a proposito della possibilità di riscrivere l'implicazione materiale in termini di disgiunzione, e delle conseguenze formali che questo comporta:

> In effetti l'asserto che q è vera o p è falsa risulta strettamente equivalente all'asserto "p implica q"[28, Cap. 2, § 16].

Tale equivalenza la si può definire come la "parafrasi disgiuntiva dell'implicazione": $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Cioè la possibilità di riscrivere l'implicazione materiale utilizzando la disgiunzione in modo tale che le tavole di verità delle due proposizioni risultino semanticamente identiche, cioè che a valori identici di p e q ci restituiscano valori di verità identici delle proposizioni; la stessa operazione si può effettuare con la congiunzione.

Definita questa equivalenza Russell prosegue:

> Dalla suddetta equivalenza segue che: tra due proposizioni qualsiasi ve ne deve essere una che implica l'altra; le proposizioni false implicano tutte le proposizioni; e le proposizioni vere sono implicate da tutte le proposizioni [28, Cap. 2, § 16].

Russell ci spiega che in un dato significato di 'implica' queste affermazioni sono evidentemente valide, ma si rende anche conto che non possono esserlo in un "senso quotidiano", anche se lo sono nel senso con il quale lui ha più familiarità:

> That this is not the usual sense, may be admitted; all that I affirm is that it is the sense which I most often have to speak of, and therefore for me the most convenient sense[30, p.301].

Tali tre affermazioni rappresentano i classici paradossi della logica russelliana, che saranno argomento di dibattito.

Nel 1908 in un brevissimo articolo intitolato "If and Imply" pubblicato sulla rivista *Mind,* MacColl critica fortemente l'equivalenza (classica) fra l'implicazione e la parafrasi disgiuntiva dell'implicazione che Russell formulò, come abbiamo visto poc'anzi, nei suoi *Principles of Mathematics*:

> Mr Russell *Principles of Mathematics* contains something which merits the serious attention of logicians. Adopting the usual view among logicians, that the implication "A implies B" (or "If A then B") is always equivalent to the disjunctive "Either A is false or B is true," Mr Russell is quoted as saying that "It follows from the above equivalence that of any two propositions there must be one which implies the other [20, p.151].

Ciò vorrebbe dire che date due proposizioni o la prima implica la seconda, o viceversa la seconda implica la prima. MacColl continua sostenendo il suo impegno a dimostrare che tale equivalenza fra l'implicazione e la parafrasi disgiuntiva dell'implicazione è un errore:

> For nearly thirty years I have been vainly trying to convince them that this assumed invariable equivalence between a conditional (or implication) and a disjunctive is an error [20, p.152].

In termini formali Mac Coll non è convinto del fatto che

$$(p \to q) \vee (q \to p)$$

Per giustificare questa sua posizione MacColl si affida a due esempi:

> Take the two statements 'He is a doctor' and 'He is a red-haired', each of which, observe is a *variable*, because it may be true or false. Is it really the fact that one of these statements implies the other? Speaking of any Englishman taken at random out of those now living, can we truly say of him 'If he is a doctor he is red-haired, or if he is red-haired he is a doctor?[20, p.152]

Il secondo esempio è di tipo matematico:

> Suppose A, B, C to be random points on the circumference of a circle, forming the angular points of a triangle ABC. Take the two variables statements 'AB is greater than AC' and 'The angle A is an acute angle'. Is it not the fact that neither statement implies the other? How then can it be true that 'Either the first implies the second, or else the second the first'?[20, p.152]

L'obiezione di MacColl è piuttosto chiara, e la risposta di Russell non si fa attendere e punta il dito non sull'obiezione di MacColl riguardante la presunta equivalenza fra l'implicazione e la parafrasi disgiuntiva dell'implicazione, ma evidenzia l'errore del logico scozzese nel non considerare la differenza fra proposizioni e funzioni proposizionali. Così Russell definisce il tema della sua obiezione:

> In the January number of "Mind", Mr. MacColl accuses me of holding premisses from which it would follow that either every red-haired Englishman is a doctor, or every English doctor is red-haired. The reason

> why Mr. MacColl supposes me to hold these premisses (which I do not hold) is that he has failed to grasp what seems to me a vital distinction, namely that which I call the distinction between propositions and propositional functions [30, p.300].

e continua introducendo la sua obiezione: MacColl nel suo esempio non fa uso di proposizioni con soggetti determinati, alle quali sarebbe possibile assegnare un valore di verità, ma utilizza un generico 'he' che introduce una funzione proposizionale che non ha un significato determinato, "they are forms awaiting determination" usando le parole di Russell:

> Mr. MacColl assumes it undecided who 'he' is to be, for as soon as it is decided, the statement ceases to be 'variable'. Now I should not call 'he is a doctor' the expression of a proposition unless, from the context, it is known who 'he' refers to, and then it is a mere abbreviation for (say) "Mr, Smith is a doctor". This is a proposition, but it is not variable: Mr. Smith either is or is not a doctor Of the propositions 'Mr. Smith is a doctor' and 'Mr., Smith is red- haired, 'it is easy to see that one must imply the other, using the word 'imply' in the sense in which I use it [30, p.300].

E poco dopo prosegue:

> Now consider ' Mr. Smith is a doctor' and 'Mr. Smith is red-haired'. Four cases are possible, namely: (1) both are true, (2) both are false, (3) the first is true and the second false, (4) the first is false and the second true. In cases (1) and (2) each implies the other according to the above definition. In case (3) the second implies the first; and in case (4) the first implies the second. These facts are all immediate consequences of the above definition of

' implies,' together with the fact that a disjunction is true when either or both of its alternatives is true. Hence in all four cases, at least one of our two propositions implies the other [30, p.301].

MacColl, capendo che Russell nella sua risposta ha spostato l'obiettivo su un problema differente, nella sua controrisposta non fa caso alle obiezioni di Russell, continuando a sostenere la sua tesi principale. In verità il logico scozzese fa un passo in avanti piuttosto importante anticipando una delle tesi fondamentali dell'implicazione stretta di Lewis, candidandosi così ad essere un vero precursore della logica modale. Per MacColl il problema rimane ancora la differenza nella definizione di implicazione:

> I admit that in mathematics (the theory of probability excepted) the disjunctive may be considered equivalent to the conditional or implication, so that the validity of Mr. Russell's valuable work on the Principles of Mathematics is in no way affected by our discussion. But in the wider field of general logic the assumption of equivalence is unsafe [21, p.453].

Se per Russell vale l'equivalenza $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ (parafrasi dell'implicazione nella sua variante mediante la congiunzione) per MacColl questa non vale "nell'ampio campo della logica generale" e prosegue con un esempio:

> Suppose, for example, we find it predicted in some astrological almanac that "This year a great war will take place in Europe," and also that "This year a disastrous earthquake will take place in Europe" [...]. Let W denote the first proposition and E the second. It is surely an awkward assumption (or convention) that leads here to the conclusion that " either W implies E or else E implies

> W ". War in Europe does not necessarily imply a disastrous earthquake the same year in Europe; nor does a disastrous earthquake in Europe necessarily imply a great war the same year in Europe[21, p. 453].

e sostiene quindi che dovrebbe essere introdotta l'idea dell'impossibilità: l'equivalenza dovrà allora essere questa:

$$p \to q \equiv \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$$

e tale è l'idea: aggiungere il concetto di impossibilità per la definizione di un nuovo connettivo, di una nuova implicazione che sia aderente al linguaggio naturale. Questa sarà fondamentale in Lewis, e troviamo in MacColl un predecessore di tale idea che però non è stata sviluppata dal logico scozzese.

Capitolo 2

Gli scritti giovanili di Logica

2.1 La Filosofia dell'implicazione stretta

Negli anni che vanno dal 1912 al 1918, anno di pubblicazione del *Survey of Symbolic Logic*, e che noi considereremo come periodo legato agli scritti giovanili, Lewis scriverà diversi articoli nei quali espone la sua idea filosofica riguardo all'implicazione materiale, alla logica intensionale e di conseguenza anche al calcolo dell'implicazione stretta. Gli ci vorranno più o meno venti anni di riflessioni filosofiche e prove più o meno riuscite di creazione di tale calcolo logico, per arrivare alla sua opera più complessa: la *Symbolic Logic*, testo al quale dedicheremo un capitolo a parte più avanti. Il termine della produzione giovanile, come una confluenza di tutte le idee esposte negli anni precedenti, sarà proprio il *Survey of Symbolic Logic* che rappresenta un primo tentativo di esporre in maniera completa, organica ed esaustiva il suo calcolo dell'implicazione stretta. Che il *Survey* non sia un definitivo punto di arrivo è chiaro per la sua stessa natura, d'altronde lo stesso Lewis lo considerava più un manuale scolastico che un vero e proprio trattato. Difatti egli stesso nella prefazione sostiene che:

> What a such student most needs is a comprehensive survey of the subject—one which will familiarize him with more than the single system which he knows, and

> will indicate not only the content of other branches and the alternative methods of procedure, but also the relation of these to the Boole-Schroeder algebra and to one another. The present book is an attempt to meet this need, by bringing within the compass of a single volume, and reducing to a common notation (so far as possible), the most important devolopments of symbolic logic [11, p. v].

Nei suoi articoli il suo ragionamento sull'implicazione materiale e sull'implicazione stretta è alquanto eterogeneo e vario, ma si basa su dei capisaldi estremamente chiari e espliciti, che vengono mano a mano elaborati con idee filosofiche sempre più corpose e concetti più elaborati.

In questa sezione ci occuperemo di quattro articoli importanti: *Implication and the Algebra of Logic*, pubblicato su Mind nel 1912; *New Algebra of Implication*, apparso su The Journal of Philosophy nel 1913; *Calculus of the Strict Implication*, del 1914 ancora una volta su Mind; e *Matrix Algebra* sempre del 1914 pubblicato questa volta sul Journal of the Philosophy.

Questi quattro scritti presentano delle differenze sostanziali. Fra tutti lo scritto del 1912 è quello più discorsivo e più legato al concetto nascente di implicazione stretta. Gli altri scritti, alcuni in misura minore altri in misura maggiore, forniscono una formalizzazione del calcolo dell'implicazione stretta che piano piano sta vedendo la luce.

Implication and the Algebra of Logic, un breve articolo di 11 pagine, inizia con la descrizione di quei teoremi della logica classica che Lewis definisce "sorprendenti": che una proposizione falsa implichi una qualsiasi proposizione, e che una proposizione vera è implicata da una qualsiasi proposizione. Nel capitolo precedente si è visto, anche dalle citazioni dello stesso Russell, come questi due teoremi scaturiscano direttamente dall'equivalenza fra l'implicazione materiale e quella che abbiamo definito parafrasi disgiuntiva dell'implicazione; spesso Lewis tornerà sull'argomento dandoci modo di parlarne nuovamente. Questi due principi della logica classica non sono gli unici che, come ci suggerisce lo stesso Lewis, sono "sospetti" al senso comune, ma sono quelli che maggiormente hanno attratto attenzione. Il punto di partenza della critica di Lewis in *Implication and the Algebra of Logic*, e, più o meno esplicitamente, in tutta la sua produzione giovanile, è quindi l'equivalenza $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$: l'implicazione è definita in termini di disgiunzione, ma, e in questo consiste la novità dell'analisi di Lewis, la stessa disgiunzione può avere tre significati il che rende complicato associarne uno solo al concetto di implicazione. Il primo che analizziamo

> is ruled out when we understand that 'p or q'—either p is true or q is true—must not be taken to exclude the possibility that both p and q may be true. Disjunction in the algebra do not signify mutual exclusion [5, p.523].

Per illustrare i due significati rimanenti Lewis si appoggerà a quattro differenti esempi principali:

(1) O Cesare morì, o la Luna è fatta di formaggio verde
(2) O Matilda non mi ama, o io sono amato
(3) O Londra è in Inghilterra, o Parigi è in Francia
(4) O oggi non è il sedici del mese, o il clima è caldo

Per quanto riguarda (1) e (2) possiamo sostenere che in entrambi i casi una delle due disgiunzioni è vera, ma con alcune differenze. Per quanto riguarda la seconda disgiunzione sì può sostenere che 'necessariamente' almeno uno dei disgiunti è vero: se ne consideriamo falso uno non possiamo che considerare il restante come vero. Questo, al contrario, non possiamo sostenerlo della disgiunzione (1): almeno uno dei disgiunti è vero, ma questo non fa si che escludendone uno siamo necessariamente portati a sostenere vero l'altro. E qui si arriva alla fondamentale divisione logica fra disgiunzione estensionale e disgiunzione intensionale, che Lewis, in questa specifica sezione dell'articolo, accenna solamente; più avanti come anche in altri scritti approfondirà ampiamente tale divisione.

> We may call disjunctions like (1), whose truth cannot be known apart from the facts, extensionale disjunctions; those of the type of (2), whose truth can be known while it is still problematic which member is true,—whether both are true,—we may call intensional [5, p.524].

Queste due disgiunzioni possono essere ulteriormente distinte considerando un approccio diverso che lo stesso Lewis ci suggerisce, cioè analizzare come si comportano quando si analizza la loro negazione. Se consideriamo ′o Cesare morì o la Luna è fatta di formaggio verde′ come falsa, qualcuno potrebbe sostenere che in tale proposizione ci sia una qualche relazione ′falsamente asserita′ delle due proposizioni disgiunte ′Cesare morì′ e ′ la Luna è fatta di formaggio verde′. Per comprendere meglio tale passaggio Lewis ci propone in alternativa un altro esempio:

> If Smith asserts, "Either my name is not Smith or this is my hat," one might reply: "No, you are wrong; there may be other Smiths in the hall with names in their hats" One does deny that Smith knows his own name, or that this is his hat. One denies only that statement exhausts the possibilities [5, p.524].

L′ultima affermazione evidenzia un passaggio chiave: il fatto che qualcuno, in una sala dove un signor Smith affermi che ′o lui si chiama Smith o quello è il suo cappello′ neghi tale affermazione non significa che stia negando che il signor Smith conosca il suo nome o che quello sia il suo cappello, ma sta negando che la disgiunzione espressa dal signor Smith riesca a cogliere tutte le possibilità legate al nome del signor Smith e al fatto che quello sia o non sia il suo cappello.

Consideriamo ora la disgiunzione (3). Si potrebbe negare che in questo tipo di disgiunzione, in cui i due disgiunti sono entrambi veri, non sia presente alcun tipo di "necessità", anche se entrambi i disgiunti sono veri in se stessi. Ma, se uno dei due fosse falso la verità o la falsità dell'altro non subirebbe conseguenze. Bisogna rammentare che non si può essere certi della possibilità di talune condizioni controfattuali: sappiamo esclusivamente ciò che intendiamo, esclusivamente quando lo supponiamo. Ciò che Lewis vuole evidenziare è che la negazione di una disgiunzione intensionale non è semplicemente, o non si riduce, alla negazione di entrambi i membri, ma è la negazione della relazione di disgiunzione per se stessa, nella sua propria accezione. La negazione di una disgiunzione di tipo intensionale è quindi realmente la negazione della relazione che intercorre fra le proposizioni; si nega solamente che la disgiunzione abbia una qualche verità in relazione ai fatti descritti:

> One denies only that the disjunction has any truth apart from the facts in question [5, p.524].

Diversamente la verità della disgiunzione estensionale è assicurata dalla verità di entrambi i membri, mentre la negazione della disgiunzione estensionale nega entrambi i disgiunti in accordo con le connessioni logiche classiche.

Possiamo rilevare una ulteriore peculiarità del rapporto fra la disgiunzione intensionale e la disgiunzione estensionale; una qualsiasi disgiunzione che sia intensionale è anche estensionale, ma non viceversa; o per meglio dire, si può sostenere che una disgiunzione intensionale fra p e q implica anche la relativa disgiunzione estensionale, solo che non possiamo sostenere il contrario. In ogni disgiunzione intensionale almeno uno dei membri è vero, ma non tutte le disgiunzioni che si presentano con uno dei disgiunti vero è una disgiunzione intensionale. E l'errore della logica di Russell secondo Lewis consiste nel non trattare la disgiunzione intensionale per quello che è, ma tenere conto solo della disgiunzione estensionale. Nel momento in cui una disgiunzione è sia estensionale che intensionale la logica classica considera ancora una volta solamente l'estensionalità. Prova ne sia il fatto che nella negazione di una qualsiasi disgiunzione si continuino a negare entrambi i disgiunti. A ciò Lewis aggiunge:

> That this is not mere "logic chopping" will appear when we come to convert disjunction into implications [5, p.525].

Possiamo aggiungere ancora qualcosa sull'argomento. La disgiunzione intensionale non è solamente nella forma che abbiamo incontrato nella (2). Prendiamo in considerazione la nostra disgiunzione (4): supponendo che delle previsioni meteo piuttosto attendibili prevedano, per il sedicesimo giorno del mese corrente, che il tempo sia "caldo", la nostra disgiunzione risulta essere intensionale. Si può conoscere la sua verità anche nel caso in cui non si ha un calendario a portata di mano o una persona non riesca a distinguere il caldo dal freddo, o addirittura abbia la febbre come ci suggerisce Lewis. Ma eliminando l'assunzione iniziale e non sapendo nulla delle previsioni meteo allora la nostra disgiunzione diventerà estensionale, sempre vera, ma estensionale. Questo esempio ci suggerisce come la disgiunzione estensionale ha come argomento, per così dire, l'attualità, mentre è la possibilità l'argomento della disgiunzione intensionale.

Il tema dell'ambiguità della disgiunzione viene ripreso da Lewis anche in *The Calculus of Strict Implication* del 1914. In un passo decisamente esplicito Lewis riprende il tema dei due principi "sospetti" della logica classica sia la possibilità di parafrasare i tre connettivi di implicazione, disgiunzione e congiunzione, l'uno nell'altro:

> In the system of material implication, there are three important relations of propositions, — implication, disjunction and product. Any one of these may be stated in terms of any other. Thus 'p implies q' — where p and q are propositions — is equivalent to the disjunction of not–p and q — to 'either p is false or q is true'. This disjunction in turn is equivalent to the negative of product: 'either p is false or q is true' means 'it is false that "p is true and q is false"'. From these equivalences it is at once evident that p *always* (materially) implies q unless p is true and q false. If p is false, p implies q, whatever proposition q may be; a false proposition implies anything. If q

> is true, p implies q, whatever proposition p may be; a true proposition is implied by any proposition. The difficulty lies in the ambiguity of 'either — or' [8, 241].

Quello che Lewis vuole sottolineare anche in questo articolo, ancora una volta, è che la logica classica, con l'implicazione (materiale), coglie soltanto un aspetto della disgiunzione, quello estensionale, 'traducendo' l'implicazione 'p implica q' sempre con 'o p è falso o q è vero': 'che oggi sia lunedì implica che domani sia martedì' è chiaramente equivalente a 'o oggi non è lunedì o domani è martedì'. Ma non possiamo sostenere con altrettanta forza che 'oggi è lunedì implica che non sta piovendo' sia equivalente a 'o oggi non è lunedì o sta piovendo. Queste due disgiunzioni devono avere, o dovrebbero avere, due significati differenti. È questa la 'colpa' della logica classica: il non saper distinguere, con i mezzi a propria disposizione il significato estensionale della disgiunzione da quello intensionale. Il significato intensionale di una disgiunzione significa che è *impossibile* che entrambi i disgiunti siano falsi: *necessariamente* se fosse falso uno l'altro sarebbe vero, la negazione di uno dei disgiunti implicherà, in questo caso *strettamente,* l'altro. Il significato estensionale diversamente significa che almeno uno dei disgiunti è vero.

Operata questa imprescindibile distinzione Lewis vuole a questo punto anche formalizzarla e propone, come iniziale differenza fra il suo calcolo, quello della implicazione stretta, e il calcolo della logica classica, o della implicazione materiale, di introdurre un simbolo che possa distinguere i due significati di disgiunzione: userà pertanto, $p \vee q$ per simbolizzare la disgiunzione intensionale e $p + q$ per indicare la disgiunzione estensionale; così da ottenere:

1. For material implication,
   $(p \supset q) = (-p \vee q) = (-p + q) = (-p - q)$
2. For strict implication
   $(p \supset q) = (-p \vee q) \neq (-p + q) = (-p - q)$
3. For material implication
   $(p - q) = -(-p + q) = -(-p \vee q) = -(p \supset q)$

4. For strict implication
$(p - q) = -(-p + q) \neq -(-p \vee q) = -(p \supset q)$ [8, p.242]

Riprenderemo il discorso più avanti, in un capitolo dedicato alla formalizzazione dei primi sistemi dell'implicazione stretta.

Ritorniamo ora all'articolo del 1912. Secondo Lewis la disgiunzione intensionale sta all'implicazione stretta come la disgiunzione estensionale sta all'implicazione materiale. È importante far notare qui e ora come Lewis si riferisca per la prima volta in questo articolo alla implicazione legata alla disgiunzione intensionale come implicazione "stretta"; lo stesso Lewis in una nota a piè pagina spiega che usa questo termine proprio per distinguerlo dalla implicazione materiale della logica classica in virtù della sua vicinanza semantica al concetto di "implicazione" nel linguaggio naturale. [5, p. 526]

Riprendiamo ora per un attimo la nostra disgiunzione (2), 'o Matilda non mi ama o io sono amato' è equivalente a 'Matilda mi ama implica che io sono amato'. Allo stesso identico modo affrontiamo l'esempio (4) che può essere parafrasata diventando 'oggi è il sedici del mese implica che il clima è caldo'. Entrambe le disgiunzioni di partenza erano disgiunzioni intensionali.

Contrariamente l'esempio (1) se trasformato in implicazione diverrebbe: 'Cesare non morì implica che la luna è fatta di formaggio verde' e, invertendo p e q, dal fatto che una disgiunzione del tipo 'either...or' è commutativa, avremo: 'la luna non è fatta di formaggio verde implica che Cesare morì' che sono buoni esempi di come una proposizione falsa implichi una qualsiasi altra proposizione e di come una vera sia implicata da una qualsiasi proposizione. Lo stesso ragionamento vale per l'esempio (3). In questo modo Lewis constata come la "logica algebrica"[1] faccia le proprie asserzioni lasciando da parte la conoscenza dei contenuti di p e q:

> Indeed the algebra of logic allows us to make the-

[1]Il riferirsi di Lewis spesso e volentieri alla logica classica come "algebra of logic" è spiegabile con il fatto che probabilmente vuole riferirsi al modello algebrico della logica classica di Boole-Schröder.

> se assertion prior to all knowledge of the content of p and q and apart from any consideration of what would ordinarily be called their logical import. [5, p.528]

Lewis è convinto del fatto che questo sia il risultato dell'assunzione nel calcolo proposizionale del principio di addizione. Questo principio afferma che p implica 'o p o q'. In tal modo se p è vero allora o p è vero o è vera una qualsiasi altra proposizione q:

$$p \supset (p \vee q)$$

Lewis ritiene che questo principio non sia vero nel momento in cui abbiamo a che fare con delle disgiunzioni intensionali; prova ne sia il fatto che se prendiamo un senso "stretto" di implicazione 'p' non implica che nel caso 'p' fosse falsa allora ogni altra proposizione debba essere necessariamente vera. Dal fatto che oggi sia lunedì , non possiamo dedurre che se oggi non è lunedì , il raccolto di mais sarebbe distrutto per usare un esempio di Lewis.

È quindi ben deciso a trovare dei punti deboli nell'implicazione materiale della logica classica, ma questo non fa di lui un nemico della logica simbolica; in un passo di *Implication and the Algebra of Logic* è piuttosto chiaro su questo punto:

> Our conclusion militate not against symbolic logic in general, but against the calculus of proposition in its present form. As a matter of fact, a few simple changes would remove all the "absurdities" from the present calculus and bring it into agreement with the strict meaning of implication. The principle of addition — p implies 'either p is true or q is true' — is the only one of an economical set of postulates of the present calculus which is false for the intensional meaning of disjunction and, consequently, for strict implication. If these were removed, and disjunction confined — as a matter of interpretation — to the intensional variety, we should be well on our way to a new calculus. [5, p.530]

2.2 Il dibattito con Wiener

Nel novembre del 1916 nel *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods* compare un articolo dal titolo "Mr Lewis and Implication" di Norbert Wiener[1]. In questo scritto il giovane Wiener si concentra su alcuni aspetti della teoria dell'implicazione e muove allo stesso Lewis alcune obiezioni di natura filosofica, più che di natura formale, sulla sua interpretazione delle tesi di Russell, sull'implicazione materiale e sul rapporto fra postulati e teoremi nei *Principia Mathematica*.

Nella prima parte di questo articolo Wiener introduce l'argomento riportando l'esistenza di molti critici dell'opera di Russell e Whitehead, tra i quali inserisce anche lo stesso Lewis e proprio a quest'ultimo riconosce il coraggio di aver esplicitato le sue obiezioni riguardo alle teorie di Russell in vari articoli (che noi abbiamo analizzato precedentemente) con l'uso, talune volte, di teorie logiche molto interessanti. A questa breve introduzione segue un piccolo riassunto delle teorie di Lewis nel quale fa notare come l'idea che certi "particolari" teoremi dell'implicazione materiale, come spesso Lewis soprannominava tali paradossi, non rispecchiassero assolutamente l'idea o concetto di 'implicazione' che si dà nel linguaggio ordinario. Fin qui Wiener riconosce a Lewis anche un certo grado di giustezza nelle sue obiezioni, ma è una certa affermazione apparsa su un piccolo scritto del 1913 che lo lascia perplesso:

> Not only does the calculus of implication contain false theorems, but all its theorems are not proved. For the theorems are implied by the postulates in the sense of 'implies' which the system uses. Hence *it has not been demonstrated* that the theorems can be inferred from the

[1]Norbert Wiener fu un matematico statunitense, ritenuto universalmente il padre della cibernetica moderna. Nel 1913 concluse il dottorato in filosofia ad Harvard e successivamente con una borsa di studio si recò a Cambridge a studiare con Russell e Hardy, riuscendo, con un viaggio all'estero, a studiare per tre mesi a Gottinga con Hilbert. Nel 1915, ritornato in patria, una seconda borsa di studio gli permise di studiare con Dewey. Nel 1919 non trovando posto ad Harvard ottenne una cattedra nell'allora ancora non famoso Massachusets Institute of Technology.

> postulates, even if all the postulates are granted. The assumptions, *e. g.*, of the 'Principia Mahtematica' imply the theorems in the same sense that a false proposition implies anything [6, p. 242].

Wiener ritiene che qui Lewis abbia commesso un grave errore. L'errore consiste nel ritenere che una "buona" Logica possa essere ottenuta solo se un insieme di postulati aderisce correttamente con la nostra idea comune di inferenza; viceversa se uno stesso insieme di postulati non aderisce a quell'idea comune di inferenza, quest'ultima logica sarà fallace e non-corretta. Secondo Wiener invece si può pensare ad una logica che sia semplicemente correttamente derivata dai propri postulati, senza che abbia necessariamente al suo interno la nozione fondamentale di inferenza come noi la intendiamo nel nostro linguaggio ordinario:

> It is not necessary that a theory whose purpose it is to yeld us a norm of valid inference should itself in the first instance be a theory of inference [32, p. 657].

Secondo il modo di vedere di Wiener lo scopo della Logica è di fornirci un metodo che applicato a delle qualsiasi proposizioni vere e di tipo appropriato, ci renda delle altre proposizioni anch'esse vere e anch'esse di una forma accettabile. Come facciamo quindi a sapere quando una certa logica, ad esempio quella di Russell, è una logica corretta? Wiener riconosce due parametri:

(1) una logica è corretta se è realmente una norma corretta di inferenza valida.

(2) è corretta se la coerenza e l'autoconsistenza che attribuisce a se stessa è genuina; e tale consistenza è giustificata da una derivazione ordinata dei propri teoremi da un piccolo e semplice gruppo di postulati.

Quindi la funzione principale dei postulati di un qualunque sistema che ne preveda l'esistenza è di apparire come "hostages" per l'intero sistema. Devono essere delle affermazioni che se accettate costringono chiunque ad accettare il sistema come vero. Che 'o i postulati sono falsi, o il sistema di proposizioni è vero' è tutto quello che necessitiamo conoscere riguardo alla relazione che intercorre fra i postulati della logica e il sistema di verità logiche. Questo è abbastanza per rassicurarci sul fatto che chiunque ritenga per veri i postulati di una logica è obbligato a riconoscere la verità delle loro conseguenze.

A Wiener non interessa neanche la distinzione che Lewis fa tra una disgiunzione intensionale e una estensionale e non gli interessa se la disgiunzione 'o i postulati sono falsi o il sistema di proposizioni è vero' sia una disgiunzione intensionale o estensionale. Infatti anche se:

> it is a mere extensional disjunction, such as can hold between two unrelated and mutually irrelevant propositions, then we may have attained our knowledge of the truth of the propositions of logic indipendently of our postulates, but we shall have attained neverthless [32, p. 658].

A questo punto Wiener introduce un altro errore che secondo lui Lewis fa nel criticare l'implicazione materiale dei *Principia*: non considera la fondamentale distinzione fra "proposizione" e "funzione proposizionale". Come i postulati della geometria sono dei vuoti contenitori di proposizioni che si possono di volta in volta riempire di oggetti geometrici che ne rispettino la validità, così Russell riconosce che anche in logica esistono simili contenitori vuoti che vanno di volta in volta riempiti. Tali contenitori vuoti di proposizioni sono le cosidette "funzioni proposizionali" o "universali". Russell ha anche spiegato il rapporto fra le funzioni proposizionali e la relazione di implicazione definendo l'implicazione formale. Secondo le parole esplicative di Wiener:

> Una funzione proposizionale ϕ is said to imply another ψ formally if every entity which fills out the blank

> form ϕ into a true proposition also fills out the blank form ψ into a true proposition [32, p. 660].

Cioè: i postulati di geometria implicano i teoremi in modo formale equivale a dire che ogni sistema capace di soddisfare i postulati della geometria soddisfa anche i teoremi della geometria. Ribaltando il discorso al campo della logica Wiener sostiene che qualsiasi proposizione segue da un insieme dato di postulati se è vera in ogni possibile sistema che soddisfa tali postulati. Questo fa sì che la nozione di implicazione formale di Russell riguardo agli "universali" è in tutto e per tutto rispettosa della nozione che ne abbiamo noi quotidianamente. Il riferirsi ad ogni possibile sistema secondo Wiener è importante, e gioca un ruolo principale, nel processo di deduzione. Quando pronunciamo una qualsiasi implicazione, ad esempio "Se dovesse piovere io mi bagnerei" quello che effettivamente vogliamo intendere, e che sottointendiamo, è che "in una situazione tale e quale a quella che sto vivendo ora se dovesse piovere io mi bagnerei". Tale sottointeso sottolinea il rapporto che c'è fra il riferimento all'universale e implicazioni di questo tipo. E questo, e Wiener lo sottolinea con fermezza, è l'anima e il cuore di tutta la visione logicistica di Russell.

Nell'ultima pagina dell'articolo Wiener indirizza a Lewis alcune parole di stima verso i suoi studi di logica:

> Mr. Lewis arguments against Mr. Russell have little logical cogency, and one feels that they were devoloped to give an excuse for his constructive work in the definition of his system "strict implication", which really requires no such apology for its existence. [...] it is to Mr. Lewis's credit to have noticed, that [the Russellian System] is unable to distinguish between the notion of truth, pure and simple, and the notion of that truth which results as a consequences of the laws of logic alone. The logic devoloped by Mr Lewis is able to give an account of this notion, and is, in so far, more complete in its apparatus

> - though not necessarily more *correct* in any way - than that of Mr Russell [32, p. 662].

Tuttavia Wiener non pensa che il sistema logico, o i sistemi logici, creati da Lewis siano degli antagonisti del sistema creato da Russell, ma che siano semplicemente dei completamenti di quest'ultimo:

> It is, however, a supplement to the Russellian logic, and not a refutation of it [32, p. 662].

La risposta di Lewis non si fece attendere che qualche mese e arrivò in un articolo dal titolo "The Issues Concerning Material Implication" apparso sempre sul *Journal of Philosophy* nel numero di giugno del 1917.

L'articolo è suddiviso in due macrosezioni: nella prima Lewis espone schematicamente undici tesi che sommariamente riassumono i suoi precedenti lavori e i capisaldi del suo pensiero sul problema dell'implicazione. Nella seconda invece inscena un ipotetico dialogo fra sè e un difensore della logica dei *Principia Mathematica*.

Nella prima e nella terza tesi Lewis ribadisce due concetti, uno conseguenza dell'altro, che ritiene molto importanti, basilari, per la costruzione del proprio sistema logico: la relazione di implicazione materiale, $p \supset q$ così come è espressa nei *Principia Mathematica* non rispecchia assolutamente ciò che noi ordinariamente intendiamo con l'espressione 'q può essere dedotto da p'; questo particolare aspetto della relazione di implicazione è responsabile in ogni sistema logico che usi tale relazione di certi teoremi 'peculiari'come: $\sim p \supset (p \supset q)$, una falsa proposizione implica una qualsiasi proposizione, e: $\sim (p \supset q) \supset p$, se p non implica q allora p è vero[1].

Nel quarto punto Lewis entra nel merito della questione con Wiener affrontando il problema del rapporto fra teoremi e postulati in un sistema logico. I teoremi e di conseguenza i postulati sono usati

[1]È interessante notare come in una nota a piè pagina Lewis ribadisca qui, come aveva già fatto in un articolo del 1912, come la responsabilità della nascita nella logica di Russell di alcuni teoremi 'peculiari' sia da attribuire all'accettazione dell'uso che il sistema fa del principio di addizione. Per una trattazione più ampia di tale principio e delle sue conseguenze *cfr. infra* p. xx

all'interno del sistema, e dal sistema stesso, in due modi: sia come premesse dai quali ulteriori teoremi sono derivabili; e come regole o 'principi di inferenza' attraverso i quali i teoremi sono derivabili. La chiave di lettura sta nel considerare nel primo caso i teoremi e i postulati come premesse di altri teoremi, nel secondo caso i teoremi e i postulati diventano i mezzi con i quali si ottengono altri teoremi. In un qualsiasi sistema di implicazione materiale i teoremi che Lewis spesso chiama 'peculiari' possono essere usati come premesse, ma non possono essere usati come regole di inferenza nè dentro il sistema nè fuori il sistema. Cosa intende Lewis con "dentro il sistema" e "fuori il sistema"? In effetti tali teoremi possono essere usati all'interno del sistema come regole di inferenza (non c'è niente nel sistema dei *Principia Mathematica* che ne vieti l'uso come regole di inferenza), ma il loro uso provoca all'interno del sistema proposizioni come: $p \supset (q \supset q)$ (se p è vero allora q implica q); e $\sim [(pq) \supset q] \supset q$, se '$p$ e q sono entrambi veri' non implica q allora q è vero; mentre se usate all'esterno del sistema provocano delle proposizioni come: oggi è lunedì implica che 2+2=4, o Socrate era un mito solare implica che oggi sia lunedì. Queste sono proposizioni caratteristiche che asseriscono una proprietà logica, e solamente logica, fra affermazioni che fra loro sono del tutto irrilevanti.

A questo proposito Lewis decide di inserire al punto cinque la sua conquista personale: nei suoi lavori sul calcolo dell'implicazione stretta non c'è nessuno di questi teoremi 'peculiari'ma ci tiene comunque a precisare che tutti gli altri teoremi dell'implicazione materiale possono essere provati nel suo calcolo.

Importante è a questo punto sottolineare come al punto undici Lewis sostenga letteralmente che:

> It is not demonstrated in Principia Mathematica that the theorems of the system of material implication can be inferred from the postulates [10, p. 353].

Questo viene affermato nonostante ai punti otto, nove e dieci Lewis sostenga che il sistema dei Principia Mathematica sia un sistema completo e matematicamente consistente e che i teoremi, compresi quelli peculiari, possono essere effettivamente inferiti dai postulati.

Perchè allora nel punto undici si sostiene una tesi così forte? Si ricordi che gran parte della trattazione di Wiener riguardava la ricerca sistematica della confutazione di tale tesi. Ma Lewis trova una falla nell'argomentazione del suo oppositore: per lui Wiener sembra confondere alcuni significati del termine inferire come l'uso che se ne fa in alcune proposizioni come "p can be inferred from q" o "p is inferred from q", o ancora "It is *demonstrated that* p can be inferred from p". Viene contestato inoltre a Wiener il fatto che una derivazione che si basi su una implicazione materiale sia o possa essere una inferenza; infatti nel suo articolo Wiener spesso si soffermava sulla questione della derivabilità dei teoremi dai postulati tramite rigorose operazioni, che siano esse matematiche o simboliche.

2.3 *A Survey of Symbolic Logic*

Nel 1918, dopo una serie di articoli pubblicati su varie riviste del settore, Lewis si dedica alla pubblicazione del suo primo libro: *A Survey of Symbolic Logic* (successivamente per motivi pratici verrà citato anche solamente come *Survey*). Non solo fu il primo libro vero e proprio del logico americano, ma rappresentò anche una novità editoriale dell'epoca: il *Survey* infatti rappresenta il primo esempio in lingua inglese di un manuale creato *ad hoc* per l'insegnamento della logica. Lewis infatti si servì di questo suo scritto nelle sue lezioni di logica, ma il *Survey* è molto di più che un semplice manuale per un corso universitario di logica.

Composto di sei capitoli è nei primi quattro che Lewis si concentra sul racconto della storia della logica simbolica dedicandosi a quelle figure che maggiormente hanno contribuito allo sviluppo di questo campo della logica, da Leibniz fino alla scrittura dei *Principia Mathematica* per mano di Russell e Whitehead, passando per De Morgan, Peirce e Boole, sulla cui figura si concentra nei Cap. 2 e

3, descrivendone approfonditamente il lavoro e le applicazioni che l'algebra di Boole ha avuto nel corso degli anni.

Il capitolo cinque è quello che maggiormente attrae la nostra attenzione: qui Lewis descrive un calcolo dell'implicazione stretta come non aveva ancora fatto negli articoli che abbiamo precedentemente analizzato: nel *Survey* è contenuto un calcolo dell'implicazione stretta che non collassa nella logica classica[1].

Il punto di partenza dal quale si muoverà Lewis nella costruzione del suo calcolo dell'implicazione stretta è, anche se declinato come abitudine di Lewis in modo diverso, la critica al processo di creazione di alcuni teoremi "peculiari" del calcolo dell'implicazione materiale. Tali teoremi, come abbiamo più volte visto, sono poco intuitivi e non si avvicinano al significato che comunemente attribuiamo al verbo 'implicare'; questa lontananza è una lacuna che Lewis vorrebbe colmare con il suo calcolo e nello scritto del 1913, del quale abbiamo poco sopra scritto in relazione al dibattito con Wiener, Lewis sintetizza in maniera chiara e diretta da quale punto di partenza vuole procedere per non replicare l'errore dei suoi predecessori:

> What these theorems reveal is the divergence of the meaning of "implies" in the algebra of logic from the "implies" of valid inference. The way in which such theorems came to be included in the "calculus of propositions" is, briefly, this: The calculus of propositions was preceded by and grew out of the "calculus of classes"[6, p. 241].

Questo capitolo del *Survey* ha l'intento quindi di presentare un nuovo calcolo dell'implicazione che non presenti teoremi così detti 'peculiari' e che sia più aderente al linguaggio naturale. Proprio in apertura di capitolo Lewis sostiene che il suo sistema non è né un calcolo estensionale, come quello dei *Principia Mathematica*, né

[1]In realtà dovremo aspettare, come sottolineremo più avanti, l'emendazione del 1920 per stabilire che il calcolo del *Survey* non collassa nel calcolo della logica classica.

un calcolo intensionale come quelli tentati da Lambert e Castillon[2] che sono risultati dei tentativi non riusciti appieno. Il calcolo di Lewis include relazioni di entrambe le tipologie ma si distingue da entrambe, mostrando peculiarità proprie.

Nel primo paragrafo si introducono le idee primitive che a detta dello stesso Lewis non sono molto diverse da quelle che MacColl elenca in un suo libro: *Symbolic Logic and its Application*. Abbiamo già incontrato Hugh MacColl precedentemente [§1.3.2] e avevamo notato come alcune sue brillanti idee siano state riprese da Lewis.

Le idee fondamentali sono:

1. *Proposizioni*: p, q, r, etc.

2. *Negazione*: $-p$, che significa "p è falso".

3. *Impossibilità*: $\sim p$, che significa "p è impossibile", o che "è impossibile che p sia vero".

4. *Prodotto logico*: $p \times q$, oppure più semplicemente pq, che significa "sia p che q" oppure "p è vero e q è vero.

5. *Equivalenza*: $p = q$, che è una relazione definita.

La differenza che per prima salta all'occhio, rispetto ai precedenti sistemi di calcolo, eccetto per quello di MacColl, è che laddove quelli avevano due soli valori di verità, in questo sistema noi ne riscontriamo diversi. Con la sola aggiunta dell'idea di impossibilità fra le idee primitive Lewis individua cinque diversi valori di verità:

(1) p, "p è vero";

(2) $-p$, "p è falso"

(3) $\sim p$, "p è impossibile"

[2]Per un approfondimento dei due sistemi *cfr.*: C.I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley 1918, p. 18 e ss.

(4) $- \sim p$, "é falso che p sia impossibile"; cioè "p è possibile"

(5) $\sim -p$, "è impossibile che p sia falso"; cioè "p è necessariamente vero"

Come conseguenza delle idee primitive e dei cinque differenti valori di verità che ruotano intorno all'idea di impossibilità, le relazioni binarie tra proposizioni possono essere espresse utilizzando questi valori di verità e il prodotto logico. Molto importante a tal proposito è la definizione che Lewis introduce con il *Survey* di 'consistenza':

1.01 Consistenza: $p \circ q = - \sim (pq)$. Def.

$\sim (pq)$ significa che "è impossibile che p e q siano entrambi veri" il che sancisce l'inconsistenza che c'è fra p e q; definendo quindi come falsa questa precedente proposizione otterremo la definizione di consistenza: $- \sim (pq)$: "è possibile che p e q possano essere entrambi veri" vale a dire "p e q sono consistenti", ovverosia che la possibilità che siano veri entrambi definisce la loro reciproca consistenza. L'idea di consistenza che abbiamo visto sotto forma di definizione è molto importante per il progetto che Lewis vuole portare a compimento: suggerisce una relazione importante fra proposizioni che avvicina il sistema di calcolo al linguaggio naturale, laddove nella realtà due proposizioni possono essere entrambe vere si pensa che qualcosa dal punto di vista del significato le avvicini: il calcolo di Lewis cerca di cogliere tutto questo.

Senza entrare nella questione tecnica del calcolo dell'implicazione stretta proposto da Lewis nel *Survey*, argomento che tratteremo in un prossimo paragrafo dedicato a tutti i sistemi logici presentati da Lewis nei suoi articoli e appunto nel *Survey*, elenchiamo qui di seguito le altre definizioni per dare un panorama completo delle differenze con i calcoli dell'implicazione materiale e per darci l'opportunità di spiegare le differenze di notazione con i suoi predecessori.

1.02 Implicazione stretta: $p \prec q = \sim (p - q)$ Def.

1.03 Implicazione materiale: $p \subset q = -(p - q)$ Def.

1.04 Somma logica stretta: $p \wedge q = \sim (-p - q)$ Def.

1.05 Somma logica materiale: $p \dotplus q = -(-p - q)$ Def.

1.06 Equivalenza stretta: $(p = q) = (p \prec q)(q \prec p)$ Def.

1.07 Equivalenza materiale: $(p \equiv q) = (p \subset q)(q \subset p)$ Def.

Si presenta il caso ora di approfondire la questione legata alla simbologia, prima di chiudere questo paragrafo con la discussione legata al significato di "*implies*". Per la prima volta Lewis introduce in un suo scritto in riferimento all'implicazione stretta il simbolo dell'uncino, "hook" $\prec$, simbolo che rimarrà sempre legato all'implicazione stretta di Lewis nel corso della storia. Interessante è l'uso che fa del simbolo di inclusione "$\subset$". Lewis riprende questo simbolo dalle modifiche che Peirce fece all'algebra di Boole; in questo caso specifico Peirce introdusse la relazione di inclusione "$\subset$" sostenendo che:

> $a \subset b$ has all the properties of the relation between a and b when every member of a is also a member of b[11, p. 327].

Diverso è anche l'uso che Lewis fa del simbolo "$\sim$" rispetto ai *Principia Mathematica*: laddove in questi ultimi si usava come negazione nel *Survey* lo si usa per annotare l'impossibilità. Ad ogni modo è lo stesso Lewis che in questo caso non lascia dubbi e in una nota ci informa che la variazione rispetto agli scritti di Russell è dovuta ad una convenienza tipografica.

Al termine del capitolo Lewis introduce un paragrafo dedicato al significato del verbo 'implicare'. Come abbiamo più volte ricordato gran parte delle riflessioni di Lewis ruota proprio intorno al significato di questo verbo: quanto più un linguaggio logico sarà vicino al linguaggio naturale nella definizione di alcuni concetti chiave, tra i quali il significato di 'implicare', allora maggiore sarà la precisione di tale sistema logico[3]. E più volte Lewis sostiene che questo significato debba essere 'proper' e che ce ne debba essere 'almeno uno':

> It is impossible to escape the assumption there is some definite and "proper" meaning of "implies". The word denotes that relation which is present when we "validly" pass from one assertion, or set of assertions, to another assertion, whitout any reference to additional "evidence"[11, p. 324].

È interessante notare come sin da subito Lewis fornisca una descrizione di cosa 'denoti' propriamente la parola "implies": quando, con un ragionamento valido partiamo da una affermazione, o da una serie di affermazioni che riteniamo valide, arriviamo ad un'altra affermazione.

Per Lewis esiste un determinato modo di ragionare che risulta corretto, il contrario di questo sarà un modo scorretto che non porta a nessun risultato logicamente o scientificamente accettabile. La logica non può essere un sistema valido di inferenza se non possiede almeno uno dei significati propri di 'implies'. Notiamo come Lewis ammetta l'esistenza, o la possibile esistenza, di più di un significato proprio del verbo implicare, ma che qualunque sia tale significato, un sistema di inferenza non ne può fare a meno.

Ora, ci sono due sistemi modi in cui un sistena di logica simbolica può essere sviluppato: uno è quella non logistico, come l'algebra di Boole-Schröder, l'altro è il modo logistico sviluppato da Russell nei *Principia* o dallo stesso Lewis nel sistema dell'implicazione stretta. La differenza sta nel fatto che:

[3]Per quanto riguarda il significato di 'implicare', Lewis non utilizza un significato univoco in tutta la sua produzione. Il significato più esaustivo, in ogni caso, lo troviamo nella *Symbolic Logic*, Cap. VIII pp. 235-262.

> The non-logistic method *takes ordinary logic for granted in order to state its proofs*. This logic which is taken for granted is not the logics it devolops, the we have a most curious situation. A symbolic logic, *logistically* devoloped [...] is peculiar among mathematical systems in that its postulates and theorems have a double use[11, p. 324].

In questa citazione sono importanti due aspetti: con '*logistically* devoloped' qui si intende, ed è lo stesso Lewis a speigarcelo, che si vuole sviluppare una logica simbolica senza l'utilizzo di un'altra qualsiasi logica ordinaria per convalidare le proprie tesi; Il doppio uso che nel finale della citazione viene menzionato consiste nel fatto che i postulati, e di conseguenza i teoremi che in tal modo vengono via via 'provati', sono usati sia come premesse *dai quali* si sviluppano i teoremi, sia come regole di inferenza *attraverso le quali* si costruiscono i teoremi. Cosa comporta questo?

Un sistema di geometria per esempio viene sviluppato utilizzando i propri postulati esclusivamente come premesse, e utilizza invece regole logiche per produrre dei teoremi. Questo fa si che nel momento in cui tali premesse siano si accettabili dal punto di vista matematico, ma sbagliate per lo spazio di riferimento, avremo si dei teoremi falsi per il nostro spazio, ma i postulati implicheranno veramente i teoremi, perchè qualsiasi sia il valore di verità dei postulati sempre i teoremi sono ottenuti utilizzando regole di inferenza logiche.

Diversamente secondo Lewis si sviluppa il discorso nella logica simbolica: se si utilizza un falso postulato non solo avremo come risultato la nascita di falsi teoremi, ma anche di teoremi inferiti invalidamente: l'uso di di falsi postulati come premesse produrrà falsi teoremi; l'uso di falsi postulati come regole di inferenza produrrà false prove. Per questo motivo il significato di 'implies' deve essere non solamente chiaro, ma anche corretto, 'proper', cosicché i teoremi che utilizzeremo come regole di inferenza siano in accordo con tale significato. Per questi motivi il significato di 'implicare' è di notevole importanza, anche se quale sia effettivamente il più adatto è un problema, e lo riconosce lo stesso Lewis, di non facile soluzione.

2.4 I Primi Calcoli dell'Implicazione Stretta

Sin dai primi scritti Lewis ha portato avanti il suo progetto di costruzione di una nuova logica non solo dal punto di vista filosofico, ma anche formale rinnovandolo e ampliandolo, scritto dopo scritto, fino ad arrivare ai sistemi dell'implicazione stretta presentati nella *Symbolic Logic*. In questo paragrafo ci occuperemo dei primi sistemi degli scritti giovanili fino al *Survey* e si cercherà di riportare lo sviluppo di tale impianto logico.

2.4.1 *A New Algebra of Implications and Some Consequences*

Un primo esempio di sistema dell'implicazione stretta Lewis ce lo propone nello scritto del 1913: *A New Algebra of Implications and Some Consequences*. Si comincia dalla descrizione delle idee primitive che compongono il sistema, per proseguire con la formulazione dei postulati e l'elenco di alcuni teoremi con relative dimostrazioni. Le idee primitive:

1. *Proposizioni* o *funzioni proposizionali*, simbolizzate da p, q, r, etc.

2. *Negazione.* $\sim p$ simbolizza la negazione di p o "p è falso"

3. *Implicazione.* $p \supset q$ simbolizza "q può essere dedotto da p" oppure "p implica (strettamente) q"

4. *Prodotto.* pq simbolizza il prodotto logico di p e q, o la proposizione che asserisce sia p che q; "p è vera e q è vera."

5. *Costanti logiche.*

I postulati:

P. 1. $(p = q) \supset [(p \supset q)(q \supset p)]$

P. 2. $[(p \supset q)(q \supset p)] \supset (p = q)$

P. 3. $(p \vee q) = (\sim p \supset q)$

P. 4. $(p + q) =\sim (\sim p \sim q)$

P. 5. $(p + p) \supset p$

P. 6. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

P. 7. $qp \supset pq$

P. 8. $pq \supset p$

P. 9. $p \supset\sim (\sim p)$

P.10. $(p \vee q) \supset (p + q)$

P.11. $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$

P.12. $(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

P.13. Se p è asserito e $p \supset q$ è asserito, q può essere asserito

P.14. Se p e q sono separatamente asseriti, pq può essere asserito

P.15. Qualsiasi espressione che contenga solo una proposizione o una funzione proposizionale, e costanti logiche è essa stessa una proposizione o una funzione proposizionale

P.16. In qualsiasi postulato o teorema può essere sostituita con p o q o r, etc., con proposizione o funzione proposizionale qualsiasi.

Per quanto riguarda le idee primitive abbiamo già precedentemente descritto la differenza fra proposizioni e funzioni proposizionali [§1.3.2], ma in questo frangente facciamo notare come Lewis sostenga che un vantaggio del calcolo dell'implicazione stretta consista nel fatto che proposizioni e funzioni proposizionali si comportino allo stesso modo e obbediscano alle stesse leggi. Questo è dovuto al fatto che il nostro schema di ragionamento è identico, dal punto di vista logico, sia che ci si trovi di fronte a "x è un uomo" sia che ci si trovi di fronte a "Socrate è un uomo".

Sulla quinta idea primitiva lo stesso Lewis sottolinea come la negazione sia una costante logica, e qualunque relazione che si ottiene fra proposizioni e funzioni proposizionali sono anch'esse costanti logiche come l'implicazione e il prodotto.
In P.10 vengono presentate insieme i due tipi di disgiunzione che Lewis aveva già definito nei postulati P.3 e P.4. In questo articolo vengono chiamate rispettivamente "dilemmatica" e "non-dilemmatica" e sono due tipi di disgiunzione che in seguito verranno chiamate "estensionale" e "intensionale". Da notare in questo frangente come ci sia oscillazione, nella sua produzione giovanile, nel come Lewis nomina i due tipi di disgiunzione, delle volte usa la coppia "intensionale-estensionale" delle altre la coppia "dilemmatica-non–dilemmatica". Nel postulato P.10 i due tipi di disgiunzione vengano connessi tramite implicazione per definire come la disgiunzione dilemmatica di due proposizioni implica la loro disgiunzione non dilemmatica, implicazione che non può essere reversibile.

Come nota lo stesso Lewis gli ultimi quattro postulati rappresentano le operazioni del sistema: i primi due rimarcano e definiscono in termini sintetici ciò che si è già detto riguardo l'implicazione e il prodotto nelle idee primitive, mentre gli ultimi due definiscono il range di utilizzo delle variabili p, q, r, etc.

2.4.2 *The Calculus of Strict Implication*

In *The Calculus of Strict Implication* Lewis non presenta un vero e proprio calcolo dell'implicazione stretta, ma si limita a esporre quali potrebbero essere i postulati di un ipotetico nuovo calcolo dell'implicazione. Il vero obiettivo in questo articolo è demolire il calcolo dell'implicazione materiale della logica classica mettendo a confronto i rispettivi postulati: così facendo mette in evidenza la paradossalità di alcuni teoremi "peculiari" della logica classica che sono logica conseguenza dei postulati; teoremi peculiari che non ritroviamo nel suo calcolo[4] che presenta dei postulati significativamente differenti. Vediamo ora nel dettaglio come vengono confrontati i postulati dell'implicazione materiale e quelli dell'implicazione stretta. In un precedente paragrafo si è già discusso dell'introduzione in questo articolo di una differente simbologia fra la disgiunzione intensionale e la disgiunzione estensionale, ci sembra, per completezza di discorso, opportuno riprendere questo concetto rimandando al luogo sopra citato per una spiegazione approfondita.

1. For material implication,
   $(p \supset q) = (-p \vee q) = (-p + q) = (-p - q)$

2. For strict implication
   $(p \supset q) = (-p \vee q) \neq (-p + q) = (-p - q)$

3. For material implication
   $(p - q) = -(-p + q) = -(-p \vee q) = -(p \supset q)$

4. For strict implication

[4]Come vedremo in seguito la realtà è che questi calcoli "primitivi" dell'implicazione stretta ancora collassano irrimediabilmente nel calcolo dell'implicazione materiale. Si dovrà aspettare ancora qualche anno perchè Lewis riesca a creare un calcolo che non subisca le stesse sorti.

$$(p - q) = -(-p + q) \neq -(-p \vee q) = -(p \supset q)$$

E questo è il confronto fra i postulati del calcolo dell'implicazione materiale e dell'implicazione stretta[5]:

Material Implication	Strict Implication
M1. $(p \supset q) = (-p + q)$	S1. $(p \supset q) = (-p \vee q)$
M2. $(pq = -(-p + -q)$	S2. $pq = -(-p + -q)$
	S3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
M3. $(p + q) \supset (q + p)$	S4. $(p + q) \supset (q + p)$
M4. $(p + p) \supset p$	S5. $(p + p) \supset p$
M5. $p \supset (p + q)$	S6. $p \supset (p + q)$
	S7. $(p \vee q) \supset (p + q)$
	S8. $p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p + r)$
M6. $p + (q + r)] \supset [q + (p + r)$	S9. $p \vee (q + r)] \supset [q \vee (p + r)$
	S10. $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)$
M7. $(q \supset r) \supset [(p + q) \supset (p + r)$	S11. $(q \subset r) \supset [(p + q) \supset (p + r)$

Inizialmente sono doverose delle considerazioni riguardo alla notazione usata da Lewis in questo confronto. Ancora una volta notiamo come il simbolo $\supset$ sia usato sia nel calcolo M sia nel calcolo S per denotare da una parte l'implicazione materiale, dall'altra l'implicazione stretta. Si pensa che Lewis voglia, mantenendo lo stesso simbolo per i due tipi di implicazione, porre l'accento sulla definizione dell'implicazione stretta tramite la sua parafrasi disgiuntiva: le due implicazioni sono diverse perché è coinvolta una differente disgiunzione.

Per quanto riguarda più propriamente le caratteristiche dei postulati possiamo dire che i postulati da M2 a M5 sono identici nei due sistemi. Differente è il caso di M6 che non compare nella lista dei postulati dell'implicazione stretta, nonostante sarebbe consistente nel sistema di Lewis. La sua omissione è dovuta al fatto che la pre-

[5]Sembra evidente, in S11, un refuso nell'articolo originale di Lewis. Nonostante in altri scritti utilizzi il simbolo di inclusione come implicazione non sembra questo il caso. Per una corretta lettura il simbolo $\subset$ deve essere sostituito con $\supset$.

senza del postulato S9 rende M6 debole dal punto di vista deduttivo, la sua presenza sarebbe quindi superflua. In generale i postulati S1-S11 sono maggiori nel numero poiché prevedono la distinzione fra la disgiunzione estensionale e quella intensionale.Per concludere, Lewis, in questo confronto, vuole evidenziare ancora una volta la sua idea di calcolo dell'implicazione: una maggiore aderenza al linguaggio naturale e la volontà di costruire un calcolo logico che da una parte rispetti la separazione fra disgiunzione intensionale ed estensionale e di conseguenza non crei dei teoremi "peculiari" come invece accade nella logica classica.

2.4.3 *The Matrix Algebra for Implications*

In un articolo del 1914, *The Matrix Algebra for Implications*, Lewis presenta un altro sistema dell'implicazione stretta differenti in qualche parte da quello che abbiamo poc'anzi descritto. È estremamente importante notare che in questo articolo Lewis ha in pratica scritto il sistema che verrà presentato nel *Survey*, nel quale ci saranno alcune modifiche e ci sarà l'introduzione dell'"hook" ($\prec$) per denotare l'implicazione stretta.Vediamo nel dettaglio il sistema presentato in questo articolo:

Idee primitive:

Proposizioni. p, q, r, simbolizzano proposizioni o funzioni proposizionali.

Negazione. $-p$ simbolizza "non p[6]" o "p è falso"

Impossibilità. $\sim p$ simbolizza "p è impossibile" o "è impossibile che p sia vero"

[6] In questo punto nel testo crediamo ci sia un refuso di stampa, in quanto un errore talmente grossolano è da escludere: il testo recita "not $-p$", il che è chiaramente un errore.

Prodotto. pq simboleggia "p e q insieme" o "p è vero e q è vero"

Equivalenza. $p = q$ significa "p è equivalente a q"

È importante notare come in questo articolo non sia presente come idea primitiva quella di implicazione, ma ci siano invece quelle di equivalenza e di impossibilità.

A questo punto Lewis introduce una novità nella descrizione del suo sistema dell'implicazione stretta: i valori di verità. L'introduzione di una sezione dedicata ai valori di verità (il che ci fa intuire che non saranno i valori di verità della logica classica) è dovuta al fatto che, come abbiamo appena visto, fra le idee primitive è stata aggiunta l'idea di impossibilità (e indirettamente quindi quella di possibilità e di necessità), che è un valore di verità ulteriore rispetto alla verità o alla falsità, così da avere infine cinque valori di verità:

1. $\sim p$. p è impossibile; è impossibile che p sia vero.

2. $-p$. p è falso

3. $- \sim p$. p è possibile; è possibile che p sia vero

4. p. p è vero

5. $\sim -p$. p è necessario; è impossibile che p sia falso

Oltre a tre nuovi valori di verità Lewis introduce una sezione dedicata alle definizioni di relazioni binarie fra proposizioni; particolare attenzione merita la prima definizione, quella di consistenza, che nel pensiero più maturo di Lewis ricopre un ruolo importante. Le Definizioni sono tali e quali a quelle che si incontreranno nel *Survey*, e delle quali abbiamo già dedicato uno spazio poco sopra:

1. *Consistenza.* $p \circ q = - \sim (pq)$. In questa uguaglianza gioca un ruolo importante $\sim (pq)$, cioè che "è impossibile che p e q siano

entrambi veri" vale a dire che "p e q sono inconsistenti". Così il suo negativo $- \sim (pq)$ significa che "p è consistente con q".

2. *Implicazione*. (*inferenza*). $(p \supset q) =\sim (p - q)$. "$p$ implica q (q può essere dedotto da p)" ha il significato di "è impossibile che p sia vero e q falso".

3. *Disgiunzione dilemmatica*. $(p \vee q) =\sim (-p - q)$.

4. *Implicazione materiale*. $(p < q) = -(p - q)$. $(p < q)$ significa "è falso che p è vero e q falso".

5. *Disgiunzione non-dilemmatica*. $(p + q) = -(-p - q)$.

Subito dopo la sezione dedicata alle definizioni troviamo i postulati. Nonostante siano del tutto simili a quelli che Lewis inserirà nel *Survey* riscontriamo delle differenze che mano a mano cercheremo di evidenziare.

Postulati:

P1. $(pq) \supset (qp)$

P2. $(qp) \supset p$

P3. $p \supset (pp)$

P4. $[p(qr)] \supset [q(pr)]$

P5. $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$

P6. $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

P7. $p = -(-p)$

P8. $(p \supset q) = (\sim q \supset \sim p)$

P9. $\sim p \supset -p$

In questo articolo per la prima volta viene introdotta l'idea di "impossibilità" come impossibilità della verità di p che rappresenta un vero passo avanti rispetto all'articolo precedente; infatti questa sarà un'idea che Lewis non lascerà più.

Facciamo notare ora come in questo articolo del '14 Lewis non abbia ancora pensato ad un smbolo che identifichi univocamente l'implicazione stretta, continua invece ad usare il simbolo "$\supset$", mentre, come vedremo tra poco, userà il simbolo "$<$" per l'implicazione materiale. Notare anche come, sia simbolicamente che nell'uso delle parole (aggiungendo tra parentesi la sola parola 'inferenza'), Lewis voglia sostituire l'implicazione della logica classica con la sua implicazione stretta chiamandola semplicemente "implicazione" e riservando l'aggettivo "materiale" all'implicazione classica. Notevole sarà il passo avanti che avverrà da questo punto di vista nel *Survey*.

Si noti in questo articolo l'uso che Lewis fa di "dilemmatic" e "non-dilemmatic" in accordo con un solo altro scritto (come precedentemente accennato [§2.4.1]): *A New Algebra of Implications and Some Consequences*. La particolarità, ed è ciò che si vuole qui evidenziare, è che fra questi due articoli Lewis pubblica *The Calculus of Strict Implication* nel quale non riscontriamo l'uso di "dilemmatic" e "non dilemmatic", ma la dicotomia standard, e tanto cara a Lewis di disgiunzione "intensionale" ed "estensionale", espressioni che ritroveremo in tutti i suoi successivi scritti, *Survey* compreso

La distinzione fra l'implicazione e l'implicazione materiale deve essere chiara: l'implicazione materiale non ci dice che "q può essere dedotto da p", ma sostiene semplicemente che non può essere che p sia falso e che q sia vero. In parole povere l'implicazione materiale nel sistema di Lewis ha il solo compito di far si che da una proposizione falsa non si arrivi ad una proposizione vera; il compito di dedurre è dato all'implicazione (stretta).

Lewis commenta a proposito della disgiunzione non-dilemmatica che fra questa e quella dilemmatica intercorre lo stesso rapporto che c'è fra l'implicazione stretta e l'implicazione materiale. Il linguaggio non riesce a far emergere le differenze fra le due perché tutte e due utilizzano la formula "Either... or...".

2.4.4 *A Survey of Symbolic Logic*

Nel 1918, come abbiamo già precedentemente visto, vede la luce *A Survey of Symbolic Logic*. In questo importantissimo testo Lewis presenta un calcolo dell'implicazione stretta che rappresenta la *summa* dei lavori precedenti. Presenteremo ora il calcolo completo del *Survey* prima di addentrarci nel suo commento. All'interno di questo paragrafo si inserirà una ulteriore sezione in cui si prenderà in esame un articolo del 1920 dello stesso Lewis in cui corregerà alcuni errori.

Le idee fondamentali sono:

1. *Proposizioni*: p, q, r, etc.

2. *Negazione*: $-p$, che significa "p è falso".

3. *Impossibilità*: $\sim p$, che significa "p è impossibile", o che "è impossibile che p sia vero".

4. *Prodotto logico*: $p \times q$, oppure più semplicemente pq, che significa "sia p che q" oppure "p è vero e q è vero.

5. *Equivalenza*: $p = q$, che è una relazione definita.

Cinque diversi valori di verità:

(1) p, "p è vero";

(2) $-p$, "p è falso"

(3) $\sim p$, "p è impossibile"

(4) $- \sim p$, "é falso che p sia impossibile"; cioè "p è possibile"

(5) $\sim -p$, "è impossibile che p sia falso"; cioè "p è necessariamente vero"

Relazioni binarie tra proposizioni:

1.01 Consistenza: $p \circ q = - \sim (pq)$. Def.

1.02 Implicazione stretta: $p \prec q = \sim (p - q)$ Def.

1.03 Implicazione materiale: $p \subset q = -(p - q)$ Def.

1.04 Somma logica stretta: $p \wedge q = \sim (-p - q)$ Def.

1.05 Somma logica materiale: $p \dotplus q = -(-p - q)$ Def.

1.06 Equivalenza stretta: $(p = q) = (p \prec q)(q \prec p)$ Def.

1.07 Equivalenza materiale: $(p \equiv q) = (p \subset q)(q \subset p)$ Def.

Queste sette relazioni più la relazione primitiva pq vengono divise da Lewis in due sottoinsiemi: il primo contiene le relazioni che figurano in ogni calcolo dell'implicazione materiale e sono: pq, $p \subset q$, $p + q$ e $p \equiv q$. Ci si riferisce a tali relazioni con il nome di "material relations". Un altro gruppo di relazioni che presuppongono l'idea di impossibilità e che non appartengono ai sistemi di implicazione materiale sono: $p \circ q$, $p \prec q$, $p \wedge q$ e $p = q$. Queste sono chiamate "strict relations". Con un prospetto, che riportiamo di seguito, Lewis tenta di chiarire l'analogia fra le "material relations" e le "strict relations" partendo da un sempice teorema:$\sim (pq) = -(p \circ q)$:

Strict Implication	Material Implication
$p \prec q = -(p \circ -q)$	$p \subset q = -(p - q)$
$p \wedge q = -(-p \circ -q)$	$p + q = -(-p - q)$
$(p = q) = -(p \circ -q) \times -(q \circ -p)$	$(p \equiv q) = -(p - q) \times -(q - p)$

Lo scopo dichiarato di questo schema è per Lewis quello di distinguere nel significato le espressioni $p \prec q$ da $p \subset q$, $p \wedge q$ da $p+q$. In questo modo sarà chiara la differenza fra $p \circ q$ e pq, fra "p è consistente con q" e "p e q sono entrambi veri".

È interessante notare la differenza fra $p = q$ e $p \equiv q$: laddove la prima denota una equivalenza di significato, la seconda denota una semplice equivalenza di valori di verità. Mentre $p \equiv q$ significa "p e q sono o entrambi veri o entrambi falsi", quindi una relazione meramente fattuale, $p = q$ simbolizza una "necessary connection".

A questo punto Lewis inserisce i postulati, con relativa parafrasi linguistica, del suo sistema di implicazione stretta:

1.1 $pq \prec qp$

Se p e q sono entrambi veri, allora q e p sono entrambi veri.

1.2 $qp \prec p$

Se q e p sono entrambi veri, allora p è vero.

1.3 $p \prec pp$

Se p è vero, allora p è vero e p è vero.

1.4 $p(qr) \prec q(pr)$

Se p è vero e q e r sono entrambi veri, allora q è vero e p e r sono entrambi veri.

1.5 $p \prec -(-p)$

Se p è vero, allora è falso che p sia falso.

1.6 $(p \prec q)(q \prec r) \prec (p \prec r)$

Se p implica strettamente q e q implica strettamente r, allora p implica strettamente r.

1.7 $\sim p \prec -p$

Se è impossibile che p sia vero, allora p è falso.

1.8 $p \prec q = \sim q \prec \sim p$

"p implica strettamente q" equivale a "'q è impossibile' implica strettamente 'p è impossibile'"

Le "operations" che Lewis inserisce per derivare i teoremi dai postulati sono tre:

1. *Sostituzione.* — Qualunque proposizione può essere sostituita con p, q o r, ecc. Se p è una proposizione allora sarà una proposizione anche $-p$ e $\sim p$. Se p e q sono proposizioni allora sarà una proposizione anche pq. Ancora, di una qualsiasi coppia di espressioni relazionate da $=$, ognuna può essere sostituita rispettivamente dall'altra.

2. *Inferenza.* — Se p è asserito e $p \prec q$ è asserito, allora q può essere asserito.

3. *Introduzione congiunzione.* — Se p e q sono separatamente asseriti, pq può essere asserito.

Rispetto all'articolo che abbiamo analizzato poc'anzi, *The Matrix Algebra for Implications* che rappresenta fra gli articoli giovanili quello più vicino al *Survey*, quest'ultimo differisce per l'introduzione di due definizioni, l'*equivalenza stretta* e l'*equivalenza materiale*, e per qualche variazione nell'elenco dei postulati. Al di là della variazione nell'uso della simbologia, della quale ci siamo già occupati altrove, fino al postulato 1.4 la lista si rivela identica, il postulato 1.5 del *Survey* non è altro che il postulato P.7 del *The matrix Algebra*, i postulati 1.7 e 1.8 del *Survey* sono rispettivamente i postulati P.8 e P.9 del *The Matrix Algebra for Implications*. Nella lista di postulati del *Survey* sono assenti due postulati che invece troviamo nella lista del *The Matrix Algebra*, P.5 e P.6, mentre nel *Survey* troviamo un solo postulato che non troviamo nel *The Matrix Algebra* il postulato 1.6.

Come lo stesso Lewis fa notare i primi sei postulati del *Survey* non presentano grossissime novità rispetto al passato se non per la relazione di implicazione stretta ($\prec$); con le dovute distinzioni non si discostano molto dai postulati dell'implicazione materiale. Grande importanza invece ricoprono i postulati 1.7 e 1.8 che sono principi di trasformazione che operano sugli altri postulati così da rappresentare il fulcro di tutto il sistema. Il postulato 1.7 appare abbastanza ovvio nel suo significato, maggiori spiegazioni richiede l'1.8. In realtà il postulato 1.8 è equivalente alla coppia di postulati:

$(p \prec q) \prec (- \sim p \prec - \sim q)$

Se p implica q. allora 'p è possibile' implica 'q è possibile'

$(\sim p \prec \sim q) \prec (-p \prec -q)$

Se 'p è impossibile' implica 'q è impossibile' allora 'p è falso' implica 'q è falso'

Queste due proposizioni risultano più evidenti del postulato di partenza nonostante esprimino la medesima relazione.

C'è un però a tutto questo: nella stesura originale del *Survey* Lewis commette un errore che gli verrà fatto notare da Emile L. Post, come ci annuncia egli stesso nelle prime righe di un articolo del 1920. Questo suo errore consiste nell'aver creato un calcolo dell'implicazione alternativo alla logica classica, ma che ha il difetto di collassare proprio sulla logica classica. Questo suo errore viene di fatto analizzato e corretto nell'articolo suddetto del 1920 dal titolo esplicativo "*Strict Implication – An Emendation*". Queste correzioni danno vita ad un nuovo sistema, che non collassa sulla logica classica, e che inseguito, nella *Symbolic Logic*, prenderà il nome di "Sistema S3".

Ma in cosa consiste l'errore di Lewis nel sistema del calcolo dell'implicazione materiale sel *Survey*? Post fa notare a Lewis come il postulato 1.8, con le sue due proposizioni equivalenti, fa si che si crei un'equivalenza fra l'impossibilità ($\sim$) e la falsità ($-$)vale a dire che $\sim p = -p$.

Vediamo nel dettaglio la dimostrazione: le proposizioni equivalenti al postulato 1.8 che Lewis prende in considerazione sono:

2.2 $(p \prec q) \prec (\sim q \prec \sim p)$ e la 2.21 $(\sim p \prec \sim q) \prec (p \prec q)$.
Da quest'ultima si prova che $\sim p = -p$ come segue:

2.21:$(\sim q \prec \sim p) \prec (p \prec q)$ (1)
1.02:$(p \prec q) = \sim (p - q)$ (2)
1.02 $\{\sim q/p; \sim p/q\}$:$\sim q \prec \sim p = \sim (\sim q - \sim p)$ (3)
(3),(2):(1) $= \sim (\sim q - \sim p) \prec \sim (p - q)$ (4)
(1) $\{(\sim q - \sim p)/q; (p-q)/p\}$: $[\sim (\sim q - \sim p) \prec$
$\sim (p-q)] \prec [(p-q) \prec (\sim q - \sim p)]$ (5)
(5):(4) $\prec p - q \prec \sim q - \sim p$ (6)
(6) $\{-p/q\}$: $p - (-p) \prec (\sim -p)(- \sim p)$ (7)
2.51 : (7) $= pp \prec (\sim -p)(- \sim p)$ (8)
2.81 : (8) $= p \prec (\sim -p)(- \sim p)$ (9)
2.1 $\{\sim p/p; - \sim p/q\}$: $(\sim -p)(- \sim p) \prec \sim -p$ (10)
1.6 $\{(\sim -p)(- \sim p)/q; \sim -p/r\}$: $(9)x(10) \prec p \prec \sim -p$ (11)
(11) $\{-p/p\}$: $-p \prec \sim -(-p)$ (12)
2.51 : (12) $= -p \prec \sim p$ (13)
1.7 :$\sim p \prec -p$ (14)
1.06 : (13) x (14) $= (\sim p = -p)$ Q.E.D.

È del tutto palese come questa rivelazione risulti devastante: in termini filosofici si crea una uguaglianza fra l'idea di impossibilità e di falsità, ciò vuole significare che non ci sarebbe stato da parte di Lewis alcun passo avanti rispetto alla logica classica. La logica dell'implicazione stretta poneva l'impossibilità come un valore di verità aggiunto rispetto ai semplici valori di verità vero-falso della logica classica, con l'uguaglianza tra l'impossibile e il falso si viene a creare una semplice sovrapposizione tra i due calcoli. Dal punto di vista logico il suo calcolo collassa sul calcolo dell'implicazione materiale della logica classica facendo apparire il calcolo dell'implicazione stretta una semplice "redundant form" della logica classica.

La soluzione Lewis la propone proprio nell'articolo del '20: si deve sostituire il postulato 1.8: $p \prec q =\sim q \prec\sim p$ con $(p \prec q) \prec (\sim q \prec\sim p)$.

Nel 1927 M. Wajsberg dimostrerà che il calcolo dell'implicazione stretta di Lewis, così come descritto nel *Survey* e con l'emendazione del '20, non collassa sul calcolo della logica classica trovando un teorema del calcolo classico che non può essere dimostrato in S3. Lo stesso Lewis in una nota della seconda appendice della *Symbolic Logic* riconosce a Wajsberg di essere stato il primo a dare la prova del non-collasso del calcolo:

> Dr. Wajsberg's letter also contained the first proof ever given that the System of Strict Implication is not reducible to Material Implication[19, p.492]

Wajsberg arriva così a dimostrare che un importante teorema della logica classica non è dimostrato nel calcolo S3: $p \supset (q \supset p)$ teorema noto come "legge a fortiori".

Capitolo 3

Symbolic Logic

3.1 Storia e struttura

La *Symbolic Logic* rappresenta la fase più matura della riflessione di Lewis sulla logica. Edita per la prima volta nel 1932 è un'opera scritta in collaborazione con Cooper Harold Langford, professore all'Università del Michigan; avrà una riedizione nel 1959 con l'aggiunta di una appendice (la terza) scritta dallo stesso Lewis. Questo importantissimo scritto rappresenta la naturale evoluzione e punto fermo di arrivo dell'evoluzione del pensiero di Lewis intorno al suo calcolo dell'implicazione stretta. Come abbiamo cercato di raccontare in questo nostro lavoro, Lewis attraverso un percorso evolutivo partito con i primi scritti del 1912/1913, proseguito attraverso i dibattiti nelle pagine delle riviste con alcuni suoi colleghi e attraverso l'esperienza della redazione del *Survey* arriva, con la *Symbolic Logic*, alla sua maturità intellettuale, dove con precisione espone i suoi calcoli dell'implicazione stretta. Nel resto della sua vita non si occuperà più di questi argomenti se non sporadicamente e solamente tramite qualche singolo articolo.

Nonostante sia un'opera realizzata a quattro mani, gli autori sono molti chiari nella prefazione all'opera nel dichiarare esplicitamente quali capitoli siano stati di competenza dell'uno e quali dell'altro, e la suddivisione è piuttosto netta: i capp. dall'I all'VIII sono stati scritti da Lewis assieme all'Appendice 2 e 3. I capp dal IX al XIII sono merito di Langford che scrive anche la prima appendice. In questo contesto ci sembra utile soffermarci sulle sole parti scritte da Lewis perchè il nostro tema generale non è la *Symbolic Logic* in quanto tale, ma l'importanza che questo scritto ricopre nella ricostruzione dello sviluppo del pensiero di Lewis.

Come il *Survey* del 1918 anche la *Symbolic Logic* ha lo scopo di essere utilizzata dagli studenti di Harvard come manuale nei corsi di logica. Ma la sua funzione non termina qui: la *Symbolic Logic* ha anche una parte monografica dove Lewis espone i suoi sistemi dell'implicazione stretta e la filosofia che sostiene i concetti di implicazione e deducibilità: è quindi rivolta sia agli studenti di logica che sono alla ricerca di un manuale di logica simbolica elementare; sia agli specialisti che troveranno nel resto dell'opera del materiale originale, o comunque del materiale tecnico di livello superiore che per la prima volta appare in un unico volume. Non solo: il carattere filosofico di alcune problematiche generali, e spesso controverse, della logica simbolica possono affascinare coloro i quali hanno interessi puramente filosofici, sopratutto nel capitolo dedicato all'implicazione e alla deducibilità. Lo stesso Sterling P. Lamprecht, curatore della prima edizione della *Symbolic Logic*, sintetizza così a quali gruppi di studiosi può rivolgersi questo testo:

> The present volume is therefore fitted to introduce the elementary student to the field of symbolic logic and to interest the specialist. And its bearing on broader problems of logic make it a challenge to serious students of philosophy[19, Introduzione del curatore]

I capitoli I-V rispecchiano nella struttura lo sviluppo del *Survey*, ma per quanto riguarda i contenuti nella *Symbolic Logic* si è cercato di comprimere maggiormente alcune parti e di non riprodurne altre che sono matematicamente importanti, ma che non lo sono dal punto di vista logico. In questi capitoli si descrive in linea generale la storia della logica simbolica, il ruolo che l'algebra di Boole-Schröder nello sviluppo della logica, la storia del calcolo proposizionale e delle intuizioni contenute nei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell.

Nel capitolo VI si vuole rifondare, tramite il più rigoroso 'logistic method', la logica simbolica; la comprensione di questo capitolo, come dicono gli stessi autori nella prefazione, è essenziale per chi volesse andare avanti con gli studi di trattati come i *Principia Mathematica*. Qui sono esposti in forma rigorosa i calcoli dell'implicazione stretta. I capitoli VII e VIII presuppongono ciò che si argomenta nel capitolo precedente e rappresentano i capitoli più filosofici dell'intera opera e, nonostante non siano necessari per la comprensione del resto del trattato, si occupano della natura e del significato della logica simbolica. Questi due capitoli rappresenteranno gran parte del lavoro che in questo contesto si vuole dedicare alla *Symbolic Logic* proprio in virtù dei temi trattati. Come abbiamo precedentemente detto Lewis si occupa anche della redazione delle Appendici 2 e 3: nella appendice due si occupa della struttura del calcolo dell'implicazione stretta, mentre nella Appendice 3, aggiunta all'edizione del 1959, inserisce alcune precisazioni sul sistema S2.

Lo scopo generale del trattato, come anche lo scopo dell'intera riflessione di Lewis sull'implicazione, è quindi quello di produrre un calcolo di logica proposizionale in cui un'implicazione $p \to q$ si può definire tale se e solo se q è deducibile da p; questo è il calcolo dell'implicazione stretta che Lewis cercherà di sviluppare al meglio attraverso cinque differenti sistemi.

3.2 *Truth-Value Systems*

L'analisi del capitolo VII della *Symbolic Logic,* che Lewis dedica ai sistemi "Truth-Value" e al metodo delle matrici, sarà organizzata secondo tre argomenti principali: il primo, sulla quale cercheremo di essere sintetici per non appesantire la lettura, sarà dedicata al sistema delle tavole di verità e al funzionamento di un sistema vero-funzionale a due valori di verità; il secondo in cui si analizzerà un sistema a tre valori di verità (Łukasiewicz-Tarski); il terzo in cui prenderemo in considerazione il sommario in sette punti che Lewis espone in chiusura di capitolo.

In termini matematici un'algebra a due valori è una classe di elementi , p, q, ecc., ognuno dei quali può essere =0 o =1. Quando $p = 1$ è interpretato usualmente come "p è vero", e $p = 0$ come "p è falso"[1]. Questo significa che una volta dati i valori di verità a p e a q la verità o la falsità di espressioni come $\sim p$, o $p \supset q$, o $p \vee \sim q$, e di qualsiasi altra funzione di p e q che può figurare nel sistema, è determinata.

Lewis osserva che il sistema dell'implicazione stretta, $\prec$, a differenza del calcolo proposizionale classico, non è vero funzionale, almeno nel caso in cui i valori di verità siano 2:

p	q	$p \supset q$	$p \prec q$
1	1	1	Indeterminato
1	0	0	0
0	0	1	Indeterminato
0	1	1	Indeterminato

Nelle prime due colonne ci sono le quattro combinazioni possibili per i valori di verità di p e q. Nella terza e nella quarta colonna i risultati per i quattro possibili casi dell'implicazione. Come possiamo notare nel caso dell'implicazione materiale il risultato è sempre determinato, ed è vero in tutti i casi tranne quello in cui l'antecedente è vero e il conseguente è falso, il che è assolutamente in linea con ciò che esprime la sua definizione in termini di negazione e congiunzione: $p \supset q =\sim (p \sim q)$. Diversamente, nel caso dell'implicazione stretta, $p \prec q$ è falsa solo nel caso in cui si ha antecedente vero e conseguente falso, in tutti gli altri casi il suo valore di verità non è determinato; questo perché il valore di verità di un'implicazione stretta non dipende esclusivamente dai valori di verità di p e di q. Possia-

[1]Un'algebra è un modello matematico di una logica. Ogni logica può essere tradotta in un'algebra e viceversa. L'algebra di Boole a due elementi coincide con la logica classica (o sistema dell'implicazione materiale).

mo quindi affermare che un qualsiasi sistema vero-funzionale può essere sviluppato in maniera meccanica:

> Even proofs, in the ordinary sense of inference from postulates, can be dispensed with: that any principle, expressible in the symbols of the system, holds or does not hold can be determined by investigating its truth-status for all combinations of the truth-values of the elements. This is the matrix method [19, p. 200-201].

Tutto ciò che si richiede per applicare questo metodo è che la definizione di ogni funzione sia data secondo la forma della matrice o tavola di verità, la quale da sola determinerà i valori di verità o falsità della funzione per ogni possibile combinazione dei valori di verità assegnati ai suoi argomenti. Ad esempio nei casi della negazione, della congiunzione e della disgiunzione:

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	pq	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Se per ogni valore di verità degli elementi il valore di verità dell'espressione è $= 1$, siamo di fronte ad una legge del sistema; questo significa che le leggi del sistema, in termini di p, q, ecc, sono quelle espressioni che hanno sempre valore di verità =1 (cioè che sono sempre vere) indipendentemente dal valore di verità che assumono i singoli elementi p e q.

Il calcolo a tre valori di verità di Łukasiewicz e Tarski rappresenta un'alternativa al calcolo a due valori. Questo calcolo è basato sulla matrice

C	0	$\frac{1}{2}$	1	N
0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Con pCq dobbiamo intendere "p implica q", con Np "non-p" oppure "p è falso". Veniamo ai valori di verità: con $p = 1$ dobbiamo leggere "p è certamente vero"; con $p = 0$ dobbiamo leggere "p è certamente falso"; con $p = \frac{1}{2}$ leggiamo "il valore di verità di p è dubbio".

Sono definite, in riferimento a C, altre tre relazioni:

$$pOq = (pCq)Cq \qquad \text{Def.}$$

Questa relazione è un possibile analogo della disgiunzione $p \vee q$ del calcolo bivalente e si legge "p o q".

$$pAq = N(NpONq) \qquad \text{Def.}$$

Si legge "p e q" ed è un analogo della congiunzione pq

$$pEq = (pCq)A(qCp) \qquad \text{Def.}$$

Questa è l'analogo dell'equivalenza nel calcolo a due valori, si legge "p è equivalente a q" ed è l'analogo di $p \equiv q$.

pCq e le ulteriori tre definizioni hanno le loro tavole di verità che possiamo rappresentare in questo modo:

p	q	pCq	pOq	pAq	pEq
1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	0	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	0	1

Per la comprensione di pCq sarà bene valutare la sua analogia con l'implicazione a noi familiare, $p \supset q$, e definire alcune regole: il valore di pCq è 1 quando il valore di p è uguale o minore del valore di q; quando invece il valore di p supera quello di q allora il valore di pCq è $1 - p + q$.

Analizzando attentamente la colonna di pCq si può notare un fatto importante: quando $p = 1$ il valore di pCq è 1 solamente quando anche q assume valore 1. Questo significa che quando p è una proposizione vera nel sistema pCq sarà altrettanto vera se e solo se anche q sarà altrettanto vera.

Una cosa importante da notare e sottolineare è che per ogni principio valido di questo sistema, l'analogo nel calcolo bivalente rimane valido, questo processo non è però reversibile. Possiamo vedere tutto ciò osservando cosa succede quando da una qualsiasi matrice del sistema togliamo il valore di verità $\frac{1}{2}$:

p	q	pCq	pOq	pAq	pEq
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1

Comparando questa matrice con quella del calcolo bivalente scopriamo che pCq coincide con $p \supset q$; pOq coincide con $p \vee q$, e via dicendo. È importante in ogni caso capire cosa questo significa. Il calcolo bivalente contiene tutti i teoremi del sistema trivalente, ma ne contiene anche altri, così possiamo dire che il sistema trivalente non è altro che il sistema bivalente con alcuni [[parti]] in meno. Sarà quindi vero che per ogni teorema di questo calcolo il suo analogo nel sistema bivalente rimarrà valido; sarà vero anche che certe leggi del sistema bivalente sono assenti nell'altro perché, fermo restando che valgano per i valori di verità 1 e 0, falliscono quando alcuni elementi assumono il valore $\frac{1}{2}$.

È il caso, ad esempio, del principio del terzo escluso che in un sistema a tre valori di verità come quello presentato da Łukasiewicz:

$pONp$ nel sistema trivalente fallisce proprio quando i suoi elementi assumono il valore di $\frac{1}{2}$ invalidando il teorema. È piuttosto chiaro come nel sistema a due valori di verità, vero/falso, il principio del terzo escluso sia valido, ma in un sistema in cui è peculiare l'introduzione di un terzo valore di verità, né vero né falso, questo principio crolla non essendo vero che "p o è vero o è falso".

Il capitolo sui sistemi vero-funzionali della *Symbolic Logic* si conclude con un sommario riepilogativo dove Lewis traccia le caratteristiche principali di tali sistemi. Cercheremo di riportare il sommario il più fedelmente possibile nei concetti chiave, cercando di essere anche più sintetici possibile.

(1) I sistemi vero-funzionali sono tali quando contengono solo funzioni che sono categoriche in termini di vero-funzionalità del sistema. Diciamo "categorica" di una funzione se è tale che per ogni valore assegnato ad ogni singolo suo termine è determinata senza ambiguità.

(2) Il numero di funzioni non-equivalenti di uno o più elementi, e i valori della matrice di tali elementi è semplicemente fissato dal numero di valori di verità del sistema: se n è il numero è il numero di valori di verità allora n^n sarà il numero di funzioni ad un elemento; il numero di funzioni a due elementi sarà invece n^{n^2}.

(3) Le condizioni sulle quali un qualsiasi sistema vero-funzionale può essere interpretato come un calcolo di proposizioni sono due: (a) I valori di verità devono rappresentare quelle proprietà tali che ogni proposizione deve avere al massimo uno fra questi insiemi di proprietà.Questa condizione sarà soddisfatta se i valori di verità rappresentano un'esaustiva classificazione di proposizioni in accordo con alcuni principi di divisione. (b) La proprietà rappresentata da un qualsiasi valore di verità designato deve essere tale che qualunque proposizione abbia tale proprietà sia asseribile validamente.

(4) Il significato di una qualsiasi funzione è determinato da due fattori: il primo è ciò che la propria tavola di verità definisce; il secondo è l'interpretazione che si impone alla vero funzionalità: una differente interpretazione farà si che la stessa "matrix-function", in un astratto sistema a n-valori, avrà le stesse "matrix-properties" ma un differente significato, con la conseguenza che le leggi saranno sì le stesse, ma avranno un senso diverso.

(5) Segue dalla condizione (b) al punto (3): se c'è una equiparazione fra il designato valore di verità e l'asseribilità, le leggi di un qualsiasi sistema vero-funzionale saranno tautologie vero-funzionali per ogni interpretazione valida del sistema.

(6) Le leggi di una qualsiasi relazione implicativa pIq, non vengono alterate con l'interpretazione dei valori di verità purché lo stesso valore di verità sia identificato con l'asseribilità. Ciò che una relazione implicativa è per una data interpretazione, rimarrà tale per qualsiasi interpretazione che può essere validamente imposta.

(7) Un sistema vero-funzionale è semplicemente una struttura matematica astratta che diventa un sistema logico solo attraverso l'interpretazione. Una qualsiasi interpretazione di un tale sistema presuppone un significato logico antecedente e una verità logica antecedente che deve essere creata in funzione di questo significato logico. Lo sviluppo del sistema logico produrrà verità logiche nel senso che consegue necessariamente dalla verità e dal significato che l'interpretazione presume implicitamente.

3.3 Implicazione e deducibilità

Questo capitolo, probabilmente il più filosofico di tutta l'opera, raccoglie al suo interno la discussione sul rapporto fra l'implicazione e la deducibilità. Cerca di dare una risposta al problema che tanto interessa Lewis: in quale modo possiamo, all'interno di un sistema logico, interpretare e di conseguenza descrivere la deducibilità? E quale tipo di implicazione, se esiste, risponde al meglio a questa domanda?

Il capitolo inizia con una divisione del significato di "logica esatta": il primo vede la logica come un modello di inferenza deduttiva, cioè un modello che sia capace di interpretare nel modo corretto il concetto di deducibilità e di renderlo al meglio in un calcolo logico; il secondo come un soggetto che comprende i principi che sono tautologici, che quindi non si concentra sulla effettiva traducibilità della deducibilità, ma sulla solidità dei propri postulati e dei propri teoremi. I due differenti significati non si possono definire equivalenti per significato, dobbiamo intendere il secondo come più esteso, più inclusivo. La proprietà principale di un sistema di deduzione è sicuramente quella di essere in grado di delineare in modo corretto le caratteristiche di quella relazione che rimane valida fra da una parte un insieme di premesse e dall'altra una conclusione che può essere validamente inferita. Comunemente questo è il caso in cui tale relazione prende il nome di implicazione. In realtà esiste più di una relazione in grado di ricoprire il ruolo di fondamenta dell'inferenza. Se ammettiamo che il tratto distintivo di una relazione di tipo implicativo, pIq, è che se p è una premessa vera e che pIq sia valida, allora q sarà vera, allora possiamo constatare come il numero di relazioni che possiedono questa proprietà sia superiore a uno.

Lewis è convinto, e lo sostiene esplicitamente, che questa varietà di relazioni implicative non è da ricercare necessariamente fra le relazioni dei sistemi vero-funzionali, è convinto del fatto che relazioni non vero-funzionali possano adempiere questo compito. Una di queste relazioni non-verofunzionali è la *Strict Implication*.

Si può pensare, sostiene Lewis, che deve esistere una qualche verità riguardo al fatto che la deducibilità sia indipendente a questa varietà, sia nei sistemi che nelle relazioni. Il punto fondamentale è capire se sia possibile o no dedurre una certa proposizione q da un'altra proposizione p; si deve quindi ricercare se esista o no un sistema nel quale sia possibile tradurre una relazione implicativa, del tipo pIq, in "q è deducibile da p".

Consideriamo due relazioni implicative tali che una delle due sia valida in una classe di casi nella quale l'altra non lo è. Non potranno entrambe essere valide se e solo se il conseguente nella relazione è deducibile dall'antecedente. Ancora: solo una delle due può dar luogo a una inferenza. Il problema che emerge è se c'è un senso, e se c'è quale, in cui relazioni singole possano valere, senza ambiguità, se e solo se q è deducibile da p. Si dovrà quindi partire, afferma Lewis, da ciò che hanno in comune quelle relazioni che possono dare luogo ad una inferenza.

Tutte hanno questa proprietà: quando l'antecedente p in una relazione del tipo pIq è asseribile come vera, il conseguente q non può essere che vero anch'esso, o per meglio dire non si da il caso di una relazione implicativa che abbia l'antecedente vero e il conseguente falso. Questa proprietà deve appartenere a tutte quelle relazioni, che siano vero-funzionali o che non lo siano, che hanno la pretesa di dare luogo ad una inferenza. Questo perchè possiamo prendere come vero significato di inferire o dedurre che da una proposizione vera non se ne possa dedurre una falsa. Inoltre tutte le implicazioni vero-funzionali hanno come proprietà 'addizionale' il fatto che se p e q sono entrambi veri, allora sarà vera anche la relazione implicativa pIq.

Cioè, per un qualsiasi significato di 'implicare' che sia definibile in un sistema vero-funzionale, si da il caso che in una qualsiasi coppia di proposizioni vere una implichi l'altra. La ragione di ciò e che una relazione del tipo vero-funzionale o è valida sempre quando entrambi i termini sono veri, o non è valida quando entrambi i termini sono veri. Così per ogni implicazione vero-funzionale possono verificarsi solamente due casi: o qualunque proposizione vera deve implicare qualunque proposizione vera, oppure una proposizione non vera non implicherà alcuna proposizione vera. Quest'ultimo caso comporta il fatto che la relazione di implicazione non dia luogo ad una inferenza.

Questo discorso porta con se una conseguenza. Se noi considerassimo ogni implicazione del tipo pIq equivalente all'espressione "q è deducibile da p" allora ogni coppia di proposizioni vere dovrà essere tale che ognuna può essere validamente dedotta dall'altra. In tal modo, in termini di implicazione vero-funzionale, due implicazione potrebbero essere indipendenti esclusivamente se una delle due fosse vera e l'altra falsa. Ma come definizione di deducibilità quest'ultima sembra piuttosto assurda come dichiara lo stesso Lewis. Se non considerassimo quest'ultima idea un'assurdità, ogni sistema matematico che sia in grado di rappresentare la verità, sarebbe deducibile interamente da un qualsiasi suo teorema considerato come postulato. Sembrerebbe quindi abbastanza evidente la falsità dell'espressione "Ogni proposizione vera è deducubile da qualsiasi altra". E se questa fosse falsa si presenterebbe una conseguenza ineludibile: non esiste relazione di implicazione vero-funzionale del tipo pIq che sia vera ogni volta che q è deducibile da p, e non sia valida quando q *non* è deducibile da p, cioè sembrerebbe non esistere alcuna relazione di implicazione vero-funzionale che sia dipendente, nella sua verità, dalla deducibilità fra i termini della relazione. Ogni relazione di questo tipo di conseguenza viene definita da Lewis troppo inclusiva per poter essere equivalente all'idea di deducibilità di q da p. Ora Lewis si pone una domanda importante: come può una implicazione vero-funzionale dar luogo ad una inferenza? E poi continua chiedendosi come sia possibile che allo stesso tempo siano vere queste due affermazioni : (1) una relazione pIq non sia equivalente a 'qè deducibile da p', ma sia valida qualche volta quando 'q *non* è deducibile da p' e che (2) quando p è una proposizione del sistema e pIq è asseribile come una legge del sistema, noi possiamo validamente inferire q come proposizione del sistema. La risposta a queste domande è semplicemente che se pIq è una relazione che è valida qualche volta quando 'q non è deducibile da p' - e sono tali tutte le implicazioni vero funzionali - allora q non può essere dedotta da p per il semplice fatto che sia vera pIq. L'inferenza è possibile sulla base del fatto che pIq è una tautologia; così Lewis si chiede quando un' implicazione vero-funzionale possa non essere condizionata dai valori di verità dei singoli termini, ovvero quando non si comporta come un'implicazione vero-funzionale, e la risposta è che lo è quando è una tautologia. Tutto ciò ci suggerisce che un indizio sulla relazione di deducibilità possa essere scoperto indagando sulla natura dell'implicazione vero-funzionale in forma di tautologia. Consideriamo tre riflessioni:

1. Prima di tutto esistono tautologie oltre a quelle vero-funzionali.

2. Se supponiamo che le leggi della logica devono essere tautologiche o verità necessarie, allora una qualsiasi legge di inferenza deduttiva secondo cui un enunciato q che può essere inferita da un altro enunciato p, deve essere una tautologia. Se questo dovesse essere il caso allora per ricavare tali principi di deduzione valida abbiamo bisogno di scoprire una relazione di implicazione che quando è valida rappresenta una tautologia. Ma questa non è e non può essere una relazione che sia sempre tautologica, non può essere quindi una relazione R tale che la funzione pRq abbia sempre valore 'vero'. Deve essere una relazione che delle volte non sia valida, ossia quando q non è deducibile da p.

3. Il terzo punto sostiene che se 'p implica q' è sinonimo di 'q è deducibile da p'; e se 'q è deducibile da p' se e solo se 'p implica q' è una tautologia; allora 'p implica q' deve essere vero quando, per una particolare p e per una particolare q, esprime una tautologia; e deve essere invece falso quando, sempre per p e q particolari non esprime una tautologia. In qualunque caso una relazione vero-funzionale non potrà mai avere questi requisiti perché per sua stessa natura può essere vera senza essere valida; una qualsiasi implicazione vero-funzionale dovrà poter essere vera senza essere tautologica.

Una qualsiasi implicazione vero-funzionale può dar luogo ad una inferenza perché (p and pIq) Iq esprime una tautologia. E questa può essere una tautologia senza che pIq sia una tautologia. In questo caso si deve notare come sia solo la seconda implicazione I ad essere asserita. È solo a questa implicazione che è richiesto di essere una tautologia per far sì che l'inferenza da 'p and pIq' a q sia una deduzione valida

Supponiamo che p e q siano due proposizioni vere e indipendenti tra loro, e seguiamo Lewis nel suo esempio considerando $p =$'l'aceto ha un sapore acido', e $q =$'alcuni uomini hanno la barba'. Come presupposto sappiamo che una qualsiasi implicazione vero-funzionale, pIq, sarà vera quando sia l'antecedente che il conseguente sono veri, ciò che succede anche nell'esempio. In questo senso pIq non rappresenta una tautologia dato che l'affermazione "è falso che ('l'aceto abbia sapore acido' è vero e 'alcuni uomini hanno la barba' è falso)" è si una affermazione vera, ma non è tautologica né è una verita necessaria, in quanto ci sono delle alternative ipotizzabili. Tuttavia (p and pIq) Iq è una tautologia. Questo perché: (a) una qualsiasi implicazione vero-funzionale non è valida se l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Cosicché quando sarà il caso che l'implicazione sarà valida noi già siamo sicuri del fatto che "non è il caso che p sia vero e che q sia falso" sia una affermazione vera; (b) dalle premesse "p è vero" e "non è il caso che p sia vero e q sia falso", la verità di q può essere così validamente inferita. Ancora: la nostra proposizione q 'alcuni uomini hanno la barba' non può essere dedotta dall'altra proposizione, (p: 'l'aceto ha sapore acido'); ciononostante dalle due premesse 'l'aceto ha sapore aspro' (p) e "è falso che 'l'aceto abbia sapore aspro' e ' gli uomini non hanno barba'" $\sim (p \sim q)$, la conclusione "alcuni uomini hanno la barba" può essere dedotta. In questo modo troviamo una risposta alla domanda come una implicazione vero-funzionale, che non è affatto equivalente alla relazione di deducibilità, possa ciononostante dar luogo a una inferenza valida. Il fatto che (p and pIq) Iq sia una tautologia ha due motivazioni. La prima è che, come abbiamo già più volte sottolineato, qualsiasi implicazione vero-funzionale del tipo pIq non è valida se l'antecedente è vero e il conseguente è falso, cosicché nel momento in cui asseriamo pIq possiamo essere sicuri che non si darà il caso che p sia vero e che q sia falso. La seconda motivazione è che dalle premesse "p è vera" e " non si dà il caso in cui p sia vera e q falsa" la verità di q può essere dedotta validamente: in questo modo "è falso che (p è vero e non è il caso che p sia vero e q falso, ma q non è vero)" è una tautologia.

Ora Lewis, in questa sezione del testo, prende in esame una specifica relazione di implicazione vero-funzionale: l'implicazione materiale $p \supset q$. Per definizione significa " è falso che 'p è vero e q è falso'"

$$p \supset q =\sim (p \sim q)$$

Chiaramente nell'esempio dell'aceto e degli uomini barbuti: "è falso che 'l'aceto ha sapore aspro e che nessun uomo ha la barba'" è tautologica ma non vera.

Ma per questi e per qualunque altro significato di p e q la proposizione

$$[p(p \supset q)] \supset q$$

è una tautologia. Sostituiamo in questa l'implicazione fra parentesi per ottenere

$$[p \sim (p \sim q)] \supset q$$

nella quale l'implicazione rimane tautologica. Ora che questa sia una tautologia appare evidente se la trasformiamo in una equivalente

$$\sim [p \sim (p \sim q) \sim q]$$

che sempre per equivalenza diventa

$$\sim [(p \sim q) \sim (p \sim q)]$$

Così abbiamo che $[p(p \sim q)] \supset q$ è equivalente a " è falso che $p \sim q$ sia allo stesso tempo vero e falso". Quest'ultima affermazione è ovviamente una tautologia, indipendentemente dal significato di p e q.

Secondo Lewis questo è l'unico caso in cui una relazione di implicazione, che comunque non è equivalente alla relazione di deducibilità, può dar luogo ad una inferenza valida. Infatti, se si considerasse pIq come equivalente a "q è deducibile da p" la relazione non sarebbe valida, perché dedurre da 'l'aceto ha sapore aspro' 'alcuni uomini hanno la barba' sembra piuttosto assurdo. Il passo successivo nell'indagine su quale tipo di relazione di implicazione possa essere avvicinata al significato di deducubilità, è quello di essere in grado di stabilire la differenza fra "pIq è vera" e "pIq è una tautologia". Quando pIq è vera, ma non tautologica, q può essere dedotta dalle due premesse p e pIq; quando pIq è una tautologia allora q può essere dedotta da p. Questo è esattamente il compito che secondo Lewis $p \prec q$ assolve nel calcolo dell'implicazione stretta. Come abbiamo già più volte sostenuto la proprietà fondamentale che ogni relazione di implicazione deve possedere è che pIq non deve essere vera quando p è vera e q è falsa. Così per far sì che pIq sia una tautologia abbiamo necessità di una relazione R tale che pRq significhi "p è vera e q è falsa è logicamente impossibile", che è esattamente il significato dell'implicazione stretta

$$p \prec q =\sim \Diamond(p \sim q)$$

Oppure in altri termini possiamo dire che l'implicazione stretta equivale a "è necessariamente vero che non si dia il caso che p sia vero e q sia falso", ovverosia:

$$p \prec q =\sim \Diamond \sim [\sim (p \sim q)]$$

Ora possiamo dire in accordo con Lewis che in $p \prec q$ abbiamo trovato i requisiti giusti che cercavamo all'inizio della nostra indagine: l'implicazione stretta vale quando pIq è una tautologia e al contrario non vale quando pIq non è necessariamente vera; in altri termini $p \prec q$ ha i requisiti di una relazione che è vera quando q è deducibile da p e non è vera quando q non è deducibile da p.

Possiamo descrivere tutto ciò in una maniera differente, analizzando la relazione che intercorre tra l'implicazione stretta e una qualsiasi implicazione vero-funzionale. Se introduciamo nel sistema dell'implicazione stretta una qualsiasi implicazione vero-funzionale le leggi che regolano tale relazione saranno teoremi provabili nel sistema dell'implicazione stretta, così da ottenere che nel caso in cui questa implicazione vero-funzionale, I, sia tautologica, allora saremo in grado di sostituirla con '$\prec$'; nel caso in cui invece questa relazione di implicazione vero-funzionale sia vera, ma non sia tautologica allora non può essere sostituita con '$\prec$'. Ciò significa che solo ed esclusivamente nei casi in cui l'implicazione vero-funzionale I dà luogo ad una inferenza tale implicazione può essere sostituita dall'implicazione stretta. Se per esempio introduciamo $p \supset q$ all'interno del sistema dell'implicazione stretta è possibile dedurre ogni singolo teorema dell'implicazione materiale, e in questi teoremi in tutti i casi in cui la relazione di implicazione è tautologica '$\supset$' può essere sostituito con '$\prec$'; contrariamente quando la relazione '$\supset$' è annidata in un teorema e non è una tautologia, allora non può avvenire la sostituzione.

Per schematizzare al meglio questo punto Lewis introduce un piccolo prospetto con due colonne: nella prima sono elencate (secondo la numerazione adottata nel capitolo VI) alcune proposizioni, nella forma in cui appaiono nel calcolo dell'implicazione materiale. Nella seconda colonna ci sono le stesse proposizione, ma laddove l'implicazione materiale è tautologica è stata rimpiazzata dall'implicazione stretta. Quando nella seconda colonna appare l'implicazione materiale, $\supset$, tale implicazione non è tautologica e non può essere sostituita con '$\prec$', la sostituzione, in questo caso, renderebbe falso il teorema.

(1)		(2)	
15.21	$p \supset q \supset p$	15.2	$p \prec q \supset p$
15.23	$\sim p \supset p \supset q$	15.22	$\sim p \prec p \supset q$
15.31	$\sim (p \supset q) \supset p \supset \sim q$	15.3	$\sim (p \supset q) \prec p \supset \sim q$
15.41	$\sim (p \supset q) \supset q \supset p$	15.4	$\sim (p \supset q) \prec q \supset p$

Particolare interessa desta il teorema 14.29[2]: $p \wedge p \supset q \prec q$. Se consideriamo ora l'implicazione stretta come equivalente a "q è deducibile da p" allora $p \wedge p \supset q \prec q$ significherà che q è deducibile dalle due premesse p e $p \supset q$. Questo non significa assolutamente che q è deducibile da p quando $p \supset q$ è valido. E qui si arriva ad un punto importante della discussione di Lewis sulla deducibilità. Infatti lui stesso scrive:

> Inability to distinguish between (1) "If p is true and $p \supset q$ holds, then q is true" and (2) "When $p \supset q$ holds, q is deducible from p" is responsible for most the confusion about material implication and deducibility [19, p. 246].

Il sistema dell'implicazione stretta con i suoi principi è capace di esprimere in maniera esplicita il concetto di deduzione in un modo tale che un sistema vero-funzionale non è in grado di fare, per la ragione che, nell'implicazione stretta, ciò che è tautologico è totalmente distinguibile da ciò che è semplicemente vero. Questa distinzione non è riscontrabile nei simboli di un sistema vero-funzionale. Questo avviene perché riprendendo la 14.29 $p \wedge p \supset q \prec q$ se p è una tautologia e lo è anche $p \supset q$ abbiamo che

$$[(p \prec q)\ (\sim \Diamond \sim p)] \prec (\sim \Diamond \sim q)$$

e dal fatto che $p \prec q = \sim \Diamond \sim [\sim (p \sim q)] = \sim \Diamond \sim (p \supset q)$ la precedente diventa:

$$[(\sim \Diamond \sim p)(\sim \Diamond \sim (p \supset q)] \prec \sim \Diamond \sim q$$

Ovverosia, se q è deducibile da p allora da questo fatto e dal fatto che p è una tautologia, possiamo dedurne che q sia necessariamente vero.

L'unico dubbio che si può sollevare riguardo l'adeguatezza dell'implicazione stretta nel descrivere in forma logica la relazione di

[2] *Cfr*[19, p.138]

deducibilità deriva dal fatto che anche l'implicazione stretta ha i suoi paradossi:

$$\sim \Diamond p \prec (p \prec q)$$

$$\sim \Diamond \sim p \prec (q \prec p)$$

vale a dire: "se p è impossibile allora p implica strettamente qualsiasi proposizione q" e "se q è necessario, allora qualsiasi proposizione q implica strettamente p". Se $p \prec q$ è equivalente a "q è deducibile da p", allora per soddisfare questi teoremi si dà il caso che nella prima proposizione da una qualunque proposizione che neghi una verità necessaria può essere dedotta qualsiasi cosa; nella seconda che una verità necessaria può essere dedotta da qualsiasi altra cosa. Ciò che in queste pagine Lewis vuole dimostrare è che questi teoremi sono apparentemente paradossali perché esprimono verità logiche che sono per lo più trascurate. Seguiamo passo per passo il ragionamento di Lewis.

Innanzitutto è doveroso sgombrare il campo da quelle incertezze che possono confondere le idee. Per prima cosa 'deducibile' in questo caso ha il significato di 'deducibile con una modalità di inferenza che sia valida'; secondo si deve osservare il significato di necessario e impossibile. Per definizione,

$$18.14 \ \sim \Diamond \sim p = \sim p \prec p = \sim (\sim p \circ \sim p)$$

il che significa che con 'p è necessario' intendiamo 'p è implicato dalla sua negazione' e 'la negazione di p non è auto-consistente'; mentre

$$18.12 \ \sim \Diamond p = p \prec \sim p = \sim (p \circ p)$$

vale a dire che con 'p è impossibile' intendiamo 'p implica la sua stessa negazione' e ' p non è auto-consistente'. Ciò che è necessario, definito in questo modo, coincide con la classe delle tautologie; ciò che è impossibile, invece, coincide con la classe di ciò che nega qualche tautologia.

Lewis procede ora ad indicare il modo in cui, da una proposizione la cui verità è impossibile, qualsiasi cosa può essere dedotta. La negazione di una qualsiasi proposizione della forma $\sim p \vee p$ ha un suo equivalente nell'espressione $\sim (p \wedge \sim p)$.

Da una qualsiasi proposizione nella forma $p \wedge \sim p$ qualsiasi proposizione q può essere dedotta. La prova di questa affermazione è conosciuta come 'Indipendent Proof' e dimostra come da una proposizione impossibile si possa dedurre una qualunque altra proposizione. La prova è chiamata 'indipendent' perché i principi che sono usati sono tutti intuitivamente accettabili e non dipendono in alcun modo dalla definizione che Lewis dà di deducibilità o inferenza. Riportiamo ora l'Indipendent Proof nella sua versione integrale:

$$\begin{array}{lrll} \text{Assumiamo} & & p \sim p & (1) \\ & (1) & \prec p & (2) \\ & (1) & \prec \sim p & (3) \\ & (2) & \prec p \vee q & (4) \\ & (3)\ (4) & \prec q & \end{array}$$

> This demonstration is a paradigm, in which p may be any proposition so chosen that $\sim p \vee q$ will express the tautology which is in question; and q may be deduced from the denial of a tautological or necessary truth: the theorem
>
> $$\sim \Diamond p \prec p \prec q$$
>
> states a fact about deducibility[19, pp. 250-251].

In modo del tutto simile procede anche la prova del fatto che da una proposizione qualsiasi, p, possa essere dedotta una proposizione della forma $\sim q \vee q$. Riportiamo la prova:

$$\begin{array}{lllr} \text{Assumiamo} & & p & (1) \\ & (1) & \prec: p \sim q. \vee .pq & (2) \\ & (2) & =: p. \sim q \vee q & (3) \\ & (3) & \prec . \sim q \vee q & \end{array}$$

Allo stesso modo della precedente secondo Lewis anche questa dimostrazione è un paradigma, nella quale, in questo caso, si dimostra come p possa essere una proposizione qualsiasi, e q può essere scelta così da ottenere una tautologia, $\sim q \vee q$. Come sopra il teorema $\sim \Diamond \sim q. \prec .p \prec q$ "states a fact about deducibility".

Quindi, secondo quanto voluto dimostrare da Lewis, i due teoremi paradossali di cui si è appena occupato, non offrono appiglio alla supposizione secondo cui l'implicazione stretta non possa coincidere con la relazione di deducibilità.

C'è un'altra proprietà del sistema dell'implicazione che può sembrare paradossale: tutte le proposizioni necessarie, del tipo $\sim p \vee p$, $\sim q \vee q$, sono equivalenti, come sono equivalenti tutte le proposizioni impossibili. Considerate due tautologie qualsiasi queste sono equivalenti allo stesso modo in cui p è equivalente a $p \sim q$ e pq:

$$\begin{array}{l} \sim p \vee p. =: (\sim p \vee p) \sim q. \vee .(\sim p \vee p)q \\ =: \quad \sim p \sim q. \vee .p \sim q. \vee . \sim pq. \vee .pq \\ =:\sim p(\sim q \vee q). \vee .p(\sim q \vee q := . \sim q \vee q \end{array}$$

Il capitolo dedicato all'implicazione e alla deducibilità definisce, come abbiamo visto, il rapporto fra le relazioni di implicazione e il concetto di deducibilità, arrivando alla conclusione che il sistema dell'implicazione stretta ne descrive appieno il significato in termini logici. Lewis non si limita ad analizzare i punti a favore della sua teoria; con l'analisi di quei teoremi che apparentemente sembrano paradossali - e che farebbero cadere il sistema dell'implicazione stretta nello stesso errore di quello dell'implicazione materiale - analizza i punti critici del suo calcolo.

Il capitolo 'Implication and Deducibility' non si conclude con questi argomenti. Nel finale il suo discorso si apre ad una prospettiva più ampia e, se possibile, ancor più filosofica, analizzando la possibile esistenza di diversi sistemi di calcolo. Questi argomenti verranno presi in considerazione nel paragrafo successivo di questo lavoro che avrà come argomento il pluralismo logico nei lavori di Lewis.

3.4 Il pluralismo logico in Lewis

Il pluralismo logico è una teoria secondo cui esiste più di una logica corretta. Al contrario il monismo logico sostiene che ci sia una ed una sola logica corretta. In questo paragrafo si cercherà di delineare quali caratteristiche ha il pluralismo logico di Lewis attraverso una lettura trasversale dei suoi scritti.

All'interno del *corpus* degli scritti di Lewis non troviamo uno o più scritti interamente dedicati al tema del pluralismo. Piuttosto si può parlare di un argomento che, tramite un piccolo riferimento, o una risposta ad una obiezione di un collega, o alla fine di un capitolo della *Symbolic Logic*, permea, in misura maggiore o minore, tutti, o quasi tutti, i lavori di Lewis. C'è tuttavia un momento di grossa riflessione di Lewis sul tema della pluralità della logica. Nel 1932, quasi in contemporanea con la stampa della *Symbolic Logic* (che contiene interessanti digressioni sul pluralismo logico in chiusura del capitolo dedicato all'implicazione e alla deducibilità), esce sul *The Monist* un suo articolo dal titolo *Alternative Systems of Logic*. L'anno successivo nella *The Philosophical Review,* Paul Weiss, pubblica una risposta all'articolo di Lewis, il quale replicherà, a sua volta, con un articolo, nella stessa rivista, agli inizi del 1934. Questo scambio di opinioni ci offrirà una traccia sulla quale descrivere il pluralismo logico in Lewis.

Se Lewis è convinto che non esista una sola logica, ma che ne esistano diverse, è anche convinto che un principio deve stare alla base della ricerca di quelle logiche che sono corrette. La logica è una questione di preservazione della verità, quindi una logica, qualunque essa sia, sarà corretta nel momento in cui rispetterà il fatto che un argomento è deduttivamente valido se e solo se in qualunque caso nel quale le sue premesse sono vere lo saranno anche le sue conclusioni. Ciò che quindi interessa Lewis è che una logica sia in grado di preservare la validità di un ragionamento. Non solo, il suo essere pragmatico gli fa porre un altro principio: un sistema logico deve anche essere in grado di descrivere alla perfezione certi concetti di uso comune: ad esempio la deducibilità. Si potrebbe pensare che sotto alcuni punti di vista il pluralismo logico che lo porta a sostenere l'esistenza di più di una logica da una parte; il pragmatismo che lo porta a trovare un linguaggio logico capace di descrivere alla perfezione certe operazioni mentali dall'altra, siano incompatibili. In realtà le due posizioni in Lewis diventano complementari: la sua ricerca di un calcolo logico che sia capace di tradurre, in un linguaggio formale, il concetto di deducibilità - e il fatto di averlo trovato nel calcolo dell'implicazione stretta - non preclude il fatto che altri linguaggi siano in grado di esprimere alla perfezione altri concetti. Lewis sarà sempre convinto del fatto che il suo calcolo dell'implicazione stretta sia il miglior modo per esprimere 'logicamente' l'idea di deducibilità, e altempo stesso è fermamente convinto che il suo non sia l'unico calcolo logico possibile

> There can be no reasonable doubt that it is such pragmatic considerations which account for the accord between traditionallogical principles and Strict Implication, and the failureof such accord in the case of truth-value system. The laws of all such formal systems are equally true - of their own relations. But pragmatically the laws of truth-value systems, where these diverge from those of Strict Implication, are 'false' or unacceptable in the sense that they have no useful application to inference [19, p. 262].

Se consideriamo che quindi non esiste un' unica logica in cui le nostre inferenze possono essere descritte e siamo disposti ad accettare che il numero relazioni di implicazione è illimitato, abbiamo bisogno di un qualche criterio che sia indipendente dai valori di verità vero-falso; d'altronde è pur vero che anche nella decisione su quale figura usare per le nostre deduzioni non ci aiutiamo solo con valori di verità vero e falso. Su questi criteri Lewis si esprime spesso nei suoi articoli, delle volte in modo molto superficiale, altre volte in maniera più approfondita. Possiamo fare generalmente tre considerazioni su quei sistemi che di volta in possiamo usare o non usare. In primo luogo dobbiamo considerare che le "leggi logiche" non sono altro che leggi esplicative o affermazioni analitiche del significato di certi concetti, come verità, falsità, implicazione, consistenza, che sono considerati come basilari per la costruzione di "sistemi di logica". Questi sistemi non sono altro che una scelta di quei concetti, insieme ai principi che ne regolano i significati e le operazioni.

Secondariamente come abbiamo già visto c'è un illimitato numero di sistemi logici, ciascuno con le sue leggi e i suoi principi, tali da essere considerati delle alternative fra loro. I principi e i concetti di ognuno appartengono ad uno e non ad altri e generalmente non possono essere introdotti in un altro sistema. Inoltre la molteplicità e varietà di questi sistemi ci costringe, non potendoli il genere umano contemplarli tutti allo stesso tempo, a fare una scelta che dovrà identificare il nostro canone di inferenza.

In terzo luogo ogni scelta conscia di un buon sistema di logica è operato in base a dei criteri legati alle nostre abitudini mentali, alla convenienza, alla semplicità e a come si accorda con il nostro significato comune di deduzione. Questo significa che ogni sistema che viene scelto lo è stato pragmaticamente. Il fatto però che un sistema sia stato scelto non significa affatto che un altro sia sbagliato o inadeguato. Significa esclusivamente che in base a quello per cui il primo è stato scelto, il secondo era più povero di strumenti e che nel riprodurre la nostra ordinaria inferenza non era altrettanto adatto.

All'inizio del suo articolo Paul Weiss dichiara subito la sua contrarietà nei confronti del pluralismo logico. Secondo Weiss non esistono logiche alternative e sostiene apertamente che la aggiunta di valori di verità o dal fatto che si ragioni intensionalmente o estensionalmente non fa si che si arrivi ad una nuova logica: i sistemi costruiti da Lewis non sono altro che le vecchie logiche con differenti valori vero-funzionali:

> From the fact that there are more than two classes into which all propositions can be grouped, or from the fact that the term 'implies' may have many different meanings, it does not follow that there are or can be a number of exclusive logics[31, p. 520].

La risposta di Lewis si trova nell'articolo *Paul Weiss On Alternative Logics* apparso nel 1934 sulla rivista *The Philosophical Review*. La sua strategia si basa sul far comprendere a Weiss come l'introduzione di nuovi valori di verità non fa si che una vecchia logica si trasformi in una nuova, l'introduzione del concetto di possibilità, necessità, consistenza ecc, creano una vera e propria nuova logica in virtù del fatto che questa nuova logica è figlia di necessità espressive che si creano nel momento in cui si sente il bisogno formalizzare fatti del mondo che la logica classica non riesce a formalizzare. È come se le due logiche fossero il risultato di due bisogni differenti. Per esplicare questo fatto Lewis si avvale di un esempio, cerchiamo di riportarlo nella sua essenza. Si immagini di incontrare un uomo di Atlantide che insiste di voler fare le proprie inferenze utilizzando uno dei significati inusuali di relazioni di implicazione. Noi possiamo al tempo stesso capire, nei termini della nostra idea di implicazione, che condividiamo con Mr Weiss, la validità delle inferenze che l'uomo di Atlantide fa. Noi possiamo anche considerare che la nostra logica dell'implicazione sia unica e universale e che quella dell'abitante di Atlantide non sia niente di nuovo, tuttavia l'atlantide capisce ogni nostra inferenza. Così capiamo che nonostante la nostra sia una logica universale e che quindi sia valida, anche la logica dell'atlantide è valida. Ora la conclusione dell'esempio direttamente dalle parole di Lewis:

> The Atlantean therefore urges that his Atlantean system, originally imparted by the gods from whom all

> Atlanteans are descended, is the primary and universal canon of reason; and that Mr. Weiss is merely imposing an additional and wholly unnecessary limitation on the implication-relation of the canon [15, p. 74].

La discussione quindi non deve più essere se debbano esistere più logiche o no, ma su quale sia la logica migliore per un dato bisogno:

> The choice [*scil.* fra una logica o un'altra] cannot be determined by any question of absolute truth or falsity (since the principles of both are absolutely true, each in its terms), but will turn on some pragmatic consideration such as semplicity or comprehensiveness or accord with our most frequent purposes in inference. On *these* grounds, there are perfectly definite and fairly obvious reasons for choosing the usual meaning of "implies" [15, p. 74].

Quindi la nostra scelta deve ricadere su quella logica che pragmaticamente viene incontro alle nostre esigenze di formalizzazione di concetti come l'inferenza e la deducibilità.

3.5 I sistemi formali della *Symbolic Logic*

Nell'appendice 2 Lewis introduce cinque differenti sistemi dell'implicazione stretta. In questa appendice, in un primo momento, presenta due serie di postulati, nella colonna A riporta i postulati del sistema introdotto nel *Survey of Symbolic Logic* con la correzione del 1920; nella colonna B una serie di postulati introdotti nel capitolo 6 della *Symbolic Logic*[3]:

[3] I due gruppi di assiomi A1-A7 e B1-B7 sono accompagnati da idee primitive e definizioni diverse, ma unite a queste formano due sistemi fra loro equivalenti.

A1	$pq \prec qp$	B1	$pq \prec qp$
A2	$qp \prec p$	B2	$pq \prec p$
A3	$p \prec pp$	B3	$p \prec pp$
A4	$p(qr) \prec q(pr)$	B4	$(pq)r \prec p(qr)$
A5	$p \prec \sim (\sim p)$	B5	$p \prec \sim (\sim p)$
A6	$p \prec q.q \prec r :\prec .p \prec r$	B6	$p \prec q.q \prec r :\prec .p \prec r$
A7	$\sim \Diamond p \prec \sim p$	B7	$p.p \prec q :\prec .p$
A8	$p \prec q. \prec . \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$	B8	$\Diamond(pq) \prec \Diamond p$
		B9	$(\exists p, q) :\sim (p \prec q). \sim (p \prec \sim q)$

In questo frangente possiamo notare una cosa importante. Il simbolo primitivo della possibilità che abbiamo spesso incontrato negli scritti di Lewis ora è l'operatore di possibilità che viene denotato con il "diamond": $\Diamond$. In altri scritti, come ad esempio il *Survey* la possibilità veniva indicata come la "falsità dell'impossibilità" ovvero '$- \sim p$'. Nella *Symbolic Logic* il simbolo $\sim$ denota nuovamente la falsità. In questo modo l'implicazione stretta $p \prec q$ è definita così: $\sim \Diamond(p \sim q)$. Per quanto riguarda l'operatore della necessità dovremo ancora aspettare per vedere il "box" ($\Box$) che non viene utilizzato da Lewis nella *Symbolic Logic*. Ovviamente l'idea della necessità è comunque espressa da Lewis che usa la perifrasi $\sim \Diamond \sim$.

Ora, se noi consideriamo i postulati B1-B7 abbiamo gli assiomi del calcolo dell'implicazione stretta conosciuto come S_1[4].

Per il sistema S_1 abbiamo le idee primitive:

1. Proposizioni: p, q, r, ecc.

2. Negazione: $\sim p$ ('non-p', oppure "p è falso")

[4] McKinsey nel 1934 dimostrerà che l'assioma B5, essendo ridondante, può essere ignorato. Per approfondimenti si veda McKinsey, J. C. C., 1934, "A Reduction in Number of the Postulates for C. I. Lewis' System of Strict Implication", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 40; pp. 425–27.

3. Congiunzione: pq, o $p.q$ ('p e q', oppure "p è vero e q è vero", oppure "p e q sono entrambi veri")

4. Auto-consistenza o possibilità: $\Diamond p$. ("p è auto-consistente", oppure "p è possibile", oppure "è possibile che p sia vero")

5. Equivalenza logica: $p = q$

Per quanto riguarda invece le operazioni consentite dal calcolo abbiamo:

Sostituzione a: Se assumiamo una espressione nella forma $p = q$ possiamo sostituire p con q per ogni occorrenza di p, e viceversa.

Sostituzione b: Entrambe le formule di una equivalenza stretta possono essere sostituite con altre formule.

Aggiunzione: Se p e q sono separatamente asserite, allora può essere asserita la loro congiunzione pq

Inferenza stretta: Se asseriamo p e $p \prec q$ possiamo asserire anche q[5].

Il sistema S_2 si forma con l'aggiunta del postulato B8 che Lewis chiama "postulato della consistenza" al sistema S_1. Questo postulato è indipendente sia dal gruppo di postulati B1-B7, e da B9, e dal gruppo A1-A7.

L'aggiunta al sistema S_1 dell'assioma A8 crea il calcolo dell'implicazione stretta denominato S_3. Che, come abbiamo visto altrove, è lo stesso sistema che Lewis presenta nel *Survey of Symbolic Logic*.

L'assioma B9 (postulato dell'esistenza) è stato inserito da Lewis per provare che l'implicazione stretta possa essere interpretata come

[5]Il calcolo S_1 con le sue idee primitive, le operazioni e gli assiomi, e conseguenti teoremi, è descritto da Lewis nel capitolo 6 pp. 123 ss.

implicazione materiale:

> For some p and q, p does not strictly imply q, and p does not strictly imply that q is false; or, there is some pair of propositions, p and q, so related that p implies nothing about the truth or falsity of q. For material implication, we have proved that
>
> $$p \supset q. \vee .p \supset \sim q$$
>
> For every p and q, either materially implies q or p materially implies that q is false. Thus $(\exists p, q) :\sim (p \prec q). \sim (p \prec \sim q)$ e $p \supset q. \vee .p \supset \sim q$ would be exact contradictories if $p \prec q$ coincides with $p \supset q [19, p.179]$.

Ora Lewis introduce un altro gruppo di tre postulati:

C10: $\sim \Diamond \sim p \prec \sim \Diamond \sim \sim \Diamond \sim p$
la necessità di p implica strettamente la necessità della necessità di p

C11: $\Diamond p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p$
la possibilità di p implica strettamente la necessità della possibilità di p

C12: $p \prec \sim \Diamond \sim \Diamond p$
la verità di p implica strettamente la necessità della possibilità di p

S_4 viene dedotto dall'insieme dei postulati B1-B7 e da C10. Contiene tutti i teoremi di S_3 più tutti i teoremi conseguenti dall'assunzione di C10. Allo stesso modo S_5 deriva da S_3 con l'aggiunta di C11 (oppure al posto di C11, C10 e C12). Contiene tutti i teoremi di S_4 con l'aggiunta delle conseguenze di C11. Se a S_5 si aggiunge B9 sono inclusi anche tutti i teoremi di S_2.

Riguardo al significato logico di S_5 Lewis ha un'idea chiara:

In my opinion, the principal logical significance of the system S_5 consists in the fact that it divides all propositions into two mutually exclusive classes: the intensional or modal, and the extensional or contingent. According to the principles of this system, all intensional or modal propositions are either necessarily true or necessarily false[19, p. 501].

Conclusioni

In questo lavoro ho cercato di ricostruire il processo filosofico che portò Lewis alla formulazione nella Symbolic Logic dei cinque sistemi dell'implicazione stretta: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Dagli scritti del periodo giovanile fino al 1932, anno di pubblicazione della *Symbolic Logic*, si sono susseguiti numerosi articoli in cui Lewis si è occupato dell'implicazione stretta sia dal punto di vista filosofico, che dal punto di vista formale. Il mio intento è stato quello di evidenziare il più fedelmente possibile tale processo di crescita, con un occhio di riguardo alle questioni filosofiche, senza dimenticare di evidenziare i punti critici e le differenze tra uno scritto e l'altro nella formalizzazione dei sistemi dell'implicazione stretta che Lewis ci presenta di volta in volta.

In parte questi obiettivi sono stati raggiunti. Sicuramente è stata sviluppata l'idea di legare insieme diverse fasi della vita di Lewis con un unico filo conduttore. Questo filo conduttore è lo sviluppo della teoria dell'implicazione stretta dalle prime descrizioni e le prime idee primitive, fino alla definizione completa e ad un apparato filosofico corposo e maturo.

Molte cose non sono state fatte, e si intravede, in prospettiva futura, la possibilità di continuare su questa traccia, completando ciò che in questo lavoro è stato tralasciato. Sicuramente si dovrà lavorare maggiormente in profondità sugli scritti che non si interessano direttamente della questione dell'implicazione stretta, e sulla letteratura secondaria, che in maniera frammentata ha comunque trattato questi argomenti.

Ma la prospettiva di ricerca forse più interessante è quella che riguarda il dibattito, interno alla scuola di Lewis, sull'implicazione stretta. Dopo aver scritto la *Symbolic Logic* Lewis ha sottoposto uno stesso argomento, la questione dell'implicazione stretta, a diversi suoi studenti in diversi anni. Questi scritti sono la testimonianza della vitalità del dibattito che si venne a creare intorno alle idee di Lewis sul concetto di implicazione. Sarebbe in conclusione un interessantissimo progetto utilizzare questo lavoro come fondamento per analizzare approfonditamente le tesi di dottorato di Nelson, Bronstein e Parry così da aggiungere un tassello importante alla ricostruzione di una vera e propria scuola di pensiero che ha avuto come maestro Clarence Irving Lewis.

Bibliografia

[1] A.R. Anderson and N.D. Belnap, Jr, "The Pure Calculus of Entailment", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 27, No. 1, (Mar. 1962), pp. 19-52

[2] N.D. Belnap, JR, "Entailment and Relevance", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 25, No. 2, (Jun. 1960), pp. 144-146

[3] A.F. Emch, "Implication and Deducibility", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 1, (Mar., 1936), pp. 26-35

[4] J.D. Goheen and J.L. Mothershead, Jr (a cura di), *Collected Papers of Clarence Irving Lewis*, Stanford University Press, Stanford 1970

[5] C.I. Lewis, "Implication and the Algebra of Logic", *Mind*, New Series, Vol. 21, No. 84 (Oct., 1912), pp. 522-531

[6] C.I. Lewis, "Interesting Theorems in Symbolic Logic", *The Journal of Philosophy and Scientific Methods*, Vol. 10, No. 9 (Apr. 24, 1913), pp. 239-242

[7] C.I. Lewis, "A New Algebra of Implications and Some Consequences", *The Journal of Philosophy and Scientific Methods*, Vol. 10, No. 16 (Jul. 31, 1913), pp. 428-438

[8] C.I. Lewis, "The Calculus of Strict Implication", *Mind*, New Series, Vol. 23, No. 90 (Apr., 1914), pp. 240-247

[9] C.I. Lewis, "The Matrix Algebra for Implications", *The Journal of Philosophy and Scientific Methods*, Vol. 11, No. 22 (Oct. 22, 1914), pp. 589-600

[10] C.I. Lewis, "The Issues Concerning Material Implication", *The Journal of Philosophy and Scientific Methods*, Vol. 14, No. 13 (Jun. 21, 1917), pp. 350-356

[11] C.I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley 1918

[12] C.I. Lewis, "Strict Implication - An Emandation", *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, Vol. 17, No. 11 (May. 20, 1920), pp. 300-302

[13] C. I. Lewis, "The Structure of Logic and its Relation to Other Systems", *The Journal of Philosophy*, Vol. 18, No. 19 (Sep. 15, 1921), pp. 505-516

[14] C. I. Lewis, "Alternative Systems of Logic", *The Monist*, Vol. 42, No. 4 (Oct., 1932), pp. 481-507

[15] C. I. Lewis, "Paul Weiss on Alternative Logics", *The Philosophical Review*, Vol. 43, No. 1 (Jan., 1934), pp. 70-74

[16] C.I. Lewis, "Emch's Calculus and Strict Implication", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 3 (Sep., 1936), pp. 77-86

[17] C.I. Lewis, *Logic and Pragmatism*, in Contemporary American Philosophers, a cura di G. Adams e W.M. Pepperel Montague, London, Allen & Unwin; New York, Macmillan 1942,

[18] C.I. Lewis, *Mind and the World Order: Outline of a Theory of Knowledge,* New York, Charles Scribners, Dover Publications, New York 1956

[19] C.I. Lewis, C.H. Langford, *Symbolic Logic*, Dover Publications, New York 1959.

[20] H. MacColl, "'If' and 'Imply'", *Mind*, New Series, Vol. 17, No. 65 (Jan., 1908), pp. 151-152

[21] H. MacColl, "'If' and 'Imply'", *Mind*, New Series, Vol. 17, No. 67 (Jul., 1908), pp. 453-455

[22] H. MacColl, *Symbolic Logic and its Application*, Logmans, Green, and Co, London, 1906

[23] J.C.C. McKinsey"A Reduction in Number of the Postulates for C. I. Lewis' System of Strict Implication", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 40 (1934), pp. 425–27

[24] C. Mangione, in: L. Geymonat (a cura di), Storia del pensiero scientifico e filosofico, 5: *Dall'Ottocento al Novecento, Garzanti, Milano 1973

[25] E.J. Nelson, "Intensional Relations", *Mind*, n.s Vol. 39, 1930, pp. 440-453

[26] E.J. Nelson, "Implication and Deducibility", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 2 (Jun., 1936), pp. 67-68

[27] G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge 2008

[28] B.Russell, *I principi della Matematica*, Longanesi, Milano 1951

[29] B.Russell, A.N.Whitehead, *Introduzione ai " Principia Mathematica"* , La Nuova Italia, Firenze 1977

[30] B.Russell,"'If' and 'Imply', A Reply to Mr. MacColl", *Mind*, New Series, Vol. 17, No. 66 (Apr., 1908), pp. 300-301

[31] Paul Weiss, "On Alternative Logics" *The Philosophical Review*, Vol. 42, No. 5 (Sep., 1933), pp. 520-525

[32] N.Wiener, "Mr Lewis and Implication", *The Journal of Philosophy and Scientific Methods*, Vol. 13, No. 24 (Nov. 23, 1913), pp. 656-662

[33] D.C.Williams, "Clarence Irving Lewis 1883-1964", *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 26, No. 2 (Dec., 1965), pp. 159-172