



Università degli Studi di Cagliari

DOTTORATO DI RICERCA

Storia, Filosofia e Didattica delle Scienze

XXVII ciclo

**L'INSEGNAMENTO DELLA MECCANICA QUANTISTICA
NELLA SCUOLA SECONDARIA:
FONDAMENTI, PROBLEMI, PROPOSTE**

Settori scientifico disciplinari di afferenza
FIS/08, FIS/04, FIS/01

Presentata da	Dott. Giampaolo Lai
Coordinatore Dottorato	Prof. Marco Giunti
Tutor	Prof. Giovanna Puddu

Esame finale anno accademico 2013-2014

In questi tempi di alta specializzazione sono ben pochi coloro che hanno una comprensione così profonda di due diversi campi della conoscenza da non rendersi ridicoli in almeno uno dei due.

Richard P. Feynmann, *Il senso delle cose*

Sommario

La meccanica quantistica non è solo la teoria scientifica che consente di spiegare i fenomeni del mondo atomico e subatomico, ma anche una grande avventura del pensiero umano: all'inizio del Novecento ha infatti rivoluzionato la visione del mondo di scienziati e filosofi. Queste e altre considerazioni sono alla base dell'importanza dell'insegnamento della fisica moderna nella scuola secondaria. Da queste riflessioni, però, scaturisce un complesso problema di ricerca didattica: se e come è possibile affrontare la fisica moderna in età preuniversitaria. Il problema è divenuto tanto più urgente dopo alcuni recenti cambiamenti dell'ordinamento della scuola secondaria superiore in Italia, che prevedono l'insegnamento di alcuni argomenti di fisica moderna nell'ultimo anno dei licei scientifici.

L'ipotesi che ha guidato questo lavoro di ricerca è che l'insegnamento e l'apprendimento della meccanica quantistica incontrano alcuni ostacoli che rendono difficile la realizzazione delle proposte didattiche elaborate dai gruppi di ricerca. Per quanto riguarda le difficoltà per gli studenti, sono stati studiati principalmente gli ostacoli formali e la possibilità di elaborare proposte didattiche con strumenti matematici accessibili agli studenti. Per quanto riguarda le difficoltà dal punto di vista degli insegnanti, è stata studiata la loro percezione del problema, mediante un'indagine compiuta su un gruppo di docenti di un liceo locale e un'indagine più ampia su un gruppo che ha partecipato a un'importante esperienza di formazione a livello nazionale. Dai dati ottenuti scaturiscono alcune significative considerazioni sull'attuale formazione degli insegnanti nella didattica della fisica moderna.

Abstract

Quantum mechanics isn't just the theory that explains the atomic and subatomic world, but also a great adventure of the human thinking: since the beginning of the Twentieth Century it has deeply changed the world view of scientists and philosophers. On these and other reflections is based the importance of teaching modern physics in the high school. By these considerations comes out a complicated problem of research in physics education: the possibility and the way we could teach modern physics in the period that comes before academic studies. The problem has become more urgent since some latest changes in the education law in Italy. The hypothesis of this project of research is that teaching and learning of quantum mechanics meet some obstacles that make difficult to implement the didactic proposals developed by researchers. In the matter of students' difficulties,

are mainly studied the formal obstacles and the possibility of developing didactic proposals with mathematic tools accessible for the students. In the matter of teachers' difficulties, is studied their view of the problem, by means of an investigation into a teachers group of a local high school and a wide investigation into a group who participated in an important experience of nationwide training. From the results of investigations arise very interesting reflections about teachers training in modern physics education.

Indice

Introduzione	1
I Un quadro normativo, epistemologico e didattico per l'insegnamento della meccanica quantistica	5
1 Un quadro normativo	7
1.1 L'ultima revisione della scuola secondaria superiore	7
1.2 La certificazione delle competenze	9
1.2.1 Uno sguardo all'Europa	9
1.2.2 La normativa italiana	13
1.2.3 Dibattito pedagogico	15
1.3 La formazione degli insegnanti	16
1.3.1 Formazione e reclutamento	17
1.3.2 Titoli di accesso alle classi di concorso	19
1.3.3 I percorsi universitari per la formazione degli insegnanti	21
1.3.4 La formazione in servizio	22
2 Basi epistemologiche e cognitive	25
2.1 Introduzione	25
2.2 Un'epistemologia per la didattica della meccanica quantistica	25
2.2.1 Il positivismo classico, Popper e Kuhn	25
2.2.2 Gli ostacoli epistemologici nell'apprendimento della meccanica quantistica	27
2.3 Come si apprende	29
2.3.1 Dallo stimolo-risposta a "imparare a imparare"	31
2.3.2 Un approccio cognitivo	34
2.3.3 Altri paradigmi dell'apprendimento	36

2.3.4	L'influenza degli studi psicocognitivi sulla didattica delle scienze	38
3	La trasposizione didattica	41
3.1	Le risposte delle didattiche disciplinari	41
3.2	La trasposizione didattica	42
3.3	I diversi tipi di conoscenze	44
3.4	Caratteristiche dei saperi e della loro trasmissione	45
3.5	Il tempo didattico	48
3.6	Rielaborazione e precostruzione	51
4	La meccanica quantistica	53
4.1	Alcune formulazioni della meccanica quantistica	53
4.1.1	Introduzione	53
4.1.2	Meccanica delle matrici	53
4.1.3	Meccanica ondulatoria	57
4.1.4	Cammini di Feynman	62
4.2	Teoria quantistica dei campi	67
4.2.1	L'equazione di Klein-Gordon e l'equazione di Dirac	67
4.2.2	La quantizzazione del campo (metodo non covariante)	71
4.2.3	Vantaggi della formulazione lagrangiana	73
4.2.4	Quantizzazione del campo di Klein-Gordon	74
4.2.5	Quantizzazione del campo di Dirac	75
5	Interpretazione della meccanica quantistica	77
5.1	Perché è importante l'interpretazione della meccanica quantistica	77
5.2	L'interpretazione di Copenhagen	78
5.3	Un approccio logico alla meccanica quantistica	80
5.4	La decoerenza e il problema della misura	82
5.5	Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen	84
5.6	Le variabili nascoste	88
5.7	Le disuguaglianze di Bell	89
5.8	Il problema della realtà	91
5.9	Interpretazione "a molti mondi"	92
5.10	La teoria GRW	94
5.11	Aspetti filosofici	94
6	Studi in didattica della meccanica quantistica	97
6.1	Perché insegnare la fisica moderna	97

6.2	Difficoltà e resistenze nell'insegnamento della fisica del Novecento	98
6.3	Impostazioni per l'insegnamento della meccanica quantistica	99
6.4	La proposta di Udine	101
6.4.1	Una proposta didattica per gli studenti	101
6.4.2	Una proposta per la formazione insegnanti	102
6.5	La proposta di Milano	105
6.5.1	Problemi alla base della didattica della meccanica quantistica	105
6.5.2	La proposta	107
6.5.3	Formazione insegnanti	110
6.5.4	Esperimenti wick way	110
6.5.5	Esperimenti interaction-free	112
6.6	La proposta di Torino	113
6.7	La proposta di Roma "La Sapienza"	114
II	Verso una proposta didattica: concetti fondanti, strumenti matematici, fenomenologia	119
7	Scelta dei contenuti per una proposta didattica	121
7.1	Perché la trasposizione didattica della meccanica quantistica?	121
7.2	Linee guida per una proposta didattica	122
7.3	Il principio di sovrapposizione	122
7.4	Sistemi a due stati	125
7.5	L'atomo	126
7.6	La funzione d'onda	128
7.7	Gli stati permessi	133
7.8	Alcuni concetti fondanti della meccanica quantistica	134
7.9	Una base fenomenologica	136
7.9.1	Diffrazione degli elettroni	137
7.9.2	Esperimento di Franck ed Hertz	141
8	Gli strumenti matematici	145
8.1	Strumenti matematici necessari	145
8.2	Numeri complessi	145
8.3	Spazi vettoriali	147
8.4	La probabilità	149
8.4.1	Difficoltà legate al concetto di probabilità	149
8.4.2	Verso una probabilità quantistica: problemi epistemologici	151

8.4.3	Probabilità e ampiezza di probabilità	153
8.4.4	La gaussiana	154
8.5	Sintesi degli strumenti matematici proposti	156
9	Proposte di trasposizione didattica	159
9.1	Una base quantistica	159
9.2	Esempi di esercizi	163
9.3	La funzione d'onda	166
9.3.1	Breve introduzione storica	166
9.3.2	Analogia con le onde	169
9.4	La buca di potenziale infinita	174
III	Gli insegnanti e la meccanica quantistica	177
10	Un'esperienza di formazione insegnanti	179
10.1	Introduzione	179
10.2	Svolgimento delle attività	180
10.3	Spunti di riflessione	185
10.4	Alcuni dati sulla formazione insegnanti	186
11	Una Scuola Nazionale di fisica moderna	191
11.1	Introduzione	191
11.2	Analisi dei dati	194
11.3	Alcune relazioni tra le variabili esaminate	213
11.4	Conclusioni	218
12	Riflessioni conclusive e problemi aperti	223
12.1	Uno sguardo all'esperienza professionale	223
12.1.1	La visione della scienza	224
12.1.2	A che cosa serve la scuola?	225
12.1.3	Contenuti e competenze	227
12.1.4	Esercizi nella didattica delle scienze	228
12.2	Una proposta di trasposizione didattica	229
12.3	Il problema della formazione degli insegnanti	232
12.4	L'insegnamento della meccanica quantistica: una sfida	234
	Allegati	235
A	Riferimenti normativi	237
B	L'equazione di Schrödinger e le sue soluzioni	243

C	Equazioni di Eulero-Lagrange	245
C.1	Il principio di d'Alembert	245
C.2	Il principio di Hamilton	248
C.3	Principi di conservazione	250
D	Proposta di Udine	253
D.1	Base teorica	253
D.2	Realizzazione didattica della proposta	256
D.2.1	Esperimenti con polarizzatori	256
D.2.2	Esperimenti con cristalli di calcite	257
E	Serie di Fourier e trasformata di Fourier	261
F	Alcuni integrali utili	265
G	Un'esperienza di formazione insegnanti - questionario	267
H	Una Scuola Nazionale - questionario per gli insegnanti	273
	Bibliografia	281

Introduzione

La recente revisione degli ordinamenti della scuola secondaria superiore ha suscitato la preoccupazione e l'interesse di insegnanti e ricercatori in didattica riguardo al problema dell'insegnamento della fisica moderna in età preuniversitaria. In questo lavoro di ricerca è stata affrontata la questione dell'effettiva insegnabilità di alcuni argomenti di meccanica quantistica nei licei scientifici. Per trarre risposte significative, il problema è stato suddiviso in tre domande più circoscritte:

- È possibile trattare, a livello di scuola secondaria superiore, argomenti di meccanica quantistica in maniera quantitativa? Le indicazioni nazionali e i libri di testo prevedono l'uso di strumenti matematici adeguati all'età degli studenti?
- L'attuale sistema di formazione degli insegnanti consente l'insegnamento della meccanica quantistica?
- Di quale materiale didattico si dispone (libri di testo, apparati di laboratorio, ecc.) per trattare argomenti di meccanica quantistica nella scuola secondaria?

Questo lavoro, oltre che dal contesto normativo e da considerazioni scaturite da ricerche didattiche già in corso, nasce anche dall'esperienza personale di insegnante. Esso ha pertanto anche l'obiettivo di dare una risposta, basata sui risultati di una ricerca, ad alcune domande da me formulate nel corso della mia attività professionale. Gli insegnanti, ad esempio, manifestano una sorta di timore reverenziale di fronte alla meccanica quantistica che spesso porta a non insegnare questa importante parte della fisica: un obiettivo del presente lavoro di ricerca è quindi capire se è vero che fino ad ora la fisica moderna è stata insegnata poco e, in tal caso, perché. Insegnare la meccanica quantistica, peraltro, porterebbe inevitabilmente a introdurre

per gli studenti concetti lontani dall'esperienza comune e strumenti matematici complicati: è forse anche questo un motivo per cui fino ad ora la meccanica quantistica si è affrontata poco? Il contesto in cui ci troviamo a operare ha forse scoraggiato molti insegnanti? Un altro problema è quello del libro di testo che, pur con tutti i cambiamenti che la tecnologia ha portato, rimane lo strumento didattico più importante per studenti e insegnanti. I libri di testo più diffusi tengono conto delle ricerche compiute in didattica della fisica? È fondata la sensazione di distacco fra il mondo della scuola e quello della ricerca didattica? Nella scuola di oggi si sta facendo spazio la cultura delle "competenze", che talvolta sembrano mettere in ombra i "contenuti": per la didattica di una disciplina come la fisica, e in particolar modo per la meccanica quantistica, è possibile concentrarsi sulle competenze a discapito dei contenuti?

Per rispondere a tutti questi quesiti, il presente lavoro è articolato in tre parti. Nella prima parte si esamineranno i presupposti per un insegnamento della meccanica quantistica nella scuola. La seconda parte conterrà alcune proposte di trasposizione didattica per argomenti di meccanica quantistica opportunamente scelti. La terza parte raccoglierà l'esito di indagini condotte su campioni di insegnanti, permettendo, in particolare, di avanzare considerazioni e proposte sulla formazione degli insegnanti.

Nella prima parte si presenterà, per iniziare (capitolo 1), una sintesi del quadro normativo attuale, riguardante gli ordinamenti scolastici e la formazione degli insegnanti, che è il contesto di cui si deve tener conto per l'insegnamento della meccanica quantistica. Occorrerà poi riassumere alcuni concetti di didattica disciplinare che serviranno come supporto per affrontare il problema di ricerca didattica che ci siamo posti (capitoli 2 e 3). Poiché la strada che dovremo percorrere sarà quella di passare da un "sapere" elaborato dalla comunità scientifica a un "sapere" insegnabile, partiremo dalle basi della meccanica quantistica che servono per il nostro lavoro e da un riferimento ad alcune sue formulazioni e interpretazioni (capitoli 4 e 5). Si prenderanno a questo punto in esame i principali risultati di studi già compiuti da gruppi di ricerca in didattica della fisica (capitolo 6).

Nella seconda parte sarà presentata una proposta di insegnamento della meccanica quantistica nelle seguenti tre fasi: scelta dei contenuti (capitolo 7), esame degli strumenti matematici necessari (capitolo 8), proposte di trasposizione didattica (capitolo 9). Lo scopo di questa parte del lavoro è quello di riflettere sull'inserimento nel curriculum di alcuni strumenti matematici necessari per un percorso didattico coerente e lineare sulla meccanica quantistica, sulla base di considerazioni epistemologiche, delle proposte didattiche già elaborate da gruppi di ricerca, dei libri di testo esistenti.

Nella terza parte, a supporto delle riflessioni compiute, si indagherà sulla posizione dei docenti di fronte all'insegnamento della meccanica quantistica. In particolare si descriverà un'esperienza di formazione con un gruppo di insegnanti di un liceo scientifico della Sardegna portata avanti sulla base del lavoro di ricerca presentato in questa tesi (capitolo 10) e una serie di osservazioni condotte su un gruppo di insegnanti che ha partecipato a un'importante attività di formazione sulla didattica della fisica moderna a livello nazionale (capitolo 11).

Parte I

Un quadro normativo,
epistemologico e didattico per
l'insegnamento della meccanica
quantistica

L'insegnamento della meccanica quantistica: un quadro normativo

1.1 L'ULTIMA REVISIONE DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Per inquadrare il problema degli spazi che la fisica moderna può trovare nella scuola secondaria, è opportuno sintetizzare i più recenti interventi normativi. Gli interventi di riforma della scuola sono sicuramente atti tecnici, ma sono forse, e prima di tutto, atti politici, anzitutto perché scaturiscono dal potere legislativo espresso dalla cittadinanza tramite il parlamento oppure dal potere esecutivo che comunque sottopone le sue decisioni al parlamento, e poi perché incidono sulla vita di famiglie che si affidano al sistema educativo nazionale e di professionisti che operano all'interno di tale sistema. Il carattere politico della normativa scolastica conduce inevitabilmente a divergenze di opinioni che porterebbero a spinose discussioni. Qui si vuole tracciare un panorama della situazione attuale per vedere come vi si può collocare l'insegnamento della fisica moderna.

La scelta didattica di inquadrare l'insegnamento della fisica moderna in un liceo ci obbliga a partire dal D.P.R. 89/2010¹ sulla revisione dei licei, che di seguito chiamerò Regolamento, che si inquadra in un lungo progetto di riforma. Si potrebbe discutere molto sul fatto che il Regolamento in questione scaturisce (vedi articolo 1 del suddetto D.P.R.) in attuazione del piano programmatico di interventi di cui all'articolo 64, comma 3, del decreto legge 25 giugno 2008, n. 112, convertito, con modificazioni, dalla legge 6 agosto 2008, n. 133, articolo che si trova al capo II - *Contenimento della spesa per il pubblico impiego*. Parrebbe quindi che la scelta di una revisione del sistema scolastico scaturisca non prevalentemente da ragioni di efficacia formativa e didattica ma da questioni di risparmio.

¹Per i dettagli sulla normativa citata, cfr. la tabella A.1 in appendice.

1. UN QUADRO NORMATIVO

Per quanto riguarda il contenuto del Regolamento, i punti fondamentali che si possono evidenziare sono i seguenti:

- «I percorsi liceali forniscono allo studente gli strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà, affinché egli si ponga, con atteggiamento razionale, creativo, progettuale e critico, di fronte alle situazioni, ai fenomeni e ai problemi, ed acquisisca conoscenze, abilità e competenze coerenti con le capacità e le scelte personali e adeguate al proseguimento degli studi di ordine superiore, all’inserimento nella vita sociale e nel mondo del lavoro (articolo 2, comma 2).»
- «Il percorso del liceo scientifico è indirizzato allo studio del nesso tra cultura scientifica e tradizione umanistica. Favorisce l’acquisizione delle conoscenze e dei metodi propri della matematica, della fisica e delle scienze naturali. Guida lo studente ad approfondire e a sviluppare le conoscenze e le abilità e a maturare le competenze necessarie per seguire lo sviluppo della ricerca scientifica e tecnologica e per individuare le interazioni tra le diverse forme del sapere, assicurando la padronanza dei linguaggi, delle tecniche e delle metodologie relative, anche attraverso la pratica laboratoriale (articolo 8, comma 1).»
- «I risultati di apprendimento sono declinati in conoscenze, abilità e competenze in relazione alla raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008² sulla costituzione del quadro europeo delle qualifiche per l’apprendimento permanente (EQF), anche ai fini della mobilità delle persone sul territorio dell’Unione europea (articolo 10, comma 1, lettera a).»

Sono da rilevare poi alcuni risultati di apprendimento, nella parte che riguarda il liceo scientifico, contenuti nell’allegato A del suddetto Regolamento:

- «aver acquisito una formazione culturale equilibrata nei due versanti linguistico-storico-filosofico e scientifico; comprendere i nodi fondamentali dello sviluppo del pensiero, anche in dimensione storica, e i nessi tra i metodi di conoscenza propri della matematica e delle scienze sperimentali e quelli propri dell’indagine di tipo umanistico»;
- «saper cogliere i rapporti tra il pensiero scientifico e la riflessione filosofica»;

²Vedi paragrafo successivo per i dettagli sulla normativa europea.

- «essere consapevoli delle ragioni che hanno prodotto lo sviluppo scientifico e tecnologico nel tempo, in relazione ai bisogni e alle domande di conoscenza dei diversi contesti, con attenzione critica alle dimensioni tecnico-applicative ed etiche delle conquiste scientifiche, in particolare quelle più recenti».

Un successivo regolamento, che chiameremo Indicazioni Nazionali, è stato emanato col D.M. 211/2010, che fissa gli obiettivi specifici per il liceo scientifico (allegato F). Tra le linee generali e competenze per la fisica leggiamo: «lo studente avrà appreso i concetti fondamentali della fisica, le leggi e le teorie che li esplicitano, acquisendo consapevolezza del valore conoscitivo della disciplina e del nesso tra lo sviluppo della conoscenza fisica ed il contesto storico e filosofico in cui essa si è sviluppata». Tra gli obiettivi specifici per il quinto anno leggiamo: «il percorso didattico comprenderà le conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al microcosmo e al macrocosmo, accostando le problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti». E ancora: «L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein, e dall'altro lato con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo. L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo».

1.2 LA CERTIFICAZIONE DELLE COMPETENZE

L'insegnamento della fisica, e della fisica moderna in particolare, si deve oggi inquadrare in un contesto più ampio, ricco di dibattiti, relativo al che cosa insegnare, come insegnarlo e soprattutto perché. Sintetizziamo gli esiti di questi dibattiti fino ad ora raggiunti (col rischio che diventino presto vecchi e superati): pur non essendo l'oggetto del presente lavoro, ne rappresentano un'importante cornice.

1.2.1 *Uno sguardo all'Europa*

I cambiamenti nella visione delle strategie educative sono iniziati col nuovo millennio. Il Consiglio europeo straordinario di Lisbona (23-24 marzo

2000), sulla base del crescente ruolo delle tecnologie dell'informazione e delle comunicazioni nella vita lavorativa e privata, propone una revisione completa del sistema di istruzione europeo, anche nell'ottica di garantire l'accesso alla formazione lungo tutto l'arco della vita. Poiché la società si configura sempre più come una società della conoscenza e dell'informazione, il Consiglio riconosce la necessità di innalzare il livello di istruzione cui giungono i cittadini europei al momento di lasciare gli studi. La "Strategia di Lisbona" ha come obiettivo quello di fare dell'Europa «l'economia basata sulla conoscenza più competitiva e dinamica del mondo». Per ottenere questo risultato, il Consiglio europeo di Barcellona del 2002 aveva fissato una serie di obiettivi che dovevano essere raggiunti nel 2010, secondo tre strategie: «rafforzare l'efficacia e la qualità dei sistemi, rendere i sistemi più accessibili, aprire i sistemi al mondo».

Per ciò che ci riguarda, è utile sapere che nel 2006 il Parlamento europeo e il Consiglio europeo hanno approvato una raccomandazione³ relativa allo «sviluppo delle competenze chiave», uno dei cinque obiettivi per «rafforzare efficacia e qualità dei sistemi».

Per il significato di alcuni termini che utilizzeremo spesso nel seguito, ci riferiamo al Quadro Europeo delle Qualifiche,⁴ che fornisce, tra l'altro, le seguenti definizioni:

Conoscenze Risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento. Le conoscenze sono un insieme di fatti, principi, teorie e pratiche relative ad un settore di lavoro o di studio. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le conoscenze sono descritte come teoriche e/o pratiche.

Abilità Indicano le capacità di applicare conoscenze e di utilizzare know-how per portare a termine compiti e risolvere problemi. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le abilità sono descritte come cognitive (comprendenti l'uso del pensiero logico, intuitivo e creativo) o pratiche (comprendenti l'abilità manuale e l'uso di metodi, materiali, strumenti).

Competenze Comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro

³Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962/CE), Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea del 30-12-2006, L. 340/10-98.

⁴Raccomandazione 2008/c 111/01CE del Parlamento europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente.

o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

Le competenze chiave sono:

1. comunicazione nella madrelingua;
2. comunicazione nelle lingue straniere;
3. competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia;
4. competenza digitale;
5. imparare a imparare;
6. competenze sociali e civiche;
7. spirito di iniziativa e imprenditorialità;
8. consapevolezza ed espressione culturale.

Quelle che ci interessano maggiormente, la competenza matematica e le competenze di base in scienza e tecnologia, sono definite come segue.

1. La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte).
2. La competenza in campo scientifico si riferisce alla capacità e alla disponibilità a usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie possedute per spiegare il mondo che ci circonda sapendo identificare le problematiche e traendo conclusioni che siano basate su fatti comprovati. La competenza in campo tecnologico è considerata l'applicazione di tale conoscenza e metodologia per dare risposta ai desideri o bisogni avvertiti dagli esseri umani. La competenza

in campo scientifico e tecnologico comporta la comprensione dei cambiamenti determinati dall'attività umana e la consapevolezza della responsabilità di ciascun cittadino.

La raccomandazione del Parlamento Europeo indica anche l'insieme di "conoscenze, abilità e attitudini essenziali" legate a ogni competenza. In particolare, per la competenza matematica e le competenze di base in scienza e tecnologia, sono le seguenti.

1. La conoscenza necessaria nel campo della matematica comprende una solida conoscenza del calcolo, delle misure e delle strutture, delle operazioni di base e delle presentazioni matematiche di base, una comprensione dei termini e dei concetti matematici e una consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta. Una persona dovrebbe disporre delle abilità per applicare i principi e processi matematici di base nel contesto quotidiano nella sfera domestica e sul lavoro nonché per seguire e vagliare concatenazioni di argomenti. Una persona dovrebbe essere in grado di svolgere un ragionamento matematico, di cogliere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico oltre a saper usare i sussidi appropriati. Un'attitudine positiva in relazione alla matematica si basa sul rispetto della verità e sulla disponibilità a cercare motivazioni e a determinarne la validità.
2. Per quanto concerne la scienza e tecnologia, la conoscenza essenziale comprende i principi di base del mondo naturale, i concetti, principi e metodi scientifici fondamentali, la tecnologia e i prodotti e processi tecnologici, nonché la comprensione dell'impatto della scienza e della tecnologia sull'ambiente naturale. Queste competenze dovrebbero consentire alle persone di comprendere meglio i progressi, i limiti e i rischi delle teorie e delle applicazioni scientifiche e della tecnologia nella società in senso lato (in relazione alla presa di decisioni, ai valori, alle questioni morali, alla cultura, ecc.). Le abilità comprendono la capacità di utilizzare e maneggiare strumenti e macchinari tecnologici nonché dati scientifici per raggiungere un obiettivo o per formulare una decisione o conclusione sulla base di dati probanti. Le persone dovrebbero essere anche in grado di riconoscere gli aspetti essenziali dell'indagine scientifica ed

essere capaci di comunicare le conclusioni e i ragionamenti afferenti. Questa competenza comprende un'attitudine di valutazione critica e curiosità, un interesse per questioni etiche e il rispetto sia per la sicurezza sia per la sostenibilità, in particolare per quanto concerne il progresso scientifico e tecnologico in relazione all'individuo, alla famiglia, alla comunità e alle questioni di dimensione globale.

1.2.2 *La normativa italiana*

Si inizia a parlare di competenze nella scuola italiana nel decreto che nel 1999 ha istituito l'autonomia delle scuole, che individua la sfera d'azione del Ministero e quella delle singole scuole. Esso stabilisce che, tra le altre funzioni, spetta al Ministero definire “gli obiettivi specifici di apprendimento relativi alle competenze degli alunni” (articolo 8). Successivamente la “riforma Moratti” (L. 53/2003) prevede l'emanazione di decreti legislativi, tra cui uno sulla «valutazione, periodica e annuale, degli apprendimenti e del comportamento degli studenti del sistema educativo di istruzione e di formazione, e la certificazione delle competenze da essi acquisite» (articolo 3).

Un primo decreto (D.Lgs. 59/2004), che discende dalla L. 53/2003, dove si ribadisce che «la valutazione, periodica e annuale, degli apprendimenti e del comportamento degli allievi e la certificazione delle competenze da essi acquisite sono affidate ai docenti», riguarda la scuola dell'infanzia, la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado.

Solo nel 2006/2007 la normativa italiana recepisce finalmente le “competenze chiave” europee con una legge sull'innalzamento dell'obbligo di istruzione fino alla durata di dieci anni (L. 296/2006, articolo 1, comma 622) e con un decreto (D.M. 139/2007) che traduce le competenze in “assi culturali”, riconoscendo la necessità di integrare “saperi e competenze”, dove si inizia pertanto a delineare in maniera meno fumosa il concetto di competenza. Vi si legge infatti:

non una versione riduttiva del “saper fare”, ma quel “saper fare” ad ampio spettro che conferisce senso autentico e motivante alle “cose apprese e utilizzate”, perché siano riconducibili a sé e utilizzabili in più campi e con versatilità. Al contempo i saperi, fermo restando i programmi dei diversi corsi di studio, devono potersi concentrare, in primo luogo, su conoscenze chiave irrinunciabili, apprese in modo serio e generative di nuovo apprendimento.

1. UN QUADRO NORMATIVO

In particolare, il decreto citato descrive i saperi e le competenze articolandoli in conoscenze e abilità, indicando assi culturali di riferimento (articolo 2, comma 1), fornendo criteri generali per la certificazione dei saperi e delle competenze (articolo 4, comma 2 e articolo 5).

Gli assi culturali individuati sono:

1. asse dei linguaggi;
2. asse matematico;
3. asse scientifico-tecnologico;
4. asse storico-sociale.

Dell'asse scientifico-tecnologico, che ci riguarda più da vicino, citiamo alcuni obiettivi:

l'asse scientifico-tecnologico ha l'obiettivo di facilitare lo studente nell'esplorazione del mondo circostante, per osservare i fenomeni e comprendere il valore della conoscenza nel mondo naturale e di quello delle attività umane come parte integrante della sua formazione globale; [...] Le competenze dell'area scientifico-tecnologica, nel contribuire a fornire la base di lettura della realtà, diventano esse stesse strumento per l'esercizio effettivo dei diritti di cittadinanza. Esse concorrono a potenziare la capacità dello studente di operare scelte consapevoli e autonome nei molteplici contesti, individuali e collettivi, della vita reale. [...] Obiettivo determinante è, infine, rendere gli alunni consapevoli dei legami tra scienza e tecnologie, della loro correlazione con il contesto culturale e sociale, con i modelli di sviluppo e con la salvaguardia dell'ambiente, nonché della corrispondenza della tecnologia a problemi concreti con soluzioni appropriate.

Ma il riconoscimento di queste competenze chiave è formalizzato solo nel 2009 col decreto che riordina le norme sulla valutazione degli studenti (D.P.R. 122/2009), che all'articolo 8 parla di certificazione di competenze. Rimanda però a un successivo decreto del Ministro l'adozione di "modelli per le certificazioni relative alle competenze acquisite dagli alunni dei diversi gradi e ordini dell'istruzione". Il modello finalmente arriva (D.M. 9/2010): esso deve essere compilato per tutti gli studenti che hanno assolto l'obbligo di istruzione, obbligatoriamente dall'anno scolastico 2010/2011. Il modello riprende lo schema dei quattro assi culturali citati e, in particolare, per l'asse scientifico-tecnologico prevede le seguenti competenze di base:

- osservare, descrivere e analizzare fenomeni appartenenti alla realtà naturale e artificiale e riconoscere nelle varie forme i concetti di sistema e di complessità;
- analizzare qualitativamente e quantitativamente fenomeni legati alle trasformazioni di energia a partire dall'esperienza;
- essere consapevole delle potenzialità e dei limiti delle tecnologie nel contesto culturale e sociale in cui vengono applicate.

Le competenze non sono valutate con voti numerici ma con livelli: di base, intermedio, avanzato (e, evidentemente, anche non raggiunto). Aspetto importante è che la certificazione non ha effetti sulla prosecuzione degli studi ma può favorire l'orientamento, i passaggi tra diversi percorsi, il sostegno ai processi di apprendimento.

Non ci soffermiamo qui sulle difficoltà che questa normativa macchinosa comporta, in particolare il fatto che la certificazione delle competenze mal si accorda con la valutazione numerica (lo spettro tutto italiano del voto aleggia su qualsiasi dibattito pedagogico), che pure la normativa ha ribadito. La cultura della competenza stenta a decollare.

1.2.3 *Dibattito pedagogico*

Ci può essere utile riassumere qualche risultato anche del dibattito pedagogico sulla progettazione per competenze.

Oltre al fatto che la didattica per competenze è raccomandata dall'Europa, come si è visto, e che molti curricula dei paesi europei sono costruiti sulle competenze, vi è un altro motivo fondamentale per l'introduzione delle competenze: nel mondo dell'informazione e della complessità in cui viviamo, le sole conoscenze non bastano più, occorre acquisire la capacità di organizzarle e di sfruttarle. Dice Perrenoud⁵ in [54]: «A che pro andare a scuola se non vi si acquisiscono affatto strumenti per agire nel e sul mondo?» La didattica per competenze, sostiene Perrenoud, non è solo una risposta della scuola alle richieste di politica economica dell'Europa, ma una necessità per mettere i giovani nelle condizioni di affrontare il mondo di oggi e

⁵Philippe Perrenoud, nato nel 1944, sociologo e antropologo, dal 1994 al 2009 professore ordinario all'Università di Ginevra nel settore dei curricula, delle pratiche pedagogiche e delle istituzioni di formazione; dal 2009 professore onorario; i suoi lavori sulla fabbricazione delle disuguaglianze e degli insuccessi scolastici l'hanno portato a interessarsi del "mestiere" dell'allievo, delle pratiche pedagogiche, della formazione degli insegnanti, dei curricula, del funzionamento delle istituzioni scolastiche, della trasformazione del sistema educativo e delle politiche sull'educazione (informazioni tratte dal sito dell'Università di Ginevra).

quello di domani. E quelli che ci guadagneranno di più saranno gli studenti più fragili, perché quelli che già sono più dotati dal punto di vista culturale e economico avranno comunque successo in qualunque sistema educativo. Non si tratta tuttavia di un'assoluta novità: negli ultimi cinquant'anni la scuola si è posta l'obiettivo di "sviluppare il pensiero critico". Si tratta di formalizzare e accentuare questo orientamento. Il dibattito sulla didattica per competenze si fonda inoltre sul funzionamento del cervello, che oggi non è più considerato come un sistema gerarchico (vedi ad esempio Restak⁶ in [60]), ma come un sistema costituito da elementi modulari interconnessi, in cui le informazioni possono seguire percorsi alternativi. Ciò comporta la necessità di un "pensiero che interconnette" [51], in cui si sostituisce la causalità unidirezionale con una causalità circolare e multireferenziale.

Insomma, la filosofia di fondo [13, 30, 31] è che la scuola non deve fornire una formazione enciclopedica: è impossibile, per la condizione di finitezza e mortalità dell'uomo, imparare tutto. Occorre invece insegnare principi fondamentali e la capacità di riflettere su di essi, insegnare quindi i cosiddetti *nuclei fondanti* di ogni disciplina. Con questa terminologia ormai entrata nell'uso pedagogico-didattico non si intende solo l'insieme di conoscenze di base di una certa disciplina, ma l'insieme di concetti più significativi, capaci di generare ulteriori conoscenze e che ricorrono a più riprese nella disciplina stessa. Essi sono ricavati tenendo conto non solo degli aspetti storico-epistemologici della disciplina (in tal caso sarebbero solo una riproposizione a livello scolastico dei contenuti del sapere accademico specialistico), ma anche degli aspetti psicopedagogici e didattici [52].

1.3 LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

La possibilità dell'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola superiore è legata anche all'esistenza di insegnanti che hanno ricevuto un'adeguata formazione. Premesso che il Legislatore, come si è visto, ha inserito la fisica moderna nelle Indicazioni Nazionali, lo stesso Legislatore, nel costruire il percorso di formazione e reclutamento degli insegnanti, si è preoccupato di farvi corrispondere la necessaria formazione? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo soffermarci sulla normativa che regola la formazione degli insegnanti.

⁶Richard Restak, nato nel 1942, neurologo e neuropsichiatra americano, autore di diverse pubblicazioni sul cervello umano.

1.3.1 *Formazione e reclutamento*

Giacché la materia è molto complessa, a causa di una stratificazione normativa dovuta a una mancanza di lungimiranza e di pianificazione, scegliamo di partire da un punto che comunque al momento appare fondato (e fondante): la necessità di un'apposita formazione universitaria per gli aspiranti insegnanti e la separazione della fase del reclutamento da quella della formazione.

Troviamo le prime tracce di questa necessità nella Riforma degli Ordinamenti Universitari del 1990 (L. 341/1990) dove all'articolo 4, comma 2, si dice che “con una specifica scuola di specializzazione articolata in indirizzi [...] le università provvedono alla formazione, anche attraverso attività di tirocinio didattico, degli insegnanti delle scuole secondarie [...]. L'esame finale per il conseguimento del diploma ha valore di esame di Stato ed abilita all'insegnamento per le aree disciplinari cui si riferiscono i relativi diplomi di laurea. I diplomi rilasciati dalla scuola di specializzazione costituiscono titolo di ammissione ai corrispondenti concorsi a posti di insegnamento nelle scuole secondarie.” Da questo atto doveva nascere la SSIS (Scuola di Specializzazione per gli Insegnanti della Scuola Secondaria), che però attese ancora un po' prima di nascere, perché il primo ciclo giunse nel 1999.

Nel frattempo, il Testo Unico per la scuola (D.Lgs. 297/1994), un calderone di 676 articoli che in molte parti è stato nel frattempo abrogato e mai riorganizzato, all'articolo 400, comma 12, dice che in via transitoria, fino al termine dell'ultimo anno dei corsi universitari abilitanti, coloro che superano il concorso per titoli ed esami (c.d. concorso ordinario, per distinguerlo dal concorso riservato) conseguono anche l'abilitazione. Per regolare questa materia interviene un decreto interministeriale (D.M. 460/1998), che stabilisce all'articolo 1 che a partire dal primo concorso ordinario nella scuola secondaria bandito successivamente al 1 maggio 2002 (fatte salve ulteriori norme transitorie) cessa definitivamente la possibilità di conseguire l'abilitazione tramite concorso ordinario e quindi rimane solo l'abilitazione tramite percorsi universitari, di cui parleremo più avanti. Poiché la legge italiana si muove come un elefante (ma gli elefanti hanno buona memoria) il primo concorso “bandito successivamente al 1 maggio 2002” è arrivato nel 2012 (D.D.G. 82/2012). Tale concorso, nelle intenzioni, doveva essere per “giovani”, ma presentava due problemi: poiché vi potevano partecipare solo coloro già in possesso di un'abilitazione, ma nel frattempo (vedremo fra poco) il meccanismo delle abilitazioni si era inceppato, coloro già in possesso di abilitazione non erano più tanto giovani; una serie di norme transitorie e clausole di salvaguardia consentiva inoltre di partecipare al concorso senza abilitazione purché si fosse conseguita una laurea entro l'anno accademico

2000/2001, e anche tali candidati non potevano più essere chiamati giovani.

Ma per lungo tempo la formazione degli insegnanti e il loro ingresso nella professione sono stati strettamente legati. Per quanto riguarda il reclutamento, l'assunzione degli insegnanti fra il 1999 e il 2014 è stata regolata dall'articolo 1 della L. 124/1999: l'accesso ai ruoli del personale docente ha luogo, per il 50 per cento dei posti mediante concorsi per titoli ed esami e, per il restante 50 per cento, attingendo alle "graduatorie permanenti". In tali graduatorie, in base alla legge citata e a norme interpretative successive, rientravano gli idonei non vincitori dei concorsi per titoli ed esami e coloro che con qualsiasi modalità avrebbero conseguito l'abilitazione. Sempre nello stesso articolo di legge, si dichiara che i concorsi per titoli ed esami sono indetti con frequenza triennale. In realtà, dopo il concorso bandito nel 1999, che era anche abilitante, il successivo è stato nel 2012, come si è già ricordato.

Ma se da un lato, pur tra lungaggini burocratiche, si afferma la necessità della formazione universitaria degli insegnanti per il conseguimento dell'abilitazione in maniera indipendente dal reclutamento, che deve avvenire, tramite concorso, una volta conseguita l'abilitazione, dall'altro si tende la mano a chi reclama il riconoscimento dell'attività di insegnamento svolta in qualità di supplente. La normativa vigente infatti (articolo 4 della L. 124/1999) consente l'instaurazione di rapporti di lavoro a tempo determinato, sia a personale inserito nelle "graduatorie permanenti",⁷ quindi abilitato, sia, in subordine, a personale non abilitato. Il conferimento delle supplenze, che per la maggior parte doveva essere limitato a casi di assenze temporanee del personale di ruolo, si è dimostrato invece uno strumento ordinario per sopperire alle carenze di organico, poiché per questioni di bilancio dello Stato la regolare indizione di concorsi non c'è stata. Questo da un lato ha alimentato il fenomeno del precariato, dall'altro ha indotto l'amministrazione a riconoscere ai non abilitati il servizio prestatato per conseguire l'abilitazione. È stata indetta, pertanto, con l'articolo 2, comma 4 della L. 124/1999, una sessione riservata di esami per il conseguimento dell'abilitazione (c.d. concorso riservato) per coloro che potevano vantare, con opportune condizioni, 360 giorni di servizio. Gli esami sono stati preceduti dalla frequenza di un corso di durata non superiore a 120 ore, finalizzato all'approfondimento della metodologia e della didattica relative alle discipline comprese nelle classi di concorso. I corsi sono stati svolti da docenti universitari e da personale scolastico, direttivo e docente, "di provata capacità ed esperienza professionale", recita la norma citata.

Poiché in questo lavoro di ricerca ci occupiamo anche del problema della

⁷Poi divenute "a esaurimento", cfr. nota 11.

formazione degli insegnanti nella didattica della fisica moderna, ci chiediamo se, in relazione all'insegnamento della meccanica quantistica, le modalità di abilitazione fin qui descritte abbiano fornito agli aspiranti docenti le competenze necessarie. La nostra ipotesi è che nell'insegnamento della fisica moderna sia molto importante la formazione del docente sui concetti fondanti della disciplina, e che quindi sia essenziale la formazione universitaria di coloro che aspirano a insegnare, e non solo la formazione "sul campo". Cercheremo di avere un riscontro di questa ipotesi, da un lato mediante l'analisi della normativa vigente sui titoli di studio necessari per l'insegnamento della fisica, dall'altro mediante un'indagine su campioni di insegnanti nel seguito di questo lavoro.

1.3.2 *Titoli di accesso alle classi di concorso*

Pur con tutti i contenziosi che la nuova normativa ha generato, rimane stabilito che la formazione universitaria degli insegnanti è ormai necessaria per partecipare ai concorsi per l'insegnamento. Ora, la normativa vigente ripartisce gli insegnamenti delle varie discipline scolastiche e le relative abilitazioni in "classi di concorso". Per poter accedere ai canali della formazione universitaria che forniscono o forniranno l'abilitazione, occorre un apposito titolo di studio. Attualmente per la corrispondenza fra titoli di studio e classi di concorso è ancora in vigore un decreto ministeriale del 1998 (D.M. 39/1998), che assegna le materie oggetto delle nostre considerazioni a tre classi di concorso: matematica e fisica (A049), per l'insegnamento delle due materie nei licei; matematica (A047), nel biennio dei licei scientifici e in tutto il corso degli istituti tecnici e professionali; fisica (A038), negli istituti tecnici e professionali. Questa distinzione si è un po' annacquata col tempo, per motivi che esulano dalla presente trattazione, ma in linea di massima è ancora in vigore. Il suddetto decreto stabilisce che per accedere alla A049 occorre una laurea in matematica o in fisica; per accedere alla A047 oltre alla laurea in matematica o in fisica si può avere una laurea in ingegneria con condizioni,⁸ per accedere alla A038 si deve avere la laurea in fisica oppure quella in matematica (con condizioni⁹) o quella in ingegneria (con condizioni¹⁰). Lo stesso decreto stabilisce una corrispondenza fra le

⁸Avere nel piano di studi i corsi annuali (o due semestrali) di: analisi matematica 1, analisi matematica 2, geometria o geometria 1, e due corsi annuali (o quattro semestrali) tra i seguenti: geometria ed algebra o algebra ed elementi di geometria, calcolo delle probabilità, analisi numerica o calcolo numerico.

⁹Avere nel piano di studi un corso annuale (o due semestrali) di: preparazione di esperienze didattiche o sperimentazioni di fisica.

¹⁰Avere nel piano di studi due corsi annuali (o quattro semestrali) di fisica generale.

varie classi di concorso: se si possiede A049, automaticamente si possiedono le altre due; viceversa se si sono conseguite in maniera disgiunta A038 e A047, automaticamente si possiede A049. Come si vede, si può dare il caso che in un liceo si trovi a insegnare anche qualcuno che non vogliamo dire che non abbia mai visto la meccanica quantistica, ma che magari ne ha appena un'infarinatura. Vero è che, per il presente, si potrebbe ovviare a questo problema con la formazione continua degli insegnanti e, per il futuro, l'eventuale carenza nella fisica moderna potrebbe essere completata nel percorso universitario di conseguimento dell'abilitazione. Un'annosa polemica che è sorta a questo proposito è l'accesso degli ingegneri all'insegnamento di matematica e fisica. Senza entrare nel merito della qualità del loro insegnamento, ci limitiamo a osservare che la normativa vigente non ne consente l'accesso alla classe di concorso A049, ma a causa di complicate vicende legislative (cfr. per dettagli paragrafo 10.4) allo stato attuale tanti ingegneri insegnano matematica e fisica nei licei e peraltro si vede che se essi conseguono separatamente le due abilitazioni, ottengono "a cascata" *ex lege* quella congiunta.

Osserviamo che il decreto sulle classi di concorso è strutturato ancora sulle lauree conseguite ai sensi della normativa previgente al D.M. 509/1999, quindi deve essere incrociato col decreto che stabilisce la corrispondenza fra classi di concorso e lauree specialistiche (D.M. 22/2005, allegato A), e poi col decreto in cui si trova la corrispondenza fra lauree specialistiche e magistrali (D.M. 9/7/2009) che quindi, per la proprietà transitiva, consente di ricavare la corrispondenza fra vecchie classi di concorso e nuove lauree magistrali.

Osserviamo anche, a titolo di cronaca, che è in corso da diversi anni una "revisione delle classi di concorso" che per motivi contingenti (rivolgimenti politici, congiunture economiche, proteste sindacali, . . .) non riesce a vedere la luce. Non è detto che tale revisione, se mai arriverà a compimento, porti vantaggi da un punto di vista didattico: da un esame delle varie bozze si evince che l'idea del Legislatore è "allargare le maglie", cioè consentire di insegnare il maggior numero di materie possibili con uno stesso titolo di studio. Questo consentirebbe di utilizzare meglio il personale attualmente in organico e di programmarne un minore fabbisogno in futuro; di rendere più flessibile l'insegnante anche fra ordini di scuola (ad esempio passare senza troppi problemi dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado e viceversa, cosa che per le materie letterarie esiste già); di fare in modo che l'insegnante riceva anche obbligatoriamente (e non in aggiunta e secondo propria vocazione come accade ora) la formazione per il sostegno, per ridurre, in futuro, il numero di insegnanti specializzati e obbligare gli insegnanti delle singole discipline a occuparsi anche del sostegno. Rileviamo pertanto che un'eventuale revisione delle classi di concorso non dovrebbe

trascurare la formazione disciplinare e didattica specifica.

1.3.3 I percorsi universitari per la formazione degli insegnanti

Come si è detto, nel 1999/2000 ha visto la luce il primo ciclo della scuola di specializzazione per la formazione degli insegnanti, corso post lauream in cui gli aspiranti docenti ricevevano una formazione non disciplinare (che si suppone avessero già ricevuto nel corso di studi) ma pedagogico-psicologico-didattica. Il corso era suddiviso per indirizzi, con insegnamenti di area comune a tutti gli indirizzi (pedagogia, psicologia, storia della scuola, didattica generale, sociologia) e insegnamenti di indirizzo che principalmente erano corsi di didattiche disciplinari. La scuola di specializzazione era integrata con attività di tirocinio di due tipi: uno a carattere più teorico, con riflessioni sul mondo della scuola con i “supervisor”, e uno a carattere pratico nelle scuole con i “docenti accoglienti”. L’esame finale della SSIS aveva valore di Esame di Stato e forniva l’abilitazione all’insegnamento, con la quale ci si poteva inserire nelle graduatorie “permanenti”, di cui abbiamo già parlato.¹¹ Pur con i suoi difetti, la SSIS ha consentito una presa di coscienza di un problema che oggi non si può più eludere: l’insegnante preparato a insegnare nella scuola di oggi (purtroppo) non è quello che conosce solo i contenuti della disciplina che dovrà insegnare.

Dell’esperienza della SSIS parliamo al passato perché il famigerato e già citato decreto legge del 2008 per il contenimento della spesa pubblica sospende le Scuole di Specializzazione (articolo 64, comma 4 ter della legge di conversione) fino al completamento di alcuni adempimenti: la razionalizzazione e l’accorpamento delle classi di concorso e la revisione dei criteri (ovviamente in negativo) per la determinazione degli organici. È qui che il meccanismo delle abilitazioni si è inceppato: per quanto ci sia rispetto al passato un minor fabbisogno di abilitati all’insegnamento, non è pensabile bloccare del tutto il conseguimento dell’abilitazione. Le istruzioni per la formazione iniziale degli insegnanti sono arrivate con un decreto del 2010 (D.M. 249/2010), dove all’articolo 3, comma 2b, si legge che per l’insegnamento nella scuola secondaria di primo e secondo grado saranno necessari un corso di laurea magistrale biennale e un successivo anno di Tirocinio Formativo Attivo, detto TFA, e che al termine del TFA, previo superamento di un esame finale, si consegue l’abilitazione. Tale normativa è stata applicata in maniera incompleta: le Università ancora non si sono attivate per i corsi di laurea magistrali per l’insegnamento e perciò, ravvisata la necessità di

¹¹Tali graduatorie sono diventate “a esaurimento” (articolo 1, comma 605, lettera c della L. 296/2006), con l’intento, secondo il Legislatore, di eliminare il fenomeno del precariato.

far conseguire l'abilitazione col solo TFA (articolo 15, norme transitorie e finali del citato decreto) ad alcune categorie di persone, è stato attivato per l'anno accademico 2011/2012 il primo ciclo TFA,¹² e per l'anno accademico 2014/2015 il secondo ciclo TFA, ma tutto tace sulla programmazione delle lauree magistrali.

1.3.4 *La formazione in servizio*

Come si è detto, la normativa vigente consente di insegnare fisica nelle scuole superiori anche a chi non ha mai studiato la meccanica quantistica. L'ideale sarebbe che un aspirante insegnante abbia, a un certo punto del suo piano di studi universitario, affrontato argomenti complessi come quelli della fisica moderna; in caso contrario, si può almeno sperare che gli studi universitari forniscano a un aspirante insegnante gli strumenti e la motivazione per completare da sé la preparazione. La formazione universitaria dei futuri insegnanti potrebbe ad esempio curare questo aspetto. Ma un ruolo molto importante è quello della formazione in servizio, che, sulla carta, è riconosciuto come diritto-dovere degli insegnanti dalla legge ma, di fatto, non è per niente incentivato. Per quanto riguarda la formazione continua, infatti, bisogna dire che oggi è lasciata alla buona volontà dei singoli: sta agli insegnanti più motivati (e al loro portafoglio), che sentono il bisogno di un continuo aggiornamento, andare alla ricerca di associazioni serie che propongano spunti di riflessione sulla didattica ma anche su specifici contenuti disciplinari. Lo Stato, in questi ultimi anni, non è intervenuto in maniera sostanziale se non su due tematiche: le cosiddette nuove tecnologie (al momento il cavallo di battaglia sono le Lavagne Interattive Multimediali) e l'insegnamento di discipline non linguistiche in lingua straniera (il cosiddetto CLIL). Spopola infatti l'idea che la scuola, per essere più *competitiva*, *produttiva*, *efficiente* debba puntare sull'inglese e sull'informatica.¹³ Ma gli studenti italiani ottengono bassi risultati nelle indagini internazionali sulle competenze di base in italiano e in matematica.¹⁴

Un'altra difficoltà che impedisce agli insegnanti l'autoformazione è il tempo a disposizione: a dispetto delle dichiarazioni di principio sull'importanza del ruolo degli insegnanti nella società, i provvedimenti legislativi

¹²Ma si è svolto nel 2013, nel periodo maggio-settembre.

¹³Nelle linee guida di una prossima riforma della scuola, presentate dal Governo il 3 settembre 2014, è stata aggiunta anche l'economia.

¹⁴Consultare ad esempio "OCSE PISA 2012 - Sintesi dei risultati per l'Italia", a cura di INVALSI (scaricabile dal sito dell'INVALSI) dove si legge che «le competenze dei 15-enni italiani in Matematica si situano leggermente, ma significativamente, al di sotto della media OCSE» e che «solo leggermente migliori sono i risultati in Lettura e Scienze».

vanno sempre di più nella direzione di costringere la professione dell'insegnante in un ruolo impiegatizio, non tenendo conto che in tale professione deve essere contemplato un tempo nel quale l'insegnante abbia, tra le altre cose, la possibilità e le energie per l'autoformazione. E con questo atteggiamento si tende invece ad avvalorare quella becera parte dell'opinione pubblica secondo cui la professione dell'insegnante si esaurisce nell'orario di cattedra e pretende che le istituzioni scolastiche diventino sempre più "scuole aperte", cioè agenzie di vigilanza e assistenza, anziché di istruzione e formazione, quasi a surrogare il ruolo delle famiglie, che per motivi socio-economici, pur legittimi, sono sempre più in difficoltà.¹⁵

¹⁵Al momento in cui si conclude la presente tesi (14 aprile 2015) è in discussione presso la Camera dei Deputati il Disegno di Legge n. 2994 di iniziativa governativa in materia di "Riforma del sistema nazionale di istruzione e formazione e delega per il riordino delle disposizioni legislative vigenti", presentato il 27 marzo 2015 e reso noto all'opinione pubblica come "La Buona Scuola". Il Disegno di Legge propone diverse novità, ma quanto agli argomenti trattati in questo capitolo, cioè la formazione (conseguimento dell'abilitazione) e il reclutamento degli insegnanti, non intende modificare la normativa vigente. In particolare al capo VII (Riordino, adeguamento e semplificazione delle disposizioni legislative in materia di istruzione), articolo 21 (Delega al Governo in materia di Sistema Nazionale di Istruzione e Formazione), lettera c si intende disciplinare il sistema di formazione iniziale universitaria per l'accesso alla professione di docente nella scuola secondaria, riordinare "le classi disciplinari di concorso che attualmente appaiono troppo frammentate", ridefinire "la disciplina e le modalità di assunzione a tempo indeterminato del personale docente ed educativo, al fine di renderlo omogeneo alle modalità di accesso al pubblico impiego, mediante concorsi pubblici". In particolare, quindi, l'eventuale nuova normativa intende confermare la separazione del conseguimento dell'abilitazione, tramite percorsi universitari, dalla fase del reclutamento, tramite concorso.

Basi epistemologiche e cognitive per l'insegnamento della meccanica quantistica

2.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo 1 si è voluto fornire, oltre che il quadro normativo in cui chi vuole insegnare la fisica moderna si deve muovere, anche la posizione ufficiale delle istituzioni scolastiche sulla maniera in cui si suggerisce di attuare l'insegnamento, cioè la “didattica per competenze”. Si è cercato di presentare le informazioni nella maniera più oggettiva possibile, per fornire una “fotografia” della situazione in cui chi deve insegnare la meccanica quantistica si trova a operare. Per discipline complesse e molto strutturate, come le discipline scientifiche e la matematica, comunque, è improbabile [40] che si possano mettere da parte i contenuti della disciplina a vantaggio di sole regole di apprendimento ed educazione indipendenti da quei contenuti. La didattica di una disciplina come la fisica, dunque, non può prescindere da un'epistemologia. La natura, la storia, la struttura dei saperi, infatti, sono ad esempio importanti quando si devono introdurre gli studenti a un ambito disciplinare in cui sono del tutto “profani”. Non si tratta di stabilire se una certa epistemologia sia vera o falsa, quanto di esercitare una critica e valutare se esistono scelte alternative. In particolare è importante [40], per gli insegnanti, riflettere sui meccanismi dell'elaborazione scientifica e sulle modalità di apprendimento.

2.2 UN'EPISTEMOLOGIA PER LA DIDATTICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

2.2.1 Il positivismo classico, Popper e Kuhn

Oggi la scienza non si interessa più alla natura presa come un tutto ma a suoi frammenti [40, p. 46]: si costruisce i suoi oggetti di osservazione.

Questo “ritagliare” è un prodotto teorico. In fisica, ad esempio, oggi non si descrivono quasi più osservazioni “naturalì”, ma osservazioni condotte nel quadro del modello in vigore, produzioni organizzate di fenomeni da osservare (come ad esempio negli apparati sperimentali di fisica delle alte energie del CERN). Questa posizione [40, p. 44] ribalta la visione, storicamente molto importante, del positivismo classico, che si basa sulla separazione fra una teoria scientifica (nella forma solitamente di teoria deduttiva) e la base osservazionale (deputata a fornire un’interpretazione della teoria), ove la base osservazionale è completamente indipendente da ogni teoria e tutti i dati teorici si possono ridurre a dati osservabili. Questa, tra l’altro, è la visione comune della scienza dominante inconsapevolmente presso i non scienziati (ma spesso anche condivisa da scienziati).

Quando ci disponiamo a introdurre gli studenti alla meccanica quantistica, in effetti, siamo costretti a esulare dal collaudato schema *osservazione - ipotesi - misure - conclusioni*: se guardiamo la meccanica quantistica nel suo sviluppo storico, è difficile presentare agli studenti quali ipotesi si possono formulare sulla base di fenomeni che, allora, erano pressoché straordinari; e se la guardiamo da un punto di vista di teoria consolidata, è difficile presentare agli studenti una serie di assiomi che non hanno una immediata rispondenza con fatti comunemente osservati come ad esempio la caduta dei gravi. Quindi come la scienza si è costruita il suo oggetto di studio, cioè la meccanica quantistica, così la didattica della scienza si deve costruire un approccio che non può più essere quello della fisica classica.

Potrebbe essere utile però riflettere con gli studenti su come «arriva la teoria ai teorici» [40, p. 50]: la meccanica quantistica non è una costruzione puramente teorica, ma è nata con l’esigenza di spiegare una certa categoria di fenomeni che, all’epoca, non trovavano spiegazione nel quadro di riferimento della fisica classica.

- Il “criterio di confutazione” popperiano [56] prevede l’esistenza di esperienze che sono concepite proprio per stabilire se una teoria può essere confutata (e quindi abbandonata) o mantenuta in vigore.
- Secondo Duhem¹ [21], non è così semplice: se anche un’esperienza fornisce un risultato negativo, come si fa a sapere quale ipotesi esattamente si deve rifiutare? Un modello, infatti, in genere non è costituito da una sola ipotesi: potrebbe bastare un riarrangiamento locale del modello stesso per ristabilire la corrispondenza fra teoria e esperimenti.

¹Pierre Maurice Marie Duhem, 1861-1916, filosofo, storico della scienza, fisico e matematico francese.

- Kuhn² [41] distingue fra periodi di “rivoluzione scientifica” e periodi di “scienza normale”. La rivoluzione scientifica stravolge l'epoca di scienza normale, in cui gli scienziati condividono un paradigma in maniera conservatrice, tale da impedire di concepire teorie nuove. Nei periodi di scienza normale funziona il riarrangiamento locale popperiano di cui si è detto.
- Alcuni epistemologi, detti “esternalisti”, sostengono l'influenza della società sulla comunità scientifica, al contrario degli “internalisti”, che sostengono la specificità del discorso scientifico: la scienza vive della propria storia e dei propri problemi. Per gli esternalisti invece, se anche la scienza ha una sua autonomia, non può essere separata dalla storia generale.

2.2.2 *Gli ostacoli epistemologici nell'apprendimento della meccanica quantistica*

Il progresso della scienza ruota intorno al concetto di *problema*. Ma il concetto di problema è importante anche nell'insegnamento delle scienze: come vedremo fra poco, esistono alcune teorie dell'apprendimento basate sui problemi.

Mentre l'insegnamento della fisica classica, come si è più volte ribadito, si basa su un collaudato schema che parte dall'osservazione dei fenomeni che circondano lo studente, l'insegnamento della fisica quantistica obbliga studenti e insegnanti a mettersi in relazione con problemi che esulano dalla loro esperienza primaria e invitano a costruire una nuova epistemologia, che spesso può anche rimanere implicita. Non si tratta infatti, come nella fisica classica, di interpretare solo un fenomeno con categorie che sono già note (forza, velocità, accelerazione, ...) ma di costruire e accettare nuove teorie. Si tratta, nella didattica della meccanica quantistica, di un problema, molto delicato, di avanzamento della conoscenza degli studenti.

Quali sono alcune posizioni epistemologiche che possiamo tenere presenti sulle modalità dell'avanzamento della conoscenza? Per Popper,³ ad esempio, il problema è una creazione umana, e la scoperta scientifica consiste nel delimitare strettamente il problema e presentare ipotesi quanto più refutabili è possibile sul piano empirico [56]. Questo processo però non sembra rendere conto del movimento strutturale della scoperta scientifica. Per Lakatos⁴ [42] la progressione scientifica si ottiene allo stesso tempo col

²Thomas Samuel Kuhn, 1922-1996.

³Karl Raimund Popper, 1902-1994.

⁴Imre Lakatos, 1922-1974.

mantenimento di una continuità (quella dello spazio dei problemi) e con rotture parziali. Non si tratta di un metodo universale della scoperta, perché le rotture sono limitate al dominio in cui si sta operando. L'avanzamento della scienza consiste nello spostamento dei problemi. L'euristica di Lakatos comprende due parti: una negativa che mediante precisazioni successive e ipotesi ausiliarie vuole proteggere il cuore della tradizione di ricerca, una positiva che mira a sviluppare le potenzialità del programma più che a difenderlo. In questo approccio si può evitare una confutazione definitiva, ad esempio modificando una definizione o sviluppando una teoria più vasta che elimini un'eventuale contraddizione. Ma nelle scienze sperimentali questo non sempre è possibile. È utile in proposito ricordare il concetto di "rivoluzione scientifica" di Kuhn già citato. Solo nei periodi di scienza "normale" sarebbe possibile adottare l'approccio di Lakatos: nei periodi di rivoluzione scientifica è più problematico ritoccare una teoria con lievi modifiche di definizioni.

È possibile però all'interno di una scienza accettare certe rotture, con le ristrutturazioni concettuali, metodologiche e sperimentali che tali rotture si portano dietro. Per descrivere queste rotture Bachelard⁵ ha elaborato il concetto di ostacolo epistemologico, l'effetto limitativo di un sistema di concetti sullo sviluppo del pensiero.

Bisogna porre il problema della conoscenza scientifica in termini di ostacoli. Non ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni o la debolezza dei sensi e dello spirito umano. Ma è proprio nell'atto di conoscere che si mostrano lentezze e opacità. Chiamiamo ostacoli epistemologici queste cause di stagnazione e regressione [6].

Bachelard elenca diversi ostacoli epistemologici, ma il primo è per lui il "senso comune", l'esperienza primaria, quella che viene prima della critica, che è l'elemento integrante dello spirito scientifico. L'esperienza primaria ad esempio impediva ai pregalileiani di cogliere la portata delle idee di Galileo. Per superare questi ostacoli occorre una rivoluzione scientifica alla Kuhn, ma il concetto di ostacolo epistemologico può essere utile anche in una accezione più ridotta, come si vede nell'esempio che segue. Nella fase di euristica positiva di cui si è già parlato, in cui certi sistemi di concetti hanno dato struttura al pensiero consolidando una scienza (o un suo ambito ristretto), la coerenza raggiunta di quel sistema di pensiero impedisce anche solo di immaginare che un giorno il sistema stesso potrà essere diverso. In questo esempio, quindi, è la sicurezza che ci viene dalla teoria

⁵Gaston Bachelard, 1884-1962, filosofo della scienza francese.

consolidata a fungere da ostacolo epistemologico, a impedirci di progredire nell'avanzamento della scienza.

Quale utilità [40, p. 69] può avere per la didattica delle scienze considerare le diverse posizioni epistemologiche sui meccanismi dell'elaborazione scientifica? Quando la didattica ha a che fare con apprendimenti introduttivi (ad esempio nella scuola primaria), il sottofondo epistemologico può essere quello della rivoluzione scientifica di Kuhn; se invece sul piano didattico è già disponibile un modello stabile (ad esempio quello consolidato della didattica della fisica classica), si potrà procedere per euristica positiva e negativa di Lakatos; tra i due casi si può avere la necessità di sfruttare un quadro concettuale già esistente ma anche di forzarne il cambiamento affrontando una ristrutturazione dei saperi precedenti. In quest'ultimo caso [*ibidem*] il quadro interpretativo più adatto per la didattica delle scienze è quello degli ostacoli epistemologici di Bachelard. E questo è proprio il caso della didattica della meccanica quantistica: lo studente dispone del quadro concettuale già strutturato della fisica classica, ma una serie di ostacoli epistemologici gli impedisce di passare alla meccanica quantistica. Questi ostacoli sono sicuramente il "buon senso", come già aveva evidenziato Bachelard (giacché alcune conclusioni della meccanica quantistica possono sembrare contrarie al senso comune) ma anche gli strumenti matematici. Una volta che lo studente avrà superato gli ostacoli epistemologici, il suo sistema di pensiero si sarà ristrutturato per fare posto ai concetti della meccanica quantistica. Per quanto riguarda la matematica, l'ostacolo sarà superato prendendo atto che per affrontare i concetti quantistici occorrono strumenti matematici "nuovi" (o usati in maniera "nuova", come vedremo più innanzi).

2.3 COME SI APPRENDE

In un lavoro di ricerca didattica sull'insegnamento della meccanica quantistica è anche importante riflettere sul problema delle modalità di apprendimento degli studenti. Se questo problema è stato sempre storicamente tenuto ben presente dal Legislatore per ordini di scuola pur importanti, come ad esempio nella riforma dei programmi della Scuola Elementare del 1985 (D.P.R. 104/1985) o nella riforma che ha portato alla Scuola Media Unica (L. 1859/1962), la scuola secondaria di secondo grado è stata interessata da molti tentativi di riforma ma poco è stato concluso, fino alle ultime revisioni già citate in questo lavoro.

Tra gli anni settanta e ottanta si intensificò la voglia di far tesoro dell'esperienza e della ricchezza di idee che circolavano nella quotidianità dell'insegnamento e dell'apprendimento. [...]

L'architettura della scuola gentiliana, qua e là solamente scalfita, stringeva come una camicia di forza anche e soprattutto la scuola secondaria superiore, che non rispecchiava più la realtà culturale e vissuta della società. Che senso aveva escludere l'evoluzione della realtà scientifica da un liceo, ancorché "classico"? Aveva senso considerare ancora la preparazione degli insegnanti elementari figlia di un dio minore, quasi che sia più delicato esporre le proprie teorie a un'aula magna universitaria affollata di adulti che educare una classe di bambini di sei anni? [17, p. 603].

Il ministro *pro tempore* Franca Falcucci⁶ «vedeva bene che cosa stava accadendo al mondo, mentre in Italia si aggravava la livellazione al peggio degli standard culturali in genere» [17, p. 610] e tra il 1986 e il 1987 presentò il proprio piano di riforma, che però non ebbe alcun seguito a causa dell'immobilismo parlamentare. Sulla base di una legge delega che risaliva al 1973 (L. 477/1973), allora, il ministro e i suoi successori procedettero a emanare una serie di Decreti Delegati e di progetti sperimentali nazionali. La riforma della scuola secondaria, dunque, avveniva per via amministrativa e non parlamentare. Ricordiamo in particolare il "progetto Brocca", scaturito dal lavoro della commissione presieduta dal sottosegretario Beniamino Brocca.⁷ La commissione Brocca lavorò dal 1987 al 1994, ma il suo progetto, per il solito immobilismo parlamentare, non si concretizzò in una legge. Il Ministero della Pubblica Istruzione, allora, per via amministrativa e con una serie di circolari (in particolare la C.M. 109/1990), diede attuazione al progetto Brocca, autorizzando le scuole, sulla base dei "decreti delegati" del 1974 (DD.PP.RR. 416-420/1974) a proporre sperimentazioni didattiche e organizzative. Tra gli aspetti positivi del progetto Brocca⁸ citiamo: «maggiore attenzione ai ritmi di apprendimento dei giovani; attenzione ai valori condivisi della vita associata; [...] adozione nel triennio di programmi chiaramente propedeutici agli studi universitari; [...] maggiore attenzione, nei contenuti dei programmi, per le più recenti riflessioni epistemologiche» [17, p. 615]. Ma col tempo si è avuta una deriva delle sperimentazioni (sono cresciute a dismisura) e si è perso quel carattere "sperimentale" che dovevano avere nelle intenzioni. Per di più non se ne è mai valutata l'efficacia, portando così i Ministri competenti, nel mutato clima politico degli anni più

⁶Franca Falcucci, 1926-2014, ministro della Pubblica Istruzione dal 1982 al 1987, prima donna a ricoprire tale incarico.

⁷Beniamino Brocca, n. 1934, pedagogista, insegnante e dirigente scolastico nonché più volte sottosegretario al ministero della Pubblica Istruzione.

⁸Per i programmi Brocca cfr. [57, 59, 58].

recenti nonché nelle sempre più difficili condizioni del bilancio dello stato, a una mera cancellazione delle sperimentazioni, senza poter salvare ciò che di buono potevano aver dato al mondo della scuola. Ci ricolleghiamo così alla revisione dei licei del 2010 di cui abbiamo parlato nel capitolo 1, che ha soppresso le centinaia di sperimentazioni esistenti e istituito i soli Liceo Classico, Liceo Scientifico (con opzione Scienze Applicate), Liceo Linguistico, Liceo delle Scienze Umane (con opzione Economico-Sociale), Liceo Artistico.

Anche se del progetto Brocca e dei decreti delegati che autorizzavano le sperimentazioni ne è stato fatto un cattivo uso, il progetto aveva come sottofondo un consistente dibattito pedagogico e epistemologico, cosa che non pare avere la revisione del 2010. Sarà opportuno, comunque, riprendere alcune teorie sull'apprendimento per vedere quali hanno lasciato il segno nel nostro ordinamento scolastico e che cosa si può prendere di buono da ciascuna, tenendo presente che la psicologia cognitiva, che si occupa delle modalità di apprendimento, è una disciplina ancora in movimento. Più in particolare, tenendo presente che l'apprendimento della meccanica quantistica è gravato da una serie di ostacoli epistemologici (senso comune, difficoltà formale, ...), quali sono i modelli di apprendimento che più si prestano a questo ambito disciplinare?

2.3.1 *Dallo stimolo-risposta a "imparare a imparare"*

Nella scuola permane ancora, anche se in maniera non formale, una certa tendenza all'insegnamento trasmissivo che si basa sull'accumulare conoscenze e sull'apprendimento come quantità e non qualità dei saperi. Tale tendenza si basa sul comportamentismo, che è stato il primo tentativo sistematico di dare una base sperimentale al comportamento [40, p. 72]: non è possibile studiare la struttura del pensiero, ciò che conta sono i fatti osservabili. Apprendere, quindi, è fornire una risposta adeguata a certi stimoli, selezionare queste risposte adeguate con l'aiuto di condizionamenti e rinforzi, positivi o negativi a seconda dei casi. Il comportamentismo quindi formula un'ipotesi molto forte sulla passività del pensiero: nell'apprendimento tutti i saperi si sovrappongono gli uni sugli altri senza integrarsi. Non è certo questo il modello di apprendimento cui possiamo riferirci.

Un altro modello di apprendimento che nella scuola è stato molto sfruttato è la pedagogia per obiettivi. Tale modello [40, p. 74] deriva dalla teoria di Gagné,⁹ che sposta il problema: non ci si deve chiedere che cosa deve

⁹Robert Mills Gagné, n. 1916, pedagogista statunitense, in *Le condizioni dell'apprendimento*, Roma, Armando, 1973.

apprendere l'allievo, ma che cosa deve saper fare. La "pedagogia per obiettivi", prudentemente, si astiene dall'avanzare una teoria dell'apprendimento in senso stretto ma prevede la possibilità di indicare in maniera precisa i diversi tipi di obiettivi realizzabili in un insegnamento. L'idea di fondo è ancora quella per cui si vede che l'allievo ha appreso quando manifesta un risultato osservabile, ma per giudicare ciò che è osservabile e la maniera in cui si raggiunge il risultato, occorre distinguere con cura gli obiettivi. Un'azione fondamentale della pedagogia degli obiettivi è quindi la valutazione, e una classificazione sistematica degli obiettivi storicamente molto importante [40, p. 77] è la tassonomia di Bloom.¹⁰ Un primo problema è che la lista di obiettivi cresce subito a dismisura perché contiene conoscenze (i saperi essenziali di un ambito disciplinare), obiettivi procedurali per l'uso delle conoscenze, obiettivi di attitudine (essere cooperativi, creativi, curiosi, ...): la pedagogia per obiettivi "è destinata a crollare sotto il proprio peso" [40, p. 77]. Un altro problema è il fatto che stabilire un obiettivo non implica sapere anche come raggiungerlo. A questo scopo, la pedagogia per obiettivi si associa a un modello gerarchico degli obiettivi stessi, nel senso che si stabilisce un ordine fra gli obiettivi in maniera tale da strutturare un percorso per raggiungerli uno dopo l'altro. In questa maniera la pedagogia per obiettivi si assegna un sottofondo di comportamentismo, ma poiché non richiede che gli obiettivi abbiano un legame strutturale nel funzionamento del pensiero ma semplicemente un ordine cronologico, rimane un approccio con basi psicocognitive abbastanza fragili.

Non è pensabile estendere l'uso degli obiettivi a un progetto educativo completo, in particolar modo sulla meccanica quantistica. Se ne può al più riconoscere una qualche utilità come strumento per organizzare l'attività di insegnamento. Ad esempio si deve riconoscere, come avremo modo di osservare più avanti, che per poter affrontare in maniera quantitativa argomenti di meccanica quantistica, occorre fissare come obiettivo la padronanza di alcuni strumenti matematici, la cui sequenzialità potrebbe anche essere definita in maniera rigorosa, come richiederebbe una pedagogia per obiettivi.

Un'evoluzione di questa posizione si manifesta quando si riconosce che non tutti gli obiettivi sono allo stesso livello: esistono capacità generali, più astratte, con un dominio di applicazione più vasto che possono ritenersi superiori. Se si acquisiscono queste capacità generali, si può evitare di frammentare l'insegnamento per far acquisire obiettivi molto particolareggiati:

¹⁰Benjamin Samuel Bloom, 1913-1999, psicologo e pedagogista statunitense, in *Tassonomia degli obiettivi educativi: la classificazione delle mete dell'educazione*, a cura di B. S. Bloom, D. R. Krathwohl, B. B. Masia, Teramo, Giunti e Lisciani.

è inutile, insomma apprendere una somma smisurata di conoscenze, bisogna piuttosto apprendere metodi generali per padroneggiarle, cioè “imparare a imparare”. Questa è [40, p. 79] la posizione di Bruner:¹¹ l’apprendimento deve essere un processo attivo, centrato sulla manipolazione e la scoperta, e i saperi essenziali nelle scienze sono non i singoli contenuti ma strutture astratte semplici che si presentano sotto forma di relazioni fra contenuti e principi fondamentali. L’obiettivo dell’insegnamento devono essere proprio queste strutture, che possono essere apprese non in forma simbolica ma sotto forma concreta e intuitiva con attività di scoperta. Uno dei vantaggi, secondo Bruner, è che questo metodo è trasferibile, nel senso che se uno studente riesce a identificare in ogni disciplina un numero ristretto di concetti di base fondamentali, strategie di scoperta e risoluzione di problemi generali, allora li potrà trasferire agevolmente ad altre discipline. Se si riesce davvero a fare questo, l’approccio è sicuramente superiore, dice Bruner, a quello dell’apprendimento come mera accumulazione di conoscenze.

Questa visione sembra molto interessante e decisiva per l’atto dell’insegnamento-apprendimento, ma appare complessa da applicarsi all’insegnamento della fisica moderna: in tale ambito, infatti, lo studente deve modificare la visione complessiva dei modelli fisici e “ristrutturare” complessivamente i principi primi da applicare alla spiegazione dei fenomeni. È difficile che lo studente porti avanti un apprendimento come ricerca, seguendo ad esempio lo sviluppo storico dei problemi scientifici che hanno portato alla formulazione delle nuove teorie, quando pensiamo che gli stessi scienziati dell’epoca hanno avuto difficoltà, non solo meramente scientifiche ma anche culturali, ad accettare i cambiamenti che le nuove teorie comportavano. E non possiamo nemmeno mettere gli studenti di fronte a un “esperimento” affinché ne formulino ipotesi, descrivano osservazioni e deducano conclusioni, perché la fenomenologia della fisica moderna non lo consente. Un tale approccio sembra quindi potersi limitare all’ambito della fisica classica.

Alcuni autori, peraltro, hanno contestato l’ottimismo di Bruner [40, p. 81]. Schwab¹² ad esempio formula dubbi su possibilità di *trasnfert* così facili. È vero, dice, che ogni disciplina ha la sua struttura: è costituita da un insieme di concetti che inquadrano gli oggetti propri della disciplina e uno schema generale di procedure con cui la disciplina stessa raggiunge i suoi obiettivi con l’aiuto dei concetti fondamentali. Ma questa struttura, dice Schwab, è diversa per ogni disciplina: è inutile perciò ricercare la struttura se l’obiettivo è quello di definire un insieme di concetti e procedure trasver-

¹¹Jerome Seymour Bruner, n. 1915, psicologo statunitense, in *Il processo educativo: dopo Dewey*, Roma, Armando, 1977.

¹²Joseph Schwab, 1909-1988, *professor of education and natural science* alla Chicago University, in *La struttura della conoscenza e il curriculum*, Firenze, La Nuova Italia, 1971.

sali alle varie scienze. Schwab inoltre osserva che è opportuno distinguere la scienza come attività di investigazione e l'insegnamento della scienza che può essere *anche* attività di investigazione. L'approccio alla scienza come scoperta può essere molto utile nella scuola primaria, ad esempio, ma non può essere il solo approccio valido per la secondaria.

A Bruner si oppone [40, p. 82] anche Ausubel:¹³ l'attività di scoperta o risoluzione di problemi non può precedere l'assimilazione di nuovi concetti, bisogna invece presentare subito all'allievo un insieme di concetti a un livello di astrazione anche superiore a quello che deve essere appreso. Questi nuovi concetti si legheranno con quelli che l'allievo conosce già e permetteranno la creazione di una nuova struttura in cui andrà a incorporarsi la nuova conoscenza. La cosa più semplice è presentare direttamente questo insegnamento e non pretendere di farlo scoprire. Ci si appoggerà quindi a un apprendimento "significativo", nel senso dei significanti, in particolare verbali, che sono i modi superiori dell'apprendimento. Questo poggia su un'esplicita ipotesi cognitiva: bisogna che l'esperienza anteriore di un soggetto possa modellizzarsi come un corpo di conoscenze stabilite, organizzate gerarchicamente e acquisite per accumulazione, che potrà legarsi organicamente con il nuovo apprendimento. Qui pertanto è centrale l'aspetto cumulativo, che consente di collegare questo approccio al comportamentismo. Nel caso dell'apprendimento della meccanica quantistica, ad esempio, è importante che lo studente acquisisca i nuovi concetti in maniera "significativa", legandoli alle conoscenze della fisica classica che ha già acquisito, che non devono essere sostituite, ma destinate a un certo ambito di fenomeni.

2.3.2 *Un approccio cognitivo*

Poiché nell'insegnamento delle scienze è importante la risoluzione dei problemi, esistono teorie dell'apprendimento fondate proprio su questo aspetto: si parla di approccio cognitivo. Anzi, l'obiettivo dell'apprendimento potrebbe essere proprio quello di raggiungere direttamente questa capacità.

È storicamente importante [40, p. 85] la definizione di "problema" fornita da Newell e Simon¹⁴ che si sono occupati, tra l'altro, di intelligenza artificiale e psicologia cognitiva: si definisce *problema* la situazione in cui un soggetto vuole produrre una risposta adattata a una certa domanda,

¹³David Ausubel, 1918-2008, psicologo statunitense, in *Educazione e processi cognitivi: guida psicologica per gli insegnanti*, Milano, Franco Angeli, 1995.

¹⁴Allen Newell, 1927-1992, psicologo, informatico e matematico statunitense; Herbert Alexander Simon, 1916-2001, economista, psicologo e informatico statunitense; in *Human problem solving*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1972.

senza che questa possa essere prodotta automaticamente. Il problema si compone di tre livelli: la situazione iniziale, il fine da raggiungere, le azioni permesse per giungervi. Questi livelli definiscono uno “spazio problemico” in cui si conduce la ricerca di una soluzione. L’insieme delle azioni consentite fornisce la lista delle operazioni applicabili alla situazione iniziale, che generano quindi un insieme di stati possibili. Nel caso più semplice questi stati possibili possono essere generati per esempio cercando in maniera sistematica tutte le trasformazioni possibili. Se invece si segue un metodo razionale per giungere all’obiettivo, gli autori parlano di *euristica*.

Secondo gli autori citati, un’euristica consiste nell’individuare una serie di passaggi che minimizzano una differenza osservata fra una situazione problematica e un obiettivo da raggiungere. Purtroppo questa euristica funziona in un numero ristretto di problemi [40, p. 86]. Nel caso, ad esempio, il problema sia la “risoluzione di un’equazione”, non si può applicare una strategia in cui dal risultato si cerca di risalire ai dati iniziali, ma si deve partire dai dati e da una loro riorganizzazione: l’oggetto del problema è quindi non solo definire l’obiettivo ma anche raggiungerlo. Inoltre sono talvolta possibili più soluzioni, e non solo diverse strade per giungervi (nel caso delle equazioni, la fattorizzazione). Un vero problema scientifico, inoltre, è aperto: non si conosce la soluzione, non si sa nemmeno se esiste, non si sa spesso nemmeno formulare la questione, cioè non si sa definire la situazione iniziale. Si tratta di problemi molto ricchi di contenuti e poco strutturati. Gli esercizi scolastici sono meno aperti, ma in questo caso possono essere presi in considerazione altri processi, ad esempio assimilare il problema a un altro problema di cui si conosce la soluzione (ragionamento per analogia).

Sembra dunque ragionevole supporre che la natura del problema possa indurre processi risolutivi e euristiche differenti, ma la ricerca di euristiche generalizzabili e condivise di risoluzione di problemi a carattere scientifico è ancora in corso presso gli psicologi cognitivi: in [40, p. 87] sono citati ad esempio i risultati di alcuni lavori che, in particolare, hanno tentato di elencare le attitudini che impediscono agli allievi di risolvere correttamente problemi scientifici. La constatazione di partenza è che gli allievi non riescono più ad applicare ciò che hanno appreso appena si ritrovano a risolvere un problema che si discosta anche di poco dagli esercizi risolti in classe. L’ipotesi avanzata è che solo pochi errori hanno per causa una mancanza di conoscenze. Si tratta piuttosto di errori di ragionamento: difficoltà a ritrovare gli elementi pertinenti di un problema, difficoltà a organizzare in maniera sistematica l’approccio a un problema, salto rapido verso conclusioni azzardate, difficoltà a costruire una rappresentazione grafica, ecc. L’ipotesi implicita è che l’assenza di chiarezza sulle procedure in gioco spieghi gli insuccessi. Ma questo approccio sembra sottovalutare l’influenza della

base delle conoscenze disponibili e la padronanza di un'euristica. In ambiti complessi come la fisica [40, p. 89], sembra che la superiorità di chi padroneggia la disciplina sia assicurata dalla base di conoscenze. Non si tratta solo di una differenza quantitativa di conoscenze fra “novizi” ed “esperti”, ma soprattutto qualitativa: il sapere non è organizzato nella stessa maniera. Esistono stretti legami tra la rappresentazione dell'esperto e i principi generali della fisica [*ibidem*]: il sapere dell'esperto appare fortemente strutturato e gerarchizzato.

Ci chiediamo: per quanto riguarda la didattica della meccanica quantistica, è possibile l'apprendimento “per problemi”? Sembra opportuno distinguere, a nostro parere, tra la fase in cui si introducono gli studenti alla meccanica quantistica e la fase in cui, consolidate alcune conoscenze fondamentali del nuovo ambito disciplinare, lo studente può continuare ad apprendere. Come si è avuto modo di dire più volte, il passaggio dallo studio della fisica classica a quello della fisica moderna è per gli studenti molto delicato: anche gli approcci didattici che, come vedremo, pongono gli studenti di fronte a “problemi”, per invitarli a formulare ipotesi su un certo fenomeno, poggiano comunque su una base introduttiva molto solida, o, se così non è, sono limitati a un ambito molto ristretto e le conclusioni tratte dalle riflessioni sui “problemi” posti difficilmente possono essere estese ad altri casi. Ciò che viene a mancare allo studente, in un approccio alla meccanica quantistica per “problemi”, se ci riferiamo alla definizione fornita all'inizio del paragrafo, è l'insieme delle operazioni applicabili alla situazione iniziale per risolvere il problema: solo per citare un esempio, spesso mancano alcuni strumenti matematici essenziali. Una volta introdotti gli studenti alla meccanica quantistica, forniti gli strumenti matematici, superato il riferimento all'esperienza primaria che talvolta, come si è detto, funge da ostacolo all'apprendimento, assimilati i principi e i concetti fondamentali che regolano la nuova teoria, non si esclude che si possa procedere a un apprendimento per “problemi”. Prima di arrivare a questo stadio, però, si ritiene importante passare anche attraverso una serie di esercizi che, anche se non hanno il carattere aperto di un vero problema scientifico e sono più strutturati, hanno la loro utilità. Come vedremo più avanti, la fase degli esercizi, in quel momento chiamato trasposizione didattica, è importante per l'inserimento nel curriculum di un certo segmento dell'apprendimento e per la costruzione e il consolidamento dei concetti.

2.3.3 Altri paradigmi dell'apprendimento

Esistono altri paradigmi dell'apprendimento, meno funzionali al nostro percorso, ma comunque importanti. Vale la pena di citare l'interazionismo

e l'approccio sociale. Nell'interazionismo la costruzione mentale delle conoscenze gioca, in ogni tappa, un ruolo centrale nell'apprendimento dell'ambiente e in eventuali effetti seguenti su queste stesse conoscenze. Tale costruzione risponde a informazioni e stimoli dell'ambiente ma non ne è specchio o copia. L'istruzione quindi non deve essere concepita come un travaso di conoscenze nella testa degli allievi ma consiste nel mettere gli allievi in una situazione che permetta loro di costruire conoscenze strutturate. Un approccio teorico cognitivo molto conosciuto è quello di Piaget, in cui il bambino contribuisce attivamente alla costruzione della sua persona e del suo universo, secondo una linea di sviluppo con tappe relativamente stabili.¹⁵ Ma anche se il quadro piagetiano fornisce un buon paradigma interpretativo, «la sua mancanza di sensibilità per le differenze di situazioni e di contenuti lo rende uno strumento inadeguato, almeno se preso alla lettera, per pensare una didattica delle scienze» [40, p. 98]. Sempre in [40] sono riassunte le motivazioni per cui si può ritenere il modello piagetiano inadeguato (o per lo meno, aggiungiamo noi, incompleto) per una didattica delle scienze: Piaget si è disinteressato dell'acquisizione delle conoscenze scolastiche, ha cercato piuttosto di caratterizzare lo sviluppo degli strumenti generali del pensiero, che gli sembravano relativamente indipendenti dalle conoscenze scolastiche; si è interessato più alle strutture che possono carat-

¹⁵La prima tappa è lo stadio sensomotorio, quello della coordinazione delle attività motorie (manipolazione, spostamento) che caratterizzano il pensiero di un bambino fino a 18 mesi o due anni; lo stadio preoperatorio (da 2 a 6 anni) in cui si sviluppa la funzione semiologica (in particolare il linguaggio) e la coordinazione delle rappresentazioni e delle operazioni. Ma a questo stadio il soggetto non è capace di decentrare il suo punto di vista: si rappresenta le cose da un punto di vista attuale e locale e si stacca difficilmente da configurazioni specifiche per ragionare sulle connessioni interne di famiglie di trasformazioni. Riuscirà a fare questo a partire dallo stadio delle operazioni concrete (fino a 12-13 anni), in cui le azioni non possono che essere simboliche, interiorizzate in sistemi reversibili e di cui le proprietà relative ai sistemi stessi più che alle azioni definiscono strutture operatorie del pensiero. A poco a poco il soggetto costruisce basi di inferenza logica (rapporti della parte e del tutto, classificazione, seriazione) e di varie nozioni di conservazione di certe quantità al di là della configurazione (numero, massa, volume). Un piccolo numero di queste strutture operatorie basta a spiegare i progressi nell'organizzazione delle nozioni più varie. Il soggetto giunge infine allo stadio formale, quello delle operazioni astratte sulle operazioni concrete e alla logica proposizionale. Per quanto riguarda il rapporto fra struttura logico-matematica e nuove conoscenze, si può avere assimilazione, accomodamento e equilibrio. L'assimilazione si verifica quando un gruppo di conoscenze, dotate di un minimo di relazioni strutturali, può essere inserito nel sistema cognitivo se la sua struttura è compatibile con quella del sistema cognitivo. L'accomodamento si verifica quando nel sistema delle conoscenze che è accettato dal sistema cognitivo si introducono nuove relazioni che generalizzano o elargiscono le proprie strutture al sistema cognitivo. L'equilibrio permette di regolare i rapporti fra la struttura cognitiva del soggetto e le sollecitazioni esterne.

terizzare un certo stadio dello sviluppo che all'evoluzione adattativa delle conoscenze in una situazione in cui sono funzionali; ha separato troppo la conoscenza matematica dalla conoscenza della realtà fisica e ha privilegiato le operazioni e le strutture logiche e contribuito a minimizzare i contenuti della conoscenza. Il paradigma piagetiano andrebbe pertanto completato e adattato, soprattutto per quanto riguarda la scansione temporale delle varie fasi dello sviluppo, che può essere differente a seconda del contesto e del periodo storico.

Secondo il cosiddetto “approccio sociale” [40, p. 105], l'apprendimento non è solo una relazione privata tra chi apprende e gli oggetti che devono essere appresi (che siano conoscenze o problemi o altro); soprattutto nelle scienze, l'aspetto collettivo è molto importante. Questo non vuol dire solo tener conto di influenze sociali esterne ai processi fondamentali o determinare le attitudini per mezzo di caratteristiche sociali. I dati sociali sono qui concepiti come costitutivi degli apprendimenti. Il riferimento teorico è fornito soprattutto da Vygotskij¹⁶ e può essere così riassunto [40, p. 106]: la vera direzione dello sviluppo non va dall'individuale al sociale ma dal sociale all'individuale e tutte le funzioni superiori debuttano come relazioni effettive tra individui umani. Un concetto fondamentale della teoria di Vygotskij [40, p. 106] è quello di *zona di sviluppo prossimale*, uno spazio di sviluppo potenziale del soggetto, dato cioè dalla differenza fra le sue possibilità di apprendimento, a una data tappa del suo sviluppo, e le possibilità di apprendimento che si otterrebbero con l'eventuale interazione con una terza persona.

Possiamo tener conto di questi due paradigmi citati non tanto per un'influenza diretta sulla didattica della meccanica quantistica quanto per un già citato suo inserimento nel curriculum: l'insegnamento-apprendimento di un certo ambito disciplinare è sempre inserito in un progetto educativo più ampio.

2.3.4 *L'influenza degli studi psicocognitivi sulla didattica delle scienze*

Per concludere e riassumere questa introduzione sulle modalità dell'apprendimento e su quanto può essere funzionale a un progetto di insegnamento della meccanica quantistica a livello preuniversitario, osserviamo quanto segue:

¹⁶Lev Semënovič Vygotskij, 1896-1934, psicologo sovietico, in *Pensiero e Linguaggio: ricerche psicologiche*, Roma, Laterza, 1990 (prima edizione originale 1934) e *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge, Harvard University Press+, 1980 (prima edizione originale 1978).

- È ancora evidente sulle ricerche in didattica delle scienze l'influenza dei lavori di Piaget e più in generale delle ipotesi costruttiviste. Piaget ha sicuramente il merito di aver presentato una teoria coerente dell'evoluzione delle conoscenze: la conoscenza passerà da uno stato di equilibrio a un altro per mezzo di una fase di transizione nel corso della quale le relazioni coltivate dal soggetto nello stato iniziale saranno messe in contraddizione sia dalla presa di coscienza di nuove relazioni sia da un nuovo tentativo di coordinarle. Questa fase di conflitto sarà superata da una fase di riorganizzazione e coordinazione che porterà a un nuovo stato di equilibrio. Ma le critiche alla teoria piagetiana non sono mancate (ne abbiamo citato prima alcune).
- Il soggetto costruisce le sue conoscenze mediante interazione attiva col suo ambiente fisico e sociale. Le conoscenze quindi non si accumulano sulle altre (sono strutturate) e non sono un semplice riflesso della struttura "oggettiva" degli oggetti esterni.
- Il comportamento osservabile del soggetto di fronte a una situazione problematica scientifica è determinato dal tipo di conoscenze del soggetto sul dominio e dalla loro struttura. In questo quadro, e per quanto riguarda domini estremamente complessi come le scienze o la matematica, il contenuto specifico di queste conoscenze e il modo specifico della loro organizzazione hanno un peso determinante nelle procedure osservabili seguite dal soggetto; condizionano la messa in azione delle procedure generali non specifiche (ad esempio di natura logica), che hanno il loro livello di organizzazione.
- La produzione di un soggetto non dipende solo dalla struttura interna delle sue conoscenze, ma anche dal tipo specifico della situazione problematica che gli è proposta, quindi dalla struttura epistemologica propria dei concetti e relazioni che sono coinvolte, come anche dai significati assunti in quella occasione da quel sistema.
- Gli oggetti concettuali coinvolti nella didattica delle scienze sono oggetti complessi che non si lasciano facilmente ridurre in schemi comportamentali o cognitivi di base.

La trasposizione didattica

3.1 LE RISPOSTE DELLE DIDATTICHE DISCIPLINARI

Per quanto la professione dell'insegnante sconfini a volte nell'arte e nell'artigianato (è assimilabile talvolta alla *maieutica* socratica), essa trova i suoi presupposti teorici nella Didattica Generale e nelle Didattiche Disciplinari, che al giorno d'oggi sono discipline scientifiche a tutti gli effetti. La didattica come disciplina [55] trova storicamente le sue basi in altre discipline come la filosofia, la pedagogia, la psicologia e la sociologia ed è intesa non semplicemente come "pratica didattica dell'insegnante" come si intende nel senso comune ma come studio di tutto ciò che riguarda le pratiche di insegnamento e di apprendimento realizzate da tutti i soggetti delle istituzioni educative (insegnanti e studenti ma non solo). Tra le didattiche disciplinari, la didattica della matematica nasce ufficialmente a partire dagli anni Cinquanta del Novecento col movimento di riforma "Matematica moderna".¹ Nella seconda metà del Novecento, e il dibattito continua fino a oggi, si è poi consolidata la necessità dell'esistenza delle didattiche disciplinari: per quanto normativamente le riforme che si sono avvicinate non abbiano cambiato l'impianto sostanzialmente gentiliano della scuola (vedi paragrafo 2.3), abbiamo assistito a istanze di rinnovamento sia dall'esterno che dall'interno, istanze spesso trascurate a livello istituzionale. Dall'esterno, i vorticosi cambiamenti nella società, nelle tecnologie, nei mezzi di comunicazione hanno imposto un ruolo diverso dei "saperi" e una loro diversa trasmissione; dall'interno, la buona volontà di numerosi insegnanti, singoli o in associazioni, ha portato a riconoscere la necessità di un cambiamento

¹Nel 1959 a Royaumont (Francia) si è tenuto un convegno dell'OCSE su "Le nuove matematiche", che ha gettato le basi per la redazione di nuove indicazioni per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo e secondo grado, elaborate nel 1960 a Dubrovnik (Iugoslavia). Tali indicazioni sono state pubblicate nel 1961 dall'OCSE col titolo *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*.

della didattica e a mettere in atto strategie di rinnovamento. Una delle motivazioni della nascita delle didattiche disciplinari è stato il crescente divario tra scuola e università, cioè tra il mondo dei ricercatori nelle varie discipline e il mondo degli insegnanti, che devono trasmettere la cultura ai giovani. In particolare si riconosceva la necessità di considerare come oggetto di studio non solo gli aspetti meramente contenutistici delle discipline ma anche i meccanismi di apprendimento e di insegnamento. In breve, le didattiche disciplinari hanno concentrato la loro attenzione sullo studio delle relazioni fra l'insegnante, lo studente e il sapere. Di questo insieme di relazioni, nel presente lavoro, ci soffermeremo su un passaggio per noi importante: la trasposizione didattica, il processo che trasforma i contenuti da insegnare in "oggetti di insegnamento", processo che nella didattica della fisica moderna pone interessanti ma complessi problemi.

Per quanto riguarda la didattica della fisica, un autore di spicco è Arnold B. Arons.² Un suo manuale del 1990, *A Guide to Introductory Physics Teaching*, pubblicato in Italia col titolo *Guida all'insegnamento della fisica* [1], raccoglie i più importanti risultati, riguardanti la didattica degli aspetti più rilevanti della fisica a livello introduttivo, ottenuti fino a quell'epoca negli Stati Uniti. Si trattava di ricerche e osservazioni sistematiche sull'apprendimento e sulla comprensione dei concetti, dei modelli e delle linee di pensiero della fisica, lavori iniziati in parte con ricerche più generali sullo sviluppo delle capacità di ragionamento logico astratto. Prenderemo dunque, come punto di partenza per le nostre riflessioni sulla didattica della fisica, i lavori di Arons [1, 2, 4, 3, 5]. Sempre nel panorama americano, è da ricordare il Il PSSC (Physical Science Study Committee), un comitato di circa sessanta persone tra fisici, esperti di didattica, insegnanti e altre figure che negli Stati Uniti ha realizzato alla fine degli anni Cinquanta un corso di fisica non accademico. Il corso di fisica del PSSC è stato proposto anche in Italia ma ora è fuori catalogo.³

3.2 LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

Il progetto di insegnamento-apprendimento, dice Chevallard [15, p. 39], consiste anzitutto nell'identificare quali contenuti del sapere dovranno di-

²Arnold B. Arons, 1916-2001, professore emerito di fisica all'università di Washington a Seattle; si è occupato, tra l'altro, di insegnamento della fisica e di ricerca in didattica della fisica, è stato presidente dell'American Association of Physics Teachers, è stato autore di libri di testo per studenti e di manuali per l'insegnamento della fisica.

³L'ultima edizione pubblicata è *FISICA - a cura del PSSC*, quarta edizione italiana condotta sulla settima edizione americana, Bologna, Zanichelli, 1995. L'edizione americana è completamente scaricabile dal sito web della biblioteca digitale non profit *Internet Archive*.

ventare contenuti da insegnare. Fatto questo, però, non è possibile proporre agli studenti tali contenuti così come sono stati elaborati dalla ricerca scientifica. Esistono infatti due tipi di “sapere”, che Chevallard [15, p. 14] chiama efficacemente *savoir savant* e *savoir enseigné*, cioè, rispettivamente, il sapere elaborato dalla comunità scientifica e i contenuti disciplinari insegnati a scuola. Un contenuto del sapere, una volta individuato come contenuto da insegnare, deve subire un certo numero di trasformazioni che gli consentiranno di prendere posto fra gli *oggetti di insegnamento*. La procedura che trasforma l’oggetto da insegnare in oggetto di insegnamento è chiamata da Chevallard *trasposizione didattica* [15, p. 39].

Il sapere a sua volta è inserito all’interno di quello che Chevallard chiama *sistema didattico*, che è l’insieme delle relazioni che si instaurano tra l’insegnante, l’allievo e il sapere.⁴ Il sistema didattico si costituisce all’inizio di ogni anno scolastico: tra allievo e insegnante si instaura un rapporto chiamato *contratto didattico* in cui l’insegnante assume il compito formativo nei confronti dell’allievo e questo assume il compito (non sempre di buon grado) di adeguarsi alle attese dell’insegnante. Il contratto didattico è un progetto condiviso di insegnamento-apprendimento che si instaura intorno a un sapere e che riunisce insegnante e allievo in uno stesso luogo.⁵ Chevallard distingue tra sistema didattico e sistema di insegnamento, che riunisce tutti i sistemi didattici e i vari livelli politico-amministrativi che ne consentono il funzionamento. Il sistema di insegnamento, a sua volta, non si può considerare separato dall’ambiente in cui è immerso (la “società”). Ma fra il sistema di insegnamento e la società vi è una sfera d’azione che agisce da collegamento fra i due sistemi, un insieme di persone che riflettono ad esempio sui problemi che nascono dall’incontro della scuola con la società e le sue esigenze (ad esempio associazioni di insegnanti o genitori, commissioni ministeriali, ...). Poiché questo è un ambito dove “si pensa”, è chiamato da Chevallard *noosfera*.

La necessità della trasposizione didattica si vede ancora in un altro fenomeno. Il sapere insegnato da un lato deve essere visto dagli stessi scienziati come sufficientemente vicino al sapere ufficiale da loro prodotto (il *savoir savant*), dall’altro lato deve apparire sufficientemente lontano dal sapere banalizzato della società. Se fosse troppo vicino a quest’ultimo, ad esempio, sarebbe messa in discussione la legittimità del progetto di insegnamento,

⁴Il sistema didattico è rappresentato da Chevallard [15, p. 23] con un triangolo in cui ai vertici si trovano l’insegnante, l’allievo e il sapere.

⁵Il contratto didattico è stato così definito per la prima volta da Guy Brousseau (n. 1933, prima insegnante elementare, poi accademico e esperto di didattica della matematica) nel 1986 in *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-15.

degradandone il valore: gli insegnanti non farebbero niente di più di quello che potrebbero fare altrettanto bene i genitori, se solo avessero il tempo di farlo. Ma la giusta distanza che il sapere insegnato deve mantenere sia dal sapere ufficiale sia da quello banalizzato a poco a poco si erode: il sapere insegnato è soggetto a usura, che lo allontana dal sapere ufficiale e lo avvicina a quello banalizzato. Il sapere insegnato invecchia. L'usura del sapere porta a un'incompatibilità fra il sistema di insegnamento e l'ambiente. Per ristabilire la compatibilità, occorre un nuovo apporto di sapere ufficiale, che avvicini la comunità degli scienziati e si porti a un livello sufficientemente distaccato da un "approccio familiare". Anche qui si vede l'importanza della trasposizione didattica. Riportando questo ragionamento alla didattica della meccanica quantistica, il problema è abbastanza importante: come realizzare una trasposizione didattica che allontani nella giusta maniera il sapere insegnato dalla complessità formale del *savoir savant* e lo avvicini nella giusta maniera agli allievi senza renderlo troppo superficiale o banale?

3.3 I DIVERSI TIPI DI CONOSCENZE

Un oggetto del sapere diventa oggetto da insegnare quando se ne riconosce l'utilità per l'economia del sistema didattico.

Un «objet de savoir» ne vient à l'existence comme tel, dans le champ de conscience des agents du système d'enseignement, que si son insertion dans le système des «object à enseigner» apparaît utile à l'économie du système didactique [15, p. 49].⁶

Chevallard descrive cosa si intende per "oggetto del sapere". Anzitutto, per l'insegnante di matematica, si tratta dell'insieme delle *nozioni matematiche* come addizione, cerchio, derivazione. Accanto alle nozioni matematiche, stanno le *nozioni paramatematiche*, come concetto di parametro, di equazione, di dimostrazione, nozioni che sono strumenti dell'attività matematica (Chevallard le chiama *notions-outils*) e che "non sono oggetto di studio (normalmente) per i matematici" [15, p. 50]. Non vi è comunque impermeabilità assoluta tra i due tipi di nozioni: oggi i concetti di equazione e dimostrazione, ad esempio, sono oggetti matematici della logica matematica. La distinzione tra nozioni matematiche e nozioni utili deve perciò riferirsi a una pratica di insegnamento precisa (ad esempio il livello di un corso). Le nozioni paramatematiche sono in generale *precostruite* (discuteremo più avanti il ruolo della precostruzione), quelle matematiche sono a

⁶Un «oggetto del sapere» inizia a esistere come tale, nel campo di coscienza degli agenti del sistema di insegnamento, solo se il suo inserimento nel sistema degli «oggetti da insegnare» appare utile all'economia del sistema didattico.

volte precostruite (più spesso di quanto si pensi) ma in generale *costruite*, o tramite definizione o tramite costruzione vera e propria. Solo le nozioni matematiche sono pienamente candidate a essere oggetti di insegnamento. Le nozioni paramatematiche infatti sono oggetti del sapere ausiliari all'insegnamento e all'apprendimento degli oggetti matematici propriamente detti. Solo le nozioni matematiche inoltre sono oggetto di una valutazione diretta. Ad esempio l'insegnante, nelle prove di verifica, chiede di risolvere una certa equazione. Se per caso chiede di risolvere e discutere una equazione parametrica, l'insegnante potrà concludere che l'allievo non ha compreso il concetto di parametro. Le nozioni paramatematiche, e a maggior ragione quelle matematiche, sono oggetti "di cui l'insegnante prende coscienza, a cui assegna loro un nome (parametro, equazione, dimostrazione)": Chevallard parla di *percezione didattica* [15, p. 51]. Esiste uno strato più profondo di nozioni, coinvolte implicitamente nel contratto didattico, che chiamiamo *nozioni protomatematiche*: sono le competenze (o capacità). Ad esempio, se un insegnante chiede in quarta superiore una scomposizione, l'allievo deve essere in grado di applicare le fattorizzazioni appropriate. Il riconoscimento delle capacità rimane subliminale da parte dell'insegnante, salvo essere diagnosticato negativamente. Secondo certi punti di vista sul progetto sociale di insegnamento, d'altra parte, è opportuno diagnosticare positivamente il riconoscimento delle competenze (come abbiamo già rilevato, cfr. paragrafo 1.2), ma il progetto sociale di insegnamento è diverso dall'insegnamento in senso stretto, e perciò in questa sede non ce ne occupiamo.

Nozioni matematiche (1), paramatematiche (2), protomatematiche (3) costituiscono strati sempre più profondi del funzionamento didattico del sapere. L'analisi didattica deve esaminarli in maniera distinta. Nel caso della meccanica quantistica, ad esempio, una nozione di tipo (1) sarà il concetto di ampiezza di probabilità, il cui modulo quadro fornisce la probabilità che una misura di un'osservabile fisica fornisca un certo risultato; una nozione di tipo (2) sarà il concetto di combinazione lineare di più stati, uno strumento matematico che consente di costruire un nuovo stato fisico; un concetto di tipo (3) sarà la procedura di calcolo dell'ampiezza di probabilità, per uno stato assegnato $|\Psi\rangle$, di essere nello stato $|\Phi\rangle$, procedura che richieda una competenza ben precisa, quella di applicare un prodotto scalare, che a sua volta è una nozione di tipo (2).

3.4 CARATTERISTICHE DEI SAPERI E DELLA LORO TRASMISSIONE

Le distinzioni introdotte fra i vari tipi di nozioni, che illustrano l'analisi epistemologica del regime didattico del sapere, mostrano che esistono saperi che sono appresi senza essere insegnati. Esistono dunque saperi insegnabili

3. LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

e saperi non insegnabili o non scolarizzabili. I saperi insegnabili sono quelli che hanno le seguenti caratteristiche [15, p. 57]:

- sono divisi in campi delimitati, con pratiche di apprendimento specializzate (*desincretizzazione*);
- possono essere separati dalla persona (*depersonalizzazione*);
- il loro apprendimento e il loro controllo può essere programmato in sequenze ragionate (*programmabilità*).

La trasmissione dei saperi inoltre presuppone

- la definizione esplicita del sapere da trasmettere (*pubblicità*);
- il controllo regolato degli apprendimenti secondo procedure di verifica che autorizzano la certificazione delle competenze (*controllo sociale*).

Tutte queste richieste definiscono per esclusione anche i saperi non scolarizzabili.

Prendendo sempre come esempio la trasposizione didattica della matematica, tutte le caratteristiche descritte, che individuano i saperi scolarizzabili, sono soddisfatte per mezzo di un processo didattico che Chevallard chiama *mise en texte du savoir*, e che noi possiamo chiamare *testualizzazione*, che consiste nel mettere sotto forma di “testo” i saperi individuati affinché possano essere espressi per mezzo di un discorso autonomo. Non è necessario che il “testo” sia un tradizionale testo scritto (un manuale, una dispensa ...): può essere anche un discorso orale o un’esposizione multimediale. La testualizzazione realizza anzitutto la delimitazione dei saperi parziali, come spiega Chevallard nel seguente importante passo.

En effet, par l'exigence d'explicitation discursive, la «textualisation» du savoir amène d'abord la délimitation de savoirs «partiels», chacun s'exprimant dans un discours (fictivement) autonome. Ce procès produit une «désintrication» du savoir, soit sa désyncrétisation. En particulier, il opère une différenciation entre ce qui appartient proprement au champ délimité (en l'espèce, les notions mathématiques et paramathématiques) et ce qui, implicitement (mais réellement) présent (dans le syncrétisme que réalise tout savoir en acte), n'est pas formellement identifié comme tel (notion protomathématiques). Il opère encore une différenciation entre ce qui, présent dans le texte lui-même, fait l'objet de son discours (notion mathématiques), et

ce qui, nécessaire à la construction du texte, n'en est pas la visée (notion paramathématiques) [15, p. 58].⁷

Il processo di esplicitazione testuale del sapere (le nozioni matematiche) produce contestualmente un effetto di “implicitazione” (le nozioni protomatematiche) che poggia su prerequisiti non riconosciuti come tali. La delimitazione dei saperi parziali produce inoltre una separazione del sapere dai problemi che nella ricerca scientifica lo hanno generato.

L'effet de délimitation produit encore, fait essentiel du point de vue de l'épistémologie, la décontextualisation du savoir, sa désinsertion du réseau des problématiques et des problèmes que lui donnent son «sens» complet, la rupture du jeu intersectoriel constitutif du savoir dans son mouvement de création et de réalisation [15, p. 60].⁸

La testualizzazione realizza anche la depersonalizzazione: il sapere è trasformato in testo senza riguardo alle opinioni che il soggetto può avere su di esso, diventa una sorta di sapere oggettivo, non è più possibile metterlo in discussione perché quello che mettiamo sotto forma di testo è ormai un sapere accreditato, non quello ancora sottoposto ai metodi della ricerca scientifica.

La textualisation réalise [...] la dissociation entre la pensée en tant que portée par une subjectivité, et ses productions discursives: le sujet est expulsé hors de ses productions; le savoir est

⁷In effetti, per l'esigenza di esplicitazione discorsiva, la «testualizzazione» del sapere porta anzitutto alla delimitazione dei saperi «parziali», che si esprimono ciascuno in un discorso (artificialmente) autonomo. Questo processo produce una desincretizzazione del sapere. In particolare opera una differenziazione tra ciò che appartiene propriamente al campo delimitato (nella fattispecie, le nozioni matematiche e paramatematiche) e ciò che, implicitamente (ma realmente) presente (nel sincretismo che realizza ogni sapere in atto), non è formalmente identificato come tale (nozioni protomatematiche). Il processo opera ancora una differenziazione fra ciò che, presente nel testo stesso, costituisce l'oggetto del suo discorso (nozioni matematiche), e ciò che, necessario per la costruzione del testo, non ne è l'obiettivo (nozioni paramatematiche).

⁸L'effetto di delimitazione produce inoltre, fatto essenziale dal punto di vista dell'epistemologia, la decontestualizzazione del sapere, la sua separazione dalla rete di problematiche e problemi che gli danno «senso» completo, la rottura del gioco intersettoriale costitutivo del sapere nel suo movimento di creazione e realizzazione.

3. LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

par là soumis à une transformation de dépersonnalisation [15, p. 60].⁹

Questa “oggettivazione” che segue dalla testualizzazione del sapere consente infine la pubblicità del sapere (in opposizione al carattere privato di certi saperi). La pubblicità permette il controllo sociale degli apprendimenti, che è poi una funzione che la scuola deve necessariamente assolvere, sotto forma di verifica e valutazione. Ma l’essenziale di ciò che la testualizzazione rende possibile è la programmabilità dell’acquisizione del sapere:

Le texte est une norme de progression dans la connaissance.
Un texte a un début et une fin (provisoire), et opère par un enchaînement de raisons [15, p. 62].¹⁰

Questo non è vero per il *savoir savant*: non è in genere inicializzabile e sequenziabile. Il sapere della ricerca scientifica non ha un inizio e una fine, non segue un percorso lineare, ogni problema ne può generare molti altri che possono esulare dal campo di indagine in oggetto e sconfinare in altri saperi.

3.5 IL TEMPO DIDATTICO

Chevallard sottolinea la specificità del funzionamento didattico rispetto al funzionamento del sapere corrispondente nell’ambito del *savoir savant* [15, p. 65]. Nella ricerca, infatti, sono soprattutto i problemi che determinano la progressione del sapere e del suo apprendimento, mentre nel processo di insegnamento i problemi non sono fondamentali (possono far parte al più di una metodologia, come l’insegnamento *per problemi*) e lo è invece una contraddizione tra vecchio e nuovo. Affinché un oggetto del sapere diventi oggetto di insegnamento, deve apparire come un oggetto a due facce, nuovo e vecchio allo stesso tempo rispetto alle conoscenze degli studenti: nuovo perché deve rappresentare un’apertura nelle frontiere dell’universo della conoscenza già esplorato e la soluzione di un problema aperto; vecchio, in un secondo momento della dialettica dell’insegnamento, perché deve entrare a far parte delle conoscenze acquisite. Si deve, secondo Chevallard, realizzare un equilibrio.

⁹La testualizzazione realizza [...] la dissociazione tra il pensiero in quanto espresso da una soggettività e le sue produzioni discorsive: il soggetto è lasciato fuori dalle sue produzioni; il sapere è pertanto sottomesso a una trasformazione di depersonalizzazione.

¹⁰Il testo è una norma di progressione nella conoscenza. Un testo ha un inizio e una fine (provvisoria) e opera per mezzo di un incatenamento di ragioni.

L'objet d'enseignement réalise donc un «équilibre» contradictoire entre passé et avenir: il est un objet transactionnel entre passé et avenir [15, p. 67].¹¹

La contraddizione tra vecchio e nuovo normalmente è superata col successo dell'apprendimento. Se questo avviene, ne risulta l'invecchiamento degli oggetti di insegnamento. Ma questo invecchiamento comporta anche la necessità del loro rinnovamento nel corso di un ciclo di studi. Il tempo didattico è quindi una continua dialettica tra vecchio e nuovo, una continua distruzione e ricostruzione. L'insegnante gestisce all'interno della relazione didattica questa dialettica che Chevallard chiama *cronogenesi*. Questo fa in modo che vi sia una distinzione fra insegnante e allievo. Potrebbe sembrare infatti che, una volta che l'allievo abbia raggiunto il sapere, non vi sia più distinzione tra lui e l'insegnante. Ma l'insegnante si distingue dall'allievo proprio sull'asse temporale della relazione didattica, per il fatto che è capace di anticipazione:

l'élève peut bien [...] maîtriser le passé, seul le maître peut maîtriser le futur. L'enseigné peut apprendre; l'enseignant peut savoir ce que l'enseigné peut apprendre [15, p. 72].¹²

La distinzione tra insegnante e allievo si manifesta quindi non solo in relazione al sapere, ma in relazione al tempo come tempo del sapere. Ma insegnante e allievo differiscono anche in base ai luoghi (ruoli) in relazione al sapere in costruzione, in rapporto a ciò che Chevallard chiama *topogenesi*. Non è solo il fatto che il tradizionale modello di relazione insegnante-alunno è basato sul potere. Affinché tale potere non sia mera costrizione, l'insegnante deve ogni volta conquistare la sua egemonia: il potere dell'insegnante non deve essere (solo) potere di vietare, ma potere di produrre risposte. L'insegnante, che come si è detto si suppone sappia e sappia anticipare, deve

affirmer le caractère singulier de sa place propre dans la construction du savoir: non content de savoir plus, et de programmer le futur, il sait autrement. Le savoir de l'enseigné et le savoir de l'enseignant ne diffèrent pas seulement au plan de la

¹¹L'oggetto di insegnamento realizza dunque un «equilibrio» contraddittorio tra passato e futuro: è un oggetto transazionale tra passato e futuro.

¹²L'allievo può ben [...] padroneggiare il passato, solo il maestro può padroneggiare il futuro. L'allievo può apprendere, l'insegnante può sapere ciò che l'allievo può apprendere.

quantité. La transposition didactique tend à organiser qualitativement la différence des places: elle tend à instituer deux «manières» de savoir, [...] [15, p. 75].¹³

Perché si possa continuare a fondare la topogenesi, cioè la differenziazione fra i ruoli, si deve porre rimedio a un altro tipo di invecchiamento dell'oggetto di insegnamento. Quello già descritto è un invecchiamento che Chevallard chiama interno, perché si manifesta all'interno di un ciclo di studi. Ma l'oggetto di insegnamento subisce anche invecchiamento esterno, in rapporto non alla durata del ciclo di insegnamento ma alla durata storica (cioè nel susseguirsi degli anni scolastici). Questo invecchiamento storico degli oggetti di insegnamento oltre a non consentire di mantenere la differenza dei ruoli non permette nemmeno, di fronte alla società, il mantenimento della legittimità sociale del progetto di insegnamento. Sarebbe come dire che all'insegnante si può sostituire chiunque. Una soluzione può essere il rinnovamento storico dell'oggetto di insegnamento: se ad esempio l'algoritmo dell'addizione è storicamente invecchiato, l'introduzione del concetto di operatore cambierà la situazione. Il sistema didattico deve essere sempre nuovo (cronogenesi) e sempre un po' al di sopra del livello dell'allievo.

Uno dei problemi nell'insegnamento della meccanica quantistica è, per così dire, un intoppo sia nella cronogenesi che nella topogenesi. La cronogenesi si interrompe perché, all'interno di un ciclo di studi, si interrompe la dialettica tra vecchio e nuovo: la meccanica quantistica è un sapere così "nuovo" per gli studenti, nel senso che appare molto al di là della loro percezione, che non riesce a diventare "vecchio", cioè assimilato e consolidato, all'interno del ciclo di studi considerato. Ma si interrompe anche la topogenesi perché il sapere della meccanica quantistica non riesce a invecchiare nemmeno da un ciclo di studi all'altro: il fatto che sia, dal punto di vista degli insegnanti, un ambito disciplinare molto ricco di difficoltà di insegnamento, è il motivo per cui la meccanica quantistica rimane un sapere sempre "nuovo" nel senso che ancora si dibatte su quale sia la maniera migliore di insegnarlo e non vi è una "testualizzazione" consolidata come per le altre parti della fisica.

¹³[...] affermare il carattere particolare della sua posizione nella costruzione del sapere: non solo sa "di più" e sa programmare il futuro, ma sa "in altra maniera": il sapere dell'allievo e dell'insegnante differiscono non solo in quantità. La trasposizione didattica tende a organizzare anche qualitativamente la differenza dei ruoli: tende a istituire due maniere del sapere, [...]

3.6 RIELABORAZIONE E PRECOSTRUZIONE

Chevallard descrive anche un altro modello di temporalità, in cui sono permessi salti all'indietro (*retours réorganisateur radical*), mutuando dalla psicoanalisi il concetto freudiano della posteriorità (*après-coup*): esperienze, impressioni, tracce della memoria sono rimaneggiate ulteriormente in funzione di nuove esperienze. Il concetto di posteriorità consente di rimaneggiare non tutto quanto il vissuto ma solo ciò che nel momento in cui è vissuto non può essere integrato in un contesto significativo. Ciò comporta, nell'analisi didattica, un cambiamento di temporalità: far dipendere il progetto didattico da una concezione lineare del tempo, condanna al rispetto di vincoli che nella realtà non possono essere rispettati. Occorre riprendere acquisizioni anteriori alla luce delle nuove esperienze. Poiché l'insegnamento tende a fornire all'allievo risposte a domande che non sempre sono poste da lui, l'attività di appropriazione da parte dell'allievo

consisterait alors à élaborer des questions, à se poser implicitement la question des questions, et l'activité de l'enseignant consisterait pour une part à créer des situations favorisant l'activité questionnante, [...] [15, p. 88].¹⁴

La rielaborazione è quindi un'attività necessaria alla costruzione stessa del sapere, a quella fase che Chevallard chiama precostruzione. Per capire cosa si intende per precostruzione, seguiamo un esempio di Chevallard tratto dalla storia della matematica. Nel 1821 Cauchy enunciò il teorema dei valori intermedi e lo dimostrò con considerazioni grafiche, ma questa dimostrazione oggi per noi non va bene. Il fatto che non sia una vera dimostrazione secondo i canoni odierni è dovuto all'assenza dei concetti di continuità e di numero reale, a quel tempo non ancora costruiti. Ma allora questa assenza non era percepita come tale. Quindi l'oggetto in questione, il teorema dei valori intermedi, non era "costruito" ma presentato mediante una "assenza". Solo oggi, con i concetti necessari, possiamo ricostruire il concetto. In generale, qualunque sapere scientifico poggia su uno strato profondo di precostruito, ma questo non si percepisce nell'attività scientifica corrente, salvo nei momenti di cambiamento di paradigmi. In tal caso lo strato profondo di evidenze sul quale l'edificio costruito si fondava è intaccato. Sorge la necessità di una rifondazione, una ripresa del sapere anteriore, la precostruzione del quale non è più sufficiente perché l'evoluzione

¹⁴[...] consisterà allora nell'elaborare domande, nel porsi implicitamente la domanda delle domande, e l'attività dell'insegnante consisterà in parte a creare situazioni che favoriscono l'attività di elaborazione delle domande, [...]

3. LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

delle condizioni della pratica teorica ha evidenziato la sua fragilità, la sua incapacità di dar luogo a una argomentazione scientifica. Non smetterà di esistere comunque nel nostro sapere qualcosa di precostruito. Vedremo più avanti esempi di “precostruito” nella didattica della fisica moderna, quando ci appresteremo a una scelta dei contenuti per una trasposizione didattica.

La meccanica quantistica

4.1 ALCUNE FORMULAZIONI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

4.1.1 *Introduzione*

Volendo affrontare l'insegnamento della meccanica quantistica a livello di scuola superiore, occorre tener conto, come si è detto, che, una volta individuato il sapere *da insegnare*, il sapere insegnato e il sapere accreditato e condiviso presso la comunità scientifica non sono sovrapponibili. Prima di procedere, nei capitoli seguenti, a individuare i contenuti della meccanica quantistica che vogliamo trasformare in sapere da insegnare, proviamo a rispondere ora a una domanda: che cosa si intende oggi per meccanica quantistica?

Il sapere della meccanica quantistica si è consolidato in un certo numero di formulazioni [67], che è importante conoscere per poter attingere da una certa formulazione piuttosto che da un'altra nella fase di elaborazione di una proposta didattica. Delle formulazioni esistenti, nove secondo l'articolo citato, ne esaminiamo solo alcune, funzionali alla comprensione delle proposte didattiche studiate e agli scopi di ricerca didattica che ci siamo proposti. Lo spirito di questo capitolo è quello di individuare i principi fondamentali condivisi della meccanica quantistica, per poter scegliere con consapevolezza epistemologica eventuali contenuti da insegnare nella scuola secondaria.

4.1.2 *Meccanica delle matrici*

CENNI STORICI — Come si è già avuto modo di ricordare, nel 1923 de Broglie formulava l'ipotesi in cui associava un'onda a ogni tipo di particella, ipotesi confermata nel 1927 dagli esperimenti di diffrazione degli elettroni di Davisson e Germer. Negli stessi anni Heisenberg rifletteva sui fondamenti della

fisica partendo da un'idea di fondo: la fisica dovrebbe trattare solo quantità osservabili. Da questo seguiva che non aveva senso fare riferimento a orbite atomiche di tipo classico, poiché nessun esperimento poteva provarne l'esistenza. Heisenberg partì pertanto dall'ipotesi di Bohr relativa a livelli energetici atomici quantizzati e esaminò il problema delle linee spettrali.

Nell'elettromagnetismo classico l'intensità di radiazione dipende dal dipolo elettrico dell'atomo, che a sua volta dipende dalla posizione dell'elettrone rispetto al nucleo. Tale posizione però non può essere misurata mentre avviene l'emissione. Heisenberg allora ipotizzò che quando l'atomo passava da un livello energetico n a un livello m , la posizione dell'elettrone, che non poteva essere misurata direttamente, potesse essere caratterizzata da un numero x_{nm} che rappresentava la maniera in cui la posizione stessa si manifestava durante la transizione. Heisenberg introdusse poi altre quantità analoghe per rappresentare velocità e accelerazione, e formulò le leggi della dinamica in termini di tutte queste quantità. L'aspetto notevole è che tali quantità erano, per allora, "strane" anche dal punto di vista algebrico: in particolare il loro prodotto non era commutativo. Con tutto ciò, comunque, nel 1925 Heisenberg ottenne per la prima volta una spiegazione delle linee spettrali in buon accordo con l'esperienza. Born, Jordan e Dirac riconobbero ben presto che l'uso di oggetti matematici non commutativi era una caratteristica intrinseca della teoria di Heisenberg, e riconobbero anche che le regole di calcolo di cui Heisenberg faceva uso erano quelle dell'algebra delle matrici. Nel 1926 Dirac da un lato e Born, Heisenberg, Jordan dall'altro formularono una dinamica quantistica completa, da potersi applicare a ogni sistema fisico.

BASI DELLA TEORIA Per rivisitare i principi fondamentali della meccanica quantistica secondo la formulazione della "meccanica delle matrici", ci riferiamo alla rielaborazione di Dirac [20], che ha anche compiuto una sintesi tra meccanica delle matrici e meccanica ondulatoria.

Lo stato fisico (quantistico) è rappresentato da un vettore $|\psi\rangle$ (detto *ket*) in uno spazio vettoriale (che, come vedremo, deve essere uno spazio di Hilbert) mentre una grandezza fisica, detta osservabile, è rappresentata da un operatore \hat{A} . La base dello spazio vettoriale è costituita da vettori $|a_i\rangle$, detti *autostati*, tali che

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

dove a_i , detto *autovalore*, è il risultato della misura di una grandezza fisica che corrisponde all'operatore. Un generico stato si ottiene da una

combinazione lineare della base:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |a_i\rangle$$

dove i coefficienti c_i sono numeri complessi e prendono il nome di *ampiezze di probabilità*. Per fondare la teoria occorre dunque introdurre gli spazi vettoriali nonché il concetto di base e di combinazione lineare, strumenti matematici che servono per descrivere gli stati fisici. Per descrivere il concetto di misura, invece, occorrono, come strumenti matematici, gli operatori e il concetto di autovalori e autovettori.

Per capire la necessità di introdurre il concetto di ampiezza, è necessario riflettere sul problema della misura. Prima di una misura dell'osservabile \hat{A} , lo stato fisico è in generale in una sovrapposizione di autostati, cioè una combinazione lineare della base. Quando si esegue la misura, il sistema *collassa* in uno degli autostati di \hat{A} e il rispettivo autovalore corrisponde al valore della misura. Quindi una misura cambia lo stato del sistema (a meno che il sistema non fosse già inizialmente in un autostato). Prima della misura non sappiamo in quale autostato collasserà lo stato (cioè quale valore della misura si otterrà), possiamo solo conoscerne la probabilità, data dal modulo quadro dell'ampiezza di probabilità. Nota bene, dice Dirac: affermando che un generico stato è una sovrapposizione di stati di base con opportuni coefficienti, non significa che lo stato è "un po' in una situazione e un po' in un'altra", ma che esistono ben definite probabilità che, se si esegue una misura dello stato, questa fornisca i risultati che corrispondono ai rispettivi autovalori. La meccanica quantistica dunque assume come ipotesi che le grandezze fisiche non possono assumere valori arbitrari ma solo certi valori permessi, con ben precise probabilità. Uno dei postulati della teoria, pertanto, è che la probabilità di ottenere una certa misura è data dal modulo quadro dell'ampiezza di probabilità. Perciò, per elaborare una teoria quantistica, non si può prescindere dall'uso del concetto matematico di probabilità.

Il simbolo

$$\langle a_i | \psi \rangle$$

indica l'ampiezza di trovare nello stato $|a_i\rangle$ una particella che si trova nello stato $|\psi\rangle$. Il simbolo $\langle a_i |$ è un altro tipo di vettore chiamato *bra*. L'ampiezza quindi si considera ottenuta come un prodotto scalare tra *ket* e *bra*. Un *bra* è *complesso coniugato* del rispettivo *ket*.

Esistono operatori che commutano e che non commutano, che Sakurai chiama compatibili e incompatibili [62, p. 29]. Quando due operatori non commutano, la teoria consente di ricavare una relazione di indeterminazione fra le rispettive grandezze fisiche: coseguentemente, non si possono

misurare con precisione arbitraria le due grandezze. Sono importanti però anche gli operatori che commutano: la teoria ci dice che hanno autostati in comune, e rappresentano grandezze fisiche che possono essere misurate simultaneamente. Le relazioni di commutazione quindi hanno il ruolo di postulati della teoria, e da esse discendono le relazioni di indeterminazione, che sono uno degli elementi di rottura con la fisica classica.

ESEMPI DI OSSERVABILI E RISPETTIVI OPERATORI Un esempio di osservabile è lo spin, proprietà che non ha un corrispettivo nella fisica classica. Per certe particelle, dette a spin $1/2$, lo spin può assumere solo i due valori $\pm \frac{\hbar}{2}$. Gli stati di spin quindi sono rappresentati da elementi di uno spazio vettoriale a due dimensioni. L'operatore che misura lo spin è il generatore delle rotazioni, che ha le dimensioni di un momento angolare.¹ In estrema sintesi, quindi, possiamo dire che all'osservabile fisica *spin* corrisponde l'operatore *momento angolare*. Gli stati di base dello spin sono autostati del momento angolare. Dal fatto che momenti angolari intorno a diversi assi non commutano, segue una relazione di indeterminazione. Ad esempio, risulta che non è possibile conoscere con precisione arbitraria momenti angolari lungo diversi assi.

La misura dell'energia di uno stato quantistico è data dall'operatore hamiltoniano, che, avendo le dimensioni dell'energia, chiamiamo operatore energia. Esso consente di esprimere un altro operatore importante che è l'operatore di evoluzione temporale. Questo a sua volta consente di ricavare l'equazione di Schrödinger, ossia l'equazione del moto della meccanica quantistica, che descriveremo più avanti. Gli autostati dell'hamiltoniana sono importanti in quanto stati stazionari. I rispettivi autovalori sono i valori permessi per l'energia. Ciò quindi comporta che alcuni importanti sistemi quantistici (come vedremo più avanti) possono assumere solo certi valori di energia.²

A uno stato può essere associata anche una posizione, ma a differenza dello spin la posizione può assumere valori con continuità (si dice che ha uno spettro continuo di autovalori), quindi non sarà una sovrapposizione discreta ma continua. L'operatore di posizione è quello che applicato allo stato fornisce una misura della posizione della particella. Il numero complesso $\langle x | \psi \rangle$ è l'ampiezza di trovare la particella in una posizione x e, siccome varia al variare di x , viene chiamata *funzione d'onda*.

¹Si chiama generatore delle rotazioni perché consente di esprimere un operatore di rotazione.

²Esistono anche sistemi, come la particella libera, in cui lo spettro di autovalori dell'energia è continuo.

Per misurare la quantità di moto dello stato si usa l'operatore generatore delle traslazioni, che ha per l'appunto le dimensioni fisiche dell'impulso. Esso consente anche di esprimere l'operatore di traslazione, quello che trasla uno stato di una quantità definita. Dalla non commutatività degli operatori di posizione e quantità di moto, segue un'altra relazione di indeterminazione, ad esempio

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

L'operatore quantità di moto nello spazio delle posizioni corrisponde alla derivata rispetto alla posizione:

$$\hat{p}_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Si può adottare come sistema di riferimento anche lo spazio degli impulsi. In tal caso si può definire una funzione d'onda nello spazio degli impulsi.

In sintesi, quindi, gli stati di posizione e di quantità di moto costituiscono uno spazio vettoriale continuo. L'ampiezza di probabilità di trovare la particella in un certo stato di posizione o di quantità di moto si chiamano rispettivamente funzione d'onda nello spazio delle posizioni e degli impulsi. La posizione e l'impulso nella stessa direzione non commutano. Ciò implica che non è possibile conoscere con precisione arbitraria posizione e impulso della particella.

4.1.3 Meccanica ondulatoria

LA FUNZIONE D'ONDA Mentre nella formulazione delle matrici il nucleo concettuale è nel significato di misura e di osservabile fisica, la meccanica ondulatoria è fondata sul concetto di stato (per una trattazione più approfondita, cfr. ad esempio [38]). Nel 1926 Schrödinger formulava in maniera precisa l'ipotesi di de Broglie, mediante un'equazione che definiva la funzione d'onda da associare a una particella e la relativa evoluzione temporale. L'equazione di Schrödinger è dunque l'equazione fondamentale della meccanica quantistica:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (4.1)$$

dove la funzione Ψ si chiama funzione d'onda, che non è un'entità fisica, ma uno strumento matematico. Si tratta, secondo un'interpretazione detta statistica, di una funzione tale che $|\Psi(x, t)|^2 dx$ è la probabilità di trovare

la particella fra x e $x + dx$ all'istante t . Questo significato della funzione d'onda fu precisato da Born nel 1926, sulla base di esperimenti di diffusione di elettroni su un ostacolo. Dall'interpretazione statistica della funzione d'onda segue la cosiddetta condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 = 1,$$

che rappresenta la certezza di trovare la particella in tutto lo spazio.

Le funzioni d'onda sono elementi di uno spazio vettoriale astratto, in generale uno spazio di Hilbert a dimensione infinita. Una caratteristica importante di questo spazio è che, se $f(x)$ appartiene a uno spazio di Hilbert, deve essere

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty,$$

perché ciò assicura l'esistenza del prodotto interno.³ Se ogni funzione nello spazio di Hilbert può essere espressa come combinazione lineare di un insieme di funzioni, tale insieme si dice completo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x).$$

Per semplicità tale insieme può essere reso ortonormale. Faremo uso di questi concetti quando vedremo come costruire, da un punto di vista didattico, un pacchetto d'onde localizzato a partire da funzioni sinusoidali.

OSSERVABILI E OPERATORI Le osservabili fisiche sono rappresentate da operatori. L'operatore x rappresenta la posizione e l'operatore $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ rappresenta la quantità di moto. Tutte le altre variabili dinamiche possono essere espresse con gli operatori x e p (in particolare l'energia, ovvero hamiltoniana).

Data un'osservabile $Q(x, p)$, il suo valor medio è

$$\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx.$$

Poiché la media di misure deve essere reale, deve essere

$$\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$$

cioè

$$\int \Psi^* \hat{Q} \Psi dx = \int \Psi (\hat{Q} \Psi)^* dx \quad (4.2)$$

³Le funzioni che soddisfano questa condizione si chiamano a quadrato integrabile.

per qualsiasi funzione d'onda Ψ . Gli operatori che soddisfano questa condizione si chiamano hermitiani.

In generale una caratteristica della meccanica quantistica è l'indeterminazione: quando si misura un'osservabile Q su un insieme di sistemi preparati allo stesso modo, tutti nello stato Ψ , non si ottiene ogni volta lo stesso risultato. Esemplichiamo questo concetto con la misura dello spin di una particella. Dato un insieme di particelle a spin $1/2$, tutte nello stesso stato, se misuriamo lo spin di tutte le particelle, l'esito della misura non può essere previsto con certezza: otteniamo spin $1/2$ o $-1/2$ con probabilità uguali. Se però esistono stati determinati Ψ , in cui cioè ogni misura di Q fornisce il valore q , si avrà

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi. \quad (4.3)$$

La (4.3) si chiama equazione agli autovalori, dove Ψ è una autofunzione e q il relativo autovalore. In riferimento all'esempio dello spin, se è vero che misurando lo spin di una particella il risultato non può essere previsto con certezza, una volta fatta una prima misura e ottenuto, ad esempio, il valore $1/2$, una seconda misura dello spin fornirà, con certezza, come esito il valore $1/2$. La prima misura, infatti, ha portato lo stato del sistema a coincidere con un autostato e quindi la seconda misura fornisce come esito un autovalore relativo a quell'autostato.

Dall'equazione di Schrödinger si ottiene un'importante equazione agli autovalori, le cui soluzioni consentono di conoscere l'evoluzione temporale della particella (per dettagli sulle soluzioni dell'equazione di Schrödinger, cfr. appendice B). Se si esamina il caso particolare in cui il potenziale non dipende dal tempo e si ipotizzano soluzioni del tipo

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$$

dette separabili, si trova che la parte temporale della funzione d'onda è data da

$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

mentre la parte spaziale verifica l'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi, \quad (4.4)$$

detta equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, dove E è una costante. Le soluzioni separabili sono importanti perché rappresentano i cosiddetti stati stazionari e sono anche stati con energia totale definita. Il primo membro della (4.4) infatti, se si esprime la quantità di moto come

operatore, è l'hamiltoniana del sistema, e quindi la stessa equazione si può scrivere

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

che è un'equazione agli autovalori, da cui risulta che la costante E è proprio l'energia.

OPERATORI CON INSIEME CONTINUO DI AUTOFUNZIONI In generale sono importanti le autofunzioni di operatori hermitiani, che corrispondono fisicamente a stati determinati di grandezze osservabili. A questo proposito, si possono verificare due possibilità: se le autofunzioni costituiscono un insieme discreto, allora si trovano in uno spazio di Hilbert e rappresentano stati fisici realizzabili; se le autofunzioni costituiscono un insieme continuo, allora non sono normalizzabili, non rappresentano stati fisici possibili ma le loro combinazioni lineari possono essere normalizzabili.

Un esempio di operatore con insieme continuo di autofunzioni è la quantità di moto, per il quale l'equazione agli autovalori è

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f_p(x) = p f_p(x)$$

con soluzioni del tipo

$$f_p(x) = A e^{ipx/\hbar}.$$

Queste funzioni non sono a quadrato integrabile per qualunque valore complesso di p , quindi l'operatore quantità di moto non ha autofunzioni nello spazio di Hilbert. Se ci si limita a considerare autovalori reali, si ricavano le funzioni

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

che verificano una condizione di ortonormalità del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x) dx = \delta(p - p').$$

Le autofunzioni dell'operatore quantità di moto costituiscono però un insieme completo: ogni funzione a quadrato integrabile può essere scritta nella forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int c(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

con opportuni coefficienti, che possono essere calcolati dalla teoria.

Un'altra caratteristica delle autofunzioni dell'operatore quantità di moto è che sono sinusoidali, con

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

(lunghezza di de Broglie). Anche se in realtà non esiste una particella con quantità di moto definita, la relazione di de Broglie si applica a un pacchetto d'onde normalizzabile con un piccolo intervallo di quantità di moto. Quindi anche se le autofunzioni della quantità di moto con autovalori reali non rappresentano stati fisicamente possibili, sono comunque utili.

INTERPRETAZIONE STATISTICA GENERALIZZATA Insieme con l'equazione di Schrödinger, il fondamento della meccanica quantistica è l'interpretazione statistica generalizzata: una misura dell'osservabile $Q(x, p)$ su una particella nello stato $\Psi(x, t)$ fornisce con certezza uno degli autovalori dell'operatore hermitiano $\hat{Q}(x, -i\hbar \frac{d}{dx})$.

Se lo spettro di \hat{Q} è discreto, la probabilità di trovare il particolare autovalore q_n associato all'autofunzione normalizzata $f_n(x)$ è $|c_n|^2$, mentre se lo spettro è continuo, con autovalori reali $q(z)$ e corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate $f_z(x)$, la probabilità di trovare un risultato nell'intervallo dz è $|c(z)|^2 dz$.

In seguito alla misura, la funzione d'onda collassa nell'autostato corrispondente (come si è detto prima, nell'esempio della misura dello spin). Poiché le autofunzioni costituiscono un insieme completo, la funzione d'onda può essere scritta come

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n f_n(x)$$

(questo nel caso discreto, nel caso continuo la sommatoria diventa un integrale). Poiché le autofunzioni sono ortonormali, si può ricavare

$$c_n = \int f_n(x)^* \Psi(x, t) dx.$$

È importante sottolineare quanto segue: è errato dire che $|c_n|^2$ è la probabilità che la particella si trovi nello stato f_n , perché la particella è nello stato Ψ ; si deve dire che $|c_n|^2$ è la probabilità che una misura di \hat{Q} fornisca il valore q_n . La probabilità totale deve essere uno:

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

e ciò si può vedere anche dalla normalizzazione della funzione d'onda.

Nel caso della quantità di moto si è trovato che le autofunzioni sono

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

quindi

$$c(p) = \int f_p^* \Psi dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ipx/\hbar} \Psi(x, t) dx.$$

Questa funzione è chiamata funzione d'onda nello spazio dei momenti e indicata con $\Phi(p, t)$. Risulta essere la trasformata di Fourier della funzione d'onda $\Psi(x, t)$, che quindi è a sua volta l'antitrasformata di Fourier di $\Phi(p, t)$. Secondo l'interpretazione statistica generalizzata, la probabilità che una misura della quantità di moto fornisca un risultato nell'intervallo dp è $|\Phi(p, t)|^2 dp$.

4.1.4 *Cammini di Feynman*

AMPIEZZA DI TRANSIZIONE Le idee che stanno alla base della meccanica quantistica sono state presentate da Feynman in un ciclo di lezioni per non specialisti alla University of California negli anni ottanta del Novecento [27]. Feynman si proponeva di spiegare l'elettrodinamica quantistica (QED), “la strana teoria della luce e della materia”, cioè dell'interazione fra luce e elettroni, che, dice Feynman ai suoi lettori, “descrive tutti i fenomeni del mondo fisico tranne la forza di gravità”. Anche in questa formulazione assume molta importanza il concetto di ampiezza di probabilità, ma tale quantità ha il carattere di ampiezza di transizione, legata quindi non alla probabilità che il sistema si trovi in un certo stato, ma alla probabilità che passi da uno stato iniziale a uno stato finale.

Il carattere probabilistico dei fenomeni quantistici è illustrato da Feynman con il seguente esperimento. Inviando fotoni monocromatici da una sorgente verso un blocco di vetro, con un rivelatore posto all'interno del vetro e uno all'esterno dalla stessa parte della sorgente si trova ad esempio che il 4% dei fotoni viene riflesso e il 96% attraversa la superficie. Non è possibile prevedere con certezza se un fotone sarà riflesso o attraverserà la superficie: si può solo assegnare una certa probabilità. Feynman propone anche l'esperimento della riflessione parziale su due superfici. Se si considera ad esempio una lamina sottile, una parte dei fotoni saranno trasmessi e un'altra parte saranno riflessi. Poiché le superfici riflettenti sono due, quella anteriore e quella posteriore, si potrebbe pensare che la percentuale di fotoni riflessi sia 8%. Si trova invece che tale percentuale varia al variare dello spessore, in particolare con andamento oscillatorio, da un minimo di zero a un massimo del 16%.

Feynman definisce un vettore, chiamato *ampiezza di transizione*, il cui modulo al quadrato è la probabilità che il fotone arrivi in un certo punto. Ogni ampiezza corrisponde a un modo in cui il fotone può arrivare in quel punto. Egli sottolinea infatti che un evento in genere si può verificare in

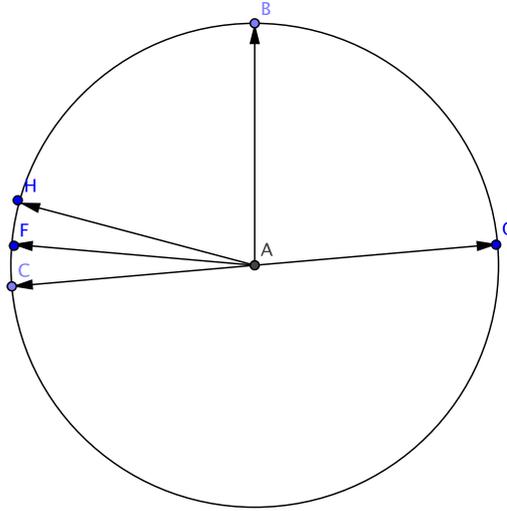


Figura 4.1: Ampiezza di transizione

più modi. Ad esempio, nella riflessione della luce su una lamina sottile, il fotone può riflettersi sia nella superficie anteriore che in quella posteriore.

CALCOLO DELLE AMPIEZZE Per illustrare ai non specialisti le regole con cui si trattano le ampiezze, Feynman suggerisce di immaginare un cronometro con una sola lancetta, che parte dallo zero (punto B della figura 4.1) nell'istante in cui parte il fotone e gira con velocità pari a quella della luce monocromatica in esame. La direzione in cui si ferma la lancetta nel momento in cui il fotone arriva a destinazione e si arresta il cronometro è la direzione del vettore che rappresenta l'ampiezza. La lunghezza del vettore è tale che il suo quadrato è pari alla probabilità. Poiché abbiamo visto che la superficie del vetro riflette circa il 4% dei fotoni che la colpiscono, i vettori avranno lunghezza di circa 0,2 in unità fissate.

Consideriamo ad esempio il caso della riflessione sulla lamina sottile. Supponiamo che il fotone arrivi al rivelatore dopo essere stato riflesso dalla superficie anteriore e che la lancetta del nostro cronometro si sia fermata in C . Poiché la riflessione è avvenuta sulla superficie frontale, una regola da tener presente nel disegnare le ampiezze è che bisogna cambiare il verso del vettore ottenuto. L'ampiezza sarà quindi rappresentata dal vettore DE della figura 4.2. Se il fotone invece viene riflesso dalla superficie posteriore, impiegherà un po' di tempo in più, quindi la lancetta del cronometro arriverà, poniamo, in F . A questa riflessione corrisponde l'ampiezza rap-

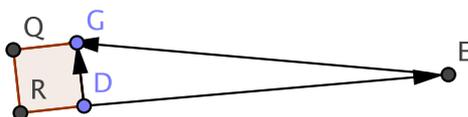


Figura 4.2: Somma di ampiezze

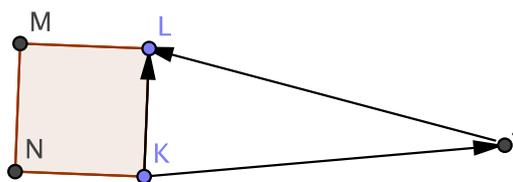


Figura 4.3: Somma di ampiezze

presentata dal vettore EG della figura 4.2. Le ampiezze si sommano come si sommano i vettori, quindi l'ampiezza risultante sarà il vettore GD della figura 4.2. Il vettore risultante avrà quindi una lunghezza di circa 0,05. Tale ampiezza corrisponde a una probabilità molto bassa, di circa 0,25 %.

Se si aumenta lo spessore della lamina, il fotone riflesso dalla superficie posteriore impiegherà ancora un po' di tempo in più e la lancetta del cronometro si fermerà, poniamo, in H (figura 4.1). L'ampiezza corrispondente sarà data, nella figura 4.3, dal vettore JL e l'ampiezza risultante dal vettore KL , che corrisponde a una probabilità di circa 5%. Se si aumenta ancora lo spessore della lamina in maniera tale che la lancetta del cronometro si fermi in O (figura 4.1), si otterrà una probabilità del 16% (vedi figura 4.4). Se si aumenta ancora lo spessore, si arriverà a una situazione in cui la lancetta del cronometro si fermerà di nuovo in C e la probabilità sarà zero.

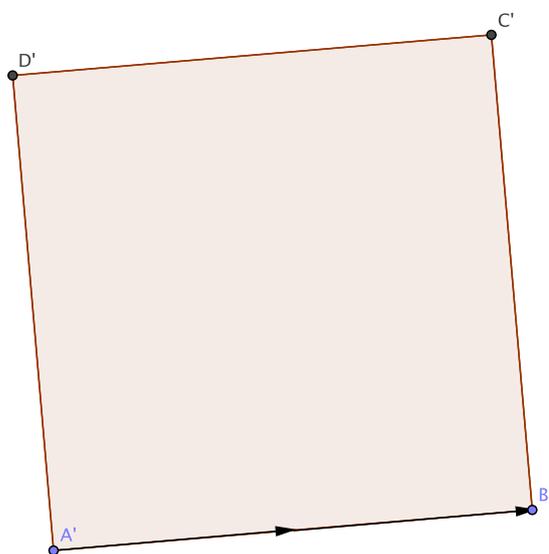


Figura 4.4: Somma di ampiezze

Con queste basi si spiega il comportamento oscillatorio della probabilità di riflessione.

La regola è quindi che la probabilità di un evento che si può verificare in più modi si trova sommando prima le ampiezze relative a tutti i modi in cui l'evento si può verificare e poi facendo il quadrato dell'ampiezza totale.

Feynman usa questo modello anche per spiegare la riflessione, che ci si aspetta che avvenga solo nella parte centrale di uno specchio, ove l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione. In realtà i fotoni possono riflettersi sullo specchio seguendo un qualsiasi percorso. Bisogna calcolare l'ampiezza per tutti i possibili modi in cui si può riflettere il fotone. Tali ampiezze saranno rappresentate da vettori che hanno tutti lo stesso modulo ma diversa direzione, perché diverso è il tempo impiegato dal fotone a seguire i vari percorsi. Se si disegna il vettore che rappresenta l'ampiezza risultante, si trova che le ampiezze che danno un maggior contributo sono quelle relative alla riflessione nella parte centrale dello specchio.

EVENTI COMPOSTI Feynman illustra poi il calcolo della probabilità per eventi composti e mostra un'altra maniera di trattare le ampiezze. Poiché l'ampiezza è un vettore che ha un modulo e una direzione (cioè forma un certo angolo con una direzione fissata), si trova che per eventi che avven-

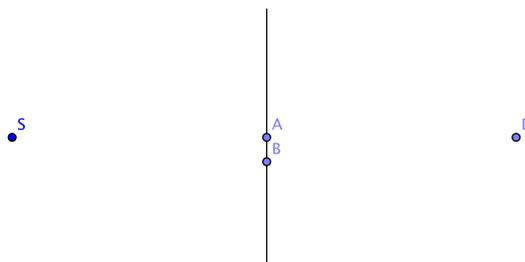


Figura 4.5: Doppia fenditura

gono in successione combinare le ampiezze per ottenere l'ampiezza totale equivale a moltiplicare le lunghezze dei rispettivi vettori e sommare i rispettivi angoli. Osserviamo che questa è la proprietà del prodotto fra numeri complessi espressi in forma esponenziale. Da questo si può capire come l'ampiezza di probabilità sia un numero complesso.

Insomma, mentre nelle situazioni che Feynman chiama “abituali” valgono le regole di composizione classiche della probabilità (somma, per eventi alternativi, e prodotto, per eventi in successione o concomitanti), in meccanica quantistica, invece, anziché sommare e moltiplicare probabilità si devono sommare e moltiplicare ampiezze, e la probabilità è il quadrato dell'ampiezza.

Feynman illustra anche l'esempio della doppia fenditura: una luce monocromatica molto debole (al limite costituita da singoli fotoni) viaggia da una sorgente S al rivelatore D (cfr. figura 4.5) e attraversa uno schermo con due fori A, B distanti alcuni millimetri (A allineato con S e D). Se S e D sono a 1 m, il diametro dei fori deve essere inferiore a 1/10 di mm. Se si chiude alternativamente A o B, il numero di fotoni che arriva in D è circa lo stesso. Se sono aperti entrambi i fori si vede interferenza. Se si mettono in A o B rivelatori per vedere dove passa il fotone quando entrambi i fori sono aperti, si distrugge l'interferenza e la probabilità di trovare il fotone in D è la somma delle singole probabilità. Per calcolare correttamente la probabilità di un evento, si deve definire con chiarezza l'evento completo. In questo caso, ad esempio, volendo calcolare la probabilità che il fotone vada da S a D senza rivelatori in A e B, l'evento è solo lo scatto del rivelatore in D. Se invece si mettono rivelatori in A e B, ci sono due eventi completi: scattano i rivelatori in A e D; scattano i rivelatori in B e D. Per calcolare la probabilità che vi sia uno scatto nei rivelatori in A e D, si devono moltiplicare le ampiezze del passaggio del fotone da S a A e da A a D; analogamente per calcolare la probabilità che vi sia uno scatto in B e D.

4.2 TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

Poiché uno degli approcci didattici che andremo a esaminare si basa sulla quantizzazione dei campi, ci soffermiamo ora su alcuni sviluppi della meccanica quantistica.

4.2.1 L'equazione di Klein-Gordon e l'equazione di Dirac

Occorre anzitutto precisare che l'equazione di Schrödinger descrive particelle non relativistiche: l'hamiltoniana contenuta nell'equazione, infatti, è composta dall'energia classica. Per particelle relativistiche valgono altre equazioni, ad esempio l'equazione di Klein-Gordon, che descrive bosoni relativistici, e l'equazione di Dirac, che descrive fermioni relativistici.

Soffermiamoci brevemente sulle caratteristiche di queste equazioni (per i dettagli vedi [37]), riprendendo in esame, per analogia, l'equazione di Schrödinger. Questa può essere formalmente ricavata dalla relazione classica fra energia e impulso

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E$$

osservando che in meccanica quantistica energia e impulso diventano operatori:

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Sostituendo le grandezze con gli operatori, applicati a una funzione d'onda Ψ , si ottiene l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

L'equazione di Klein-Gordon può essere ottenuta in maniera analoga. Poiché si vuole un'equazione che rappresenti particelle relativistiche, si deve partire dalla relazione energia-impulso relativistica (per particelle libere, quindi senza potenziale)

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4,$$

che può essere scritta anche in termini del quadrivettore $p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$ come

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0.$$

Trasformiamo ora, *ut supra*, le grandezze in operatori, applicati a una funzione d'onda Ψ . Si ha

$$p_\mu = i\hbar \partial_\mu$$

dove si usa la notazione

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

cioè

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

La relazione energia-impulso diventa

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \Psi - m^2 c^2 \Psi = 0.$$

Schrödinger scoprì questa equazione anche prima di quella non relativistica che porta il suo nome, ma la mise da parte perché incompatibile con l'interpretazione statistica della funzione d'onda. La difficoltà interpretativa è da ricercarsi nel fatto che l'equazione di Klein-Gordon è del secondo ordine nel tempo. Dirac, pertanto, si dispose a ricercare un'equazione consistente con la relazione relativistica energia-impulso ma che fosse anche del primo ordine nel tempo. Nel 1934, intanto, Pauli e Weisskopf mostrarono che comunque l'interpretazione statistica non vale nella teoria quantistica relativistica (perché in tale teoria si deve tener conto di coppie di particelle che sono create e distrutte e quindi il numero di particelle non è una quantità conservata). Ripristinarono perciò l'equazione di Klein-Gordon e conservarono quella di Dirac per particelle con spin 1/2.

La strategia di Dirac fu quella di fattorizzare la relazione energia-impulso. Se ad esempio, per semplicità, si pone $\mathbf{p} = 0$, si può scrivere

$$(p^0)^2 - m^2 c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0.$$

Si ottengono quindi le due equazioni del primo ordine

$$p^0 + mc = 0 \tag{4.5}$$

$$p^0 - mc = 0. \tag{4.6}$$

Ma se $\mathbf{p} \neq 0$, occorre una fattorizzazione del tipo

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (\beta^\sigma p_\sigma + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc),$$

dove β^σ e γ^λ sono otto coefficienti da determinare.

Essendo

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = \beta^\sigma \gamma^\lambda p_\sigma p_\lambda - mc(\beta^\sigma - \gamma^\sigma) p_\sigma - m^2 c^2,$$

segue che, poiché non si vogliono termini lineari in p_σ , si deve porre $\beta^\sigma = \gamma^\sigma$.

Si devono trovare quindi coefficienti γ^λ tali che

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\sigma \gamma^\lambda p_\sigma p_\lambda. \quad (4.7)$$

Se si sviluppa quest'ultima, si vede che non è possibile eliminare i termini del tipo $\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i$. L'intuito di Dirac fu quello di ipotizzare che i coefficienti γ fossero matrici e non numeri. Poiché infatti le matrici non commutano, è possibile trovare un insieme di matrici γ che verificano la (4.7). Le relazioni di anticommutazione che le matrici γ devono verificare possono essere riassunte nella forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

dove $g^{\mu\nu}$ è la metrica di Minkovski

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si trova

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

dove σ^i sono le matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considerata quindi come equazione fra matrici 4×4 , la relazione relativistica energia-impulso può essere ora fattorizzata:

$$(\gamma^\sigma p_\sigma + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0.$$

Per ottenere l'equazione di Dirac, si prende uno dei due fattori. Per convenzione si sceglie:

$$\gamma^\lambda p_\lambda - mc = 0.$$

Passando ora agli operatori, si ottiene quella che va sotto il nome di equazione di Dirac:

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\Psi = 0.$$

In questa equazione, la funzione d'onda Ψ è ora una matrice del tipo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

detta *spinore* di Dirac. Anche se è un oggetto a quattro componenti, lo spinore non è un quadrivettore, perché non si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz.

Per trovare soluzioni semplici dell'equazione di Dirac, supponiamo Ψ indipendente dalla posizione. Si avrà quindi

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

quindi $\mathbf{p} = 0$. In questo caso l'equazione di Dirac diventa

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - mc\right)\Psi = 0$$

con soluzioni

$$\psi_A(t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\psi_A(0) \quad \psi_B(t) = e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t}\psi_B(0)$$

dove si è posto

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

In queste soluzioni si riconosce il fattore $e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$ che rappresenta la dipendenza temporale di uno stato quantico con energia E .

Per una particella a riposo si ha $E = mc^2$, quindi la soluzione ψ_A rappresenta proprio ciò che ci si aspetta, cioè uno stato con energia E . Ma occorre assegnare un significato anche a ψ_B : rappresenta infatti un insolito stato a energia negativa. Queste soluzioni a energia negativa furono interpretate come antiparticelle con energia positiva. Poiché ciascuna delle due funzioni ψ_A , ψ_B è uno spinore a due componenti, vi è in esse anche la rappresentazione dello spin. L'equazione di Dirac per $\mathbf{p} = 0$, pertanto, ammette le quattro soluzioni indipendenti

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi^{(3)} &= e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se invece si cercano soluzioni del tipo onda piana

$$\psi(x) = ae^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p}u(p)$$

anche in questo caso si trovano quattro soluzioni indipendenti $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ (di cui tralasciamo la descrizione), delle quali $u^{(1)}, u^{(2)}$ rappresentano particelle e $u^{(3)}, u^{(4)}$ antiparticelle. In $u^{(3)}, u^{(4)}$, però, E e \mathbf{p} , che sono parametri matematici che rappresentano fisicamente energia e quantità di moto, compaiono con segno negativo. Ma una particella non può avere energia negativa. Per interpretare correttamente queste due soluzioni come rappresentazione di antiparticelle con energia positiva, si cambia il segno di E e \mathbf{p} in $u^{(3)}, u^{(4)}$, e le nuove soluzioni prendono il nome di $v^{(1)}, v^{(2)}$.

4.2.2 La quantizzazione del campo (metodo non covariante)

Per seguire le idee che portano alla quantizzazione del campo (per i dettagli si rimanda a un testo specialistico, come [43]), si può partire dalla quantizzazione di un campo più familiare come quello elettromagnetico, con un metodo non covariante.⁴

Il campo elettromagnetico è descritto dalle equazioni di Maxwell, ad esempio nella forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (4.8b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.8c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.8d)$$

Si può dedurre l'esistenza di un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ e di un potenziale scalare $\phi(\mathbf{x}, t)$, definiti da

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.9b)$$

Queste relazioni non determinano univocamente i potenziali, perché le trasformazioni

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla f \quad (4.10b)$$

⁴La formulazione covariante è quella in cui le equazioni sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

per un'arbitraria funzione $f(\mathbf{x}, t)$, lasciano i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} invariati. Le (4.10) sono dette trasformazioni di *gauge*. Una teoria espressa in termini di potenziali deve essere invariante per trasformazioni di gauge.

Con il gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.11)$$

detto gauge di Coulomb o gauge di radiazione o trasverso, e in assenza di cariche e correnti, le equazioni di Maxwell si riducono alla

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} = 0. \quad (4.12)$$

In tali ipotesi, i vettori di campo diventano

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.13)$$

Le soluzioni della (4.12) sono onde elettromagnetiche trasverse nello spazio libero, dette anche campo di radiazione.

Per quantizzare la teoria, si sviluppa il potenziale vettore in serie di Fourier. Il campo sarà così descritto da un'infinità numerabile di coefficienti di Fourier $a_r(\mathbf{k}, t)$. Risulta che tali ampiezze di Fourier soddisfano equazioni di oscillatore armonico. Si considerano allora le ampiezze $a_r(\mathbf{k}, t)$ dei *modi normali* del campo di radiazione come operatori (tralascieremo nel seguito, per alleggerire la notazione, il segno di operatore) e si applicano a tali ampiezze le relazioni di commutazione tipiche dell'oscillatore armonico:

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0.$$

Il campo di radiazione, quindi, si considera come una sovrapposizione di oscillatori armonici indipendenti. In base alle proprietà dell'oscillatore armonico, anche l'hamiltoniana del campo può essere espressa in termini delle ampiezze. Si può inoltre definire l'operatore *numero* come

$$N_r(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

che ha autovalori interi positivi: gli stati del campo di radiazione sono quindi rappresentati da *numeri di occupazione* interi positivi. Sempre in base alle proprietà dell'oscillatore armonico, gli operatori $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ si interpretano come operatori di distruzione e creazione di quanti del campo, detti fotoni, ciascuno dei quali ha energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$.

4.2.3 Vantaggi della formulazione lagrangiana

Un altro metodo per la quantizzazione del campo è quello di partire dalle equazioni di Eulero-Lagrange (per approfondimenti cfr. appendice C). Come coordinate canoniche si scelgono i campi ϕ_r , quindi i momenti coniugati sono

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r},$$

dove \mathcal{L} è la densità di lagrangiana. Poiché però il sistema in esame ha infiniti gradi di libertà che variano con continuità, perché i campi ϕ_r sono funzioni del tempo in ogni punto \boldsymbol{x} dello spazio, si approssima inizialmente il sistema con un'infinità numerabile di gradi di libertà immaginando di chiuderlo in un reticolo costituito da cellette cubiche di volume V e poi si passerà al limite per $V \rightarrow 0$. Le coordinate canoniche e i momenti coniugati quindi inizialmente sono

$$\phi_r(i, t), \quad \pi_r(i, t).$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange si ricavano dunque le equazioni del moto dei campi, nonché l'hamiltoniana in funzione delle coordinate canoniche e dei momenti coniugati. Per la quantizzazione del campo, si impongono regole di commutazione sulle coordinate canoniche e poi si passa al limite per $V \rightarrow 0$.

La teoria del campo formulata a partire dalla densità di lagrangiana consente di dimostrare principi di conservazione. Vale infatti il teorema di Noether: dall'invarianza della densità di lagrangiana per trasformazioni di simmetria si deduce l'esistenza di quantità conservate. In particolare si ottengono equazioni di continuità del tipo

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

dove f^α sono funzioni degli operatori di campo e delle loro derivate. Il quadrivettore f^α è detto quadricorrente conservata.

Il formalismo della quantizzazione canonica porta direttamente a operatori di campo quantizzati. Se si sviluppano tali operatori di campo in serie di Fourier, si vede come i coefficienti di Fourier, che diventano operatori, soddisfino le stesse regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione. Si ritrova così l'interpretazione della teoria in termini di quanti del campo.

4.2.4 Quantizzazione del campo di Klein-Gordon

Consideriamo anzitutto particelle relativistiche con massa e senza spin, per le quali, come si è visto, vale l'equazione di Klein-Gordon. Tale equazione può essere ricavata anche da una densità di lagrangiana, perciò valgono le considerazioni fatte prima. In particolare, le particelle saranno descritte da un singolo campo reale, cioè da una funzione d'onda scalare $\phi(x)$. Nella quantizzazione, il campo diventa un operatore hermitiano ($\phi^\dagger = \phi$) che soddisfa regole di commutazione (a un tempo fissato t):

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)] = i\hbar c^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.14a)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (4.14b)$$

Per stabilire un collegamento con particelle, si sviluppa il campo $\phi(x)$ in serie di Fourier, che risulterà quindi espresso in termini di ampiezze $a(\mathbf{k})$. Dalle regole di commutazione sul campo, seguono le regole di commutazione

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (4.15a)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (4.15b)$$

che sono le solite regole di commutazione dell'oscillatore armonico. Segue quindi che si può introdurre l'operatore numero

$$N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$$

che ha autovalori interi positivi, e quindi gli operatori $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ si possono interpretare come operatori di distruzione e creazione di particelle con quantità di moto $\hbar\mathbf{k}$ e energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$.

Poiché i numeri di occupazione nel campo di Klein-Gordon reale sono interi positivi, le corrispondenti particelle sono bosoni, in particolare bosoni neutri. Si ottiene un risultato interessante se si considera ora un campo di Klein-Gordon complesso: anch'esso può essere ricavato da una densità di lagrangiana, ma si può dimostrare che dall'invarianza della densità di lagrangiana per trasformazioni del tipo

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x),$$

dette trasformazioni di fase globale, segue, per il teorema di Noether, l'esistenza di quantità conservate. In particolare si dimostra che esiste una quantità conservata

$$Q = -\frac{iq}{\hbar c^2} \int d^3\mathbf{x} N[\dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x) - \dot{\phi}(x)\phi^\dagger(x)]$$

dove la costante q può essere interpretata come carica della particella rappresentata dal campo in questione. Tale quantità può essere scritta in termini dell'operatore numero:

$$Q = q \sum_{bmk} [N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})].$$

Segue quindi che si deve associare carica $(+q)$ e $(-q)$ rispettivamente a particelle di tipo a e di tipo b . Il campo di Klein-Gordon quindi porta alla descrizione di particelle e antiparticelle. Al di fuori del segno, le particelle di tipo a e di tipo b hanno proprietà identiche: la teoria è quindi simmetrica per scambio dei due tipi di particelle. Questo vale non solo per i bosoni a spin zero ma in generale. Occorre sottolineare inoltre che il manifestarsi di antiparticelle è una caratteristica della teoria del campo quantistico relativistico. Si vede, quindi, che ϕ_r distrugge particelle di carica $(+q)$ o crea particelle di carica $(-q)$ e ϕ_r^\dagger distrugge particelle di carica $(-q)$ o crea particelle di carica $(+q)$. Quindi campi complessi (non hermitiani) rappresentano particelle cariche, mentre campi reali (hermitiani) rappresentano particelle senza carica.

La conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare seguono dall'invarianza della densità di lagrangiana per traslazioni e rotazioni.

Ora, mentre le equazioni del moto dei campi ottenute col formalismo lagrangiano sono necessariamente covarianti, quando si giunge a quantizzare il campo con le relazioni di commutazione si perde la covarianza perché tali relazioni sono fissate a tempi uguali. Come passaggio successivo, occorre dunque ottenere relazioni di commutazione covarianti. Per il campo di Klein-Gordon, in particolare, si può dimostrare che per due punti arbitrari x, y dello spazio-tempo si ha

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{per} \quad (x - y)^2 < 0$$

ovvero misure di campi compiute in due punti, separati da un intervallo di tipo spazio, non interferiscono fra loro. Del resto, per tali intervalli, comunque piccoli, per aversi interferenza un segnale dovrebbe viaggiare con velocità superiore a quella della luce. Questo risultato è noto come *microcausalità*.

4.2.5 Quantizzazione del campo di Dirac

Il formalismo della quantizzazione canonica porta ai bosoni. Per descrivere particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac col metodo dell'oscillatore armonico, è possibile intervenire con una modifica del metodo.

Tale modifica è stata introdotta nel 1928 da Jordan e Wigner e consiste nel sostituire le regole di commutazione con regole di anticommutazione. Se infatti si ipotizzano relazioni di anticommutazione del tipo

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs} \quad (4.16a)$$

$$\{a_r, a_s\} = \delta_{rs} \quad (4.16b)$$

si può dimostrare che gli operatori a_r, a_r^\dagger, N_r si possono ancora interpretare come operatori di distruzione, di creazione e numero, ma che l'operatore N_r ha ora solamente gli autovalori 0 e 1. Questo risultato consente di utilizzare il metodo per rappresentare fermioni.

Si può applicare pertanto il metodo precedentemente visto per l'equazione di Klein-Gordon. Si può anzitutto derivare l'equazione di Dirac da una densità di lagrangiana, e, osservando che questa è invariante per trasformazioni di fase globale, si può dimostrare l'esistenza di una carica conservata e di una quadricorrente. Per quantizzare il campo di Dirac, lo si sviluppa in serie di Fourier e si impongono regole di anticommutazione sui coefficienti dello sviluppo. In particolare, si sviluppa il campo di Dirac in un insieme completo di onde piane del tipo

$$\psi(x) = \sum_{r\mathbf{p}} \sqrt{\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}}} [c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-\frac{i}{\hbar}p x} + d_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}p x}]$$

e analogamente per $\bar{\psi}$. Si impongono le regole di anticommutazione

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

(tutti gli altri anticommutatori sono nulli). Si possono quindi definire gli operatori numero

$$N_r(\mathbf{p}) = c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_r(\mathbf{p}) \quad (4.17)$$

$$\bar{N}_r(\mathbf{p}) = d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p}) \quad (4.18)$$

Dalle regole di anticommutazione segue l'interpretazione dei vari operatori come operatori di creazione, distruzione e numero di due tipi di particelle che sono fermioni. Per ottenere le proprietà fisiche delle particelle associate agli operatori c e d , si esprimono in funzione di essi le costanti del moto.

Interpretazione della meccanica quantistica

5.1 PERCHÉ È IMPORTANTE L'INTERPRETAZIONE DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Nella descrizione di alcune formulazioni della meccanica quantistica ci siamo soffermati esclusivamente sui concetti fisici, sulla loro genesi storica e sulla forma matematica che hanno assunto, senza entrare nel merito della “stranezza” che tali concetti hanno subito manifestato rispetto alla fisica precedente. Esaminiamo ora questo aspetto della meccanica quantistica, cioè le perplessità che questa teoria ha generato, anzitutto negli scienziati stessi, dovute alla sua novità rispetto alla fisica classica. L'indeterminismo, la distanza dal senso comune, l'astrattezza degli strumenti matematici che si sono resi necessari hanno fin da subito fatto nascere, anche presso i padri della meccanica quantistica, la necessità di costruire un'interpretazione della teoria. Di un'interpretazione della meccanica quantistica, anche noi, che ci occupiamo di stabilire se essa possa essere insegnata, dobbiamo tenere conto. Gli aspetti citati, quelli che hanno indotto gli autori a formulare interpretazioni, sono gli stessi che si ripresentano oggi come ostacoli epistemologici agli studenti e agli insegnanti che costituiscono un sistema didattico intorno a questo sapere della fisica moderna. Ci occupiamo ora, pertanto, dei problemi principali che hanno condotto a formulare interpretazioni e delle principali risposte che sono state fornite, per trarne alcune idee fondamentali da tenere presenti quando si progetta una trasposizione didattica dell'argomento. Nel seguito ci riferiremo spesso a un recente libro [53] che fornisce un utile e aggiornato quadro della situazione riguardo all'interpretazione della meccanica quantistica.

Un primo problema che porta a comprendere la necessità di un'interpretazione è quello della misura. Si è visto che in meccanica quantistica è fondamentale il ruolo della misura, ma che tale operazione si presenta però diversamente rispetto alla fisica classica: prima della misura di un'os-

servabile, lo stato fisico è in una sovrapposizione di autostati; quando si esegue la misura, il sistema *collassa* in uno degli autostati dell'osservabile. La misura, quindi, modifica lo stato del sistema e produce il *collasso* (detto anche *riduzione*) della funzione d'onda. Se da un punto di vista fisico ci possiamo limitare a prendere atto di questo fatto e accettarlo come caratteristico della teoria, visto che è un modello cui le osservazioni sperimentali ben si adattano, gli stessi padri fondatori della nuova teoria si sono posti un problema: che cosa accade veramente in una misura? L'operazione di misura può essere trattata a partire dai principi primi della teoria, ma così facendo sorge un'importante complicazione, evidenziata [53, p. 72] da Von Neumann:¹ una misura coinvolge apparati macroscopici, costituiti da un gran numero di atomi. Poiché i fenomeni da osservare (almeno nell'ambito della meccanica quantistica) sono microscopici, l'apparato deve essere "amplificato" in maniera tale da raggiungere la scala del fenomeno da osservare. Sebbene l'apparato, macroscopicamente, obbedisca alle leggi della fisica classica, essendo fatto di atomi, descritti invece dalla meccanica quantistica, si può dire che il suo comportamento classico è solo apparente, e che la misura avviene con l'interazione di due sistemi quantistici. Se si applicano i principi quantistici al processo di misura inteso come interazione fra due sistemi quantistici, si trova un risultato sorprendente: l'apparato, dopo la misura, si troverebbe in una sovrapposizione di stati macroscopicamente distinti, ovvero si dovrebbero osservare, nell'apparato, fenomeni di interferenza come quelli che si osservano, ad esempio, per particelle che attraversano la doppia fenditura.

Prendiamo spunto da questo problema per descrivere una prima interpretazione della meccanica quantistica, quella nota come *interpretazione di Copenhagen*.

5.2 L'INTERPRETAZIONE DI COPENHAGEN

Si intende come interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica [53, p. 81] il risultato delle riflessioni di Bohr con i suoi collaboratori al Copenhagen Institute. Bohr si pronunciò in convegni e articoli, ma non pubblicò mai un'esposizione sistematica dell'interpretazione della meccanica quantistica. Non esiste, tra l'altro, un'unica interpretazione di Copenhagen ma diverse sue versioni più o meno complete, presentate da collaboratori e seguaci di Bohr nei loro articoli o trattati.

La scuola di Copenhagen, per rimuovere la difficoltà di ammettere nell'apparato di misura fenomeni quantistici di interferenza che nella realtà

¹J. von Neumann, in *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Springer, 1932.

non si vedono, rinuncia ad assegnare allo strumento di misura un carattere quantistico, e in quanto oggetto macroscopico lo considera soggetto solo alla fisica classica. Secondo Heisenberg, il mondo fisico può essere separato in due parti: l'oggetto osservato e il sistema che osserva, il primo descritto in maniera quantistica, il secondo in maniera classica. Dove sta la frontiera tra osservatore e osservato? Heisenberg lascia la decisione alla libera scelta. Bohr invece afferma che non vi è frontiera e che un'esperimento deve essere considerato come un'entità indivisibile.

Si stabiliscono poi delle regole pratiche per l'uso dei risultati sperimentali. Anzitutto se si ripete una misura subito dopo aver eseguito una misura per un'osservabile, si deve ritrovare lo stesso risultato. Ciò vuol dire che se dopo la prima misura lo stato del sistema è un autostato per l'osservabile misurata, dovrà essere tale anche dopo la seconda misura. Inoltre, se dopo la misura di un'osservabile A si esegue una misura di una seconda osservabile B , il fatto di avere eseguito la prima misura ha prodotto la cosiddetta riduzione, o collasso, della funzione d'onda. Si ottiene cioè una funzione d'onda in cui, come si è detto, scompaiono gli effetti di sovrapposizione dei differenti stati quantistici dell'apparato. Il problema sta nel fatto che la riduzione della funzione d'onda non è conseguenza della teoria, ma una sorta di considerazione pratica: è ciò che ci si aspetta quando si ha un'interazione fisica fra l'oggetto misurato e l'apparato di misura.

La riduzione della funzione d'onda è un fenomeno probabilistico, ma anche se il suo meccanismo, come si è detto, si spiega al di fuori della teoria, la sua probabilità è definita dalla teoria. Le probabilità della teoria quantistica non dipendono da un'ignoranza dell'osservatore o del teorico, ma sono una caratteristica intrinseca della natura o, in altri termini, della relazione fra la realtà e la sua descrizione matematica della teoria.

Un'altra idea importante dell'interpretazione di Copenhagen è la complementarità, introdotta da Bohr, che consiste nell'ammissione di concetti che sono mutuamente esclusivi ma necessari per una piena comprensione di tutti gli esperimenti (come nel caso noto come *dualismo onda-particella*). Il concetto di complementarità è strettamente legato a quello di verità. Heisenberg pone l'accento sul fatto che, dovendosi descrivere fenomeni, questi sono i soli elementi di verità a nostra disposizione. Affermare che qualcosa si sta manifestando o verificando, non ha significato se non vi è modo di descrivere il fenomeno. Non si può ad esempio affermare alcunché di un atomo, fra il momento in cui è preparato per una misura e il momento in cui si esegue la misura. Nel mondo classico questo è invece legittimo: se chiudiamo un libro in una stanza, siamo certi di ritrovarlo lì. Questa considerazione non può essere applicata all'atomo: se lo chiudiamo in una stanza, lo ritroveremo lì? Heisenberg afferma che non ha senso porsi la

questione: possiamo dire qualcosa solo nel momento in cui lo misuriamo.

L'interpretazione di Copenhagen lascia insoluti alcuni quesiti. Ad esempio, quanto grande deve essere un oggetto per essere considerato classico piuttosto che quantistico? Oppure, che cosa accade in prossimità della transizione fra il dominio quantistico e quello classico? Da quali leggi fisiche è descritta questa transizione? Un esempio di difficoltà interpretativa è fornito da Schrödinger.² Un gatto è chiuso in una scatola contenente una sorgente radioattiva. Un apparato può essere attivato da un decadimento radioattivo per mandare cianuro all'interno della scatola. Poiché la sorgente radioattiva è in ogni istante in una sovrapposizione di stati decaduto e non decaduto, anche il gatto è in ogni istante in una sovrapposizione di stati vivo e morto. Quando l'osservatore apre la scatola, secondo l'interpretazione di Copenhagen si ha l'istantaneo collasso della funzione d'onda, e solo allora il gatto sarà vivo o morto. Prima dell'osservazione il gatto non è vivo né morto, o è in parte sia vivo che morto.

In effetti, le più importanti critiche (dal punto di vista fisico e non filosofico) che nel corso della storia sono state avanzate alla visione di Copenhagen sono di due tipi. Una prima critica è rivolta alla consistenza logica della teoria, per il fatto che si tratta l'apparato in maniera classica e il sistema da osservare in maniera quantistica: sembra che si adotti una visione classica o quantistica a seconda della convenienza. Una seconda critica è avanzata al fatto che la teoria spiega bene i fenomeni sulla base dell'equazione di Schrödinger ma che tale equazione non funziona più bene se la si applica all'atto della misura. Ora, criticare l'interpretazione non vuol dire puntare il dito sull'eredità insoddisfacente dei grandi padri della meccanica quantistica [53]. Si può pensare invece che la scuola di Copenhagen ci abbia lasciato una visione e un programma: formulare l'interpretazione della meccanica quantistica in maniera sufficientemente chiara e deduttiva da apparire come una teoria consistente.

5.3 UN APPROCCIO LOGICO ALLA MECCANICA QUANTISTICA

Per molto tempo si è pensato che le difficoltà nell'interpretazione della meccanica quantistica non fossero accessibili alla teoria e che si trattasse piuttosto di problemi di carattere filosofico e epistemologico. Non tutti però la pensavano così: Einstein e Schrödinger ad esempio ritenevano che la meccanica quantistica fosse una teoria incompleta e Dirac credeva che i problemi evidenziati alla fine avrebbero trovato una soluzione teorica ma che ancora i tempi non fossero maturi.

²E. Schrödinger, in *Naturwissenschaften*, 3, 807 (1935).

Il problema dell'interpretazione di una teoria scientifica è diventato importante con la nascita della meccanica quantistica. Prima di allora non se ne era sentita l'esigenza, perché il linguaggio e la matematica consentivano di formulare modelli che ben si adattavano ai fatti osservati. Con l'avvento della meccanica quantistica divenne importante stabilire se e come la scienza si può allontanare dal senso comune. Fino a quando, infatti, la scienza poteva essere espressa nel linguaggio del senso comune, non era necessaria alcuna interpretazione. Se ne avverte la necessità quando, volendo rimanere nei limiti del senso comune, non si trovano strumenti pedagogici per esprimere i concetti di base della teoria, cioè quando la semplificazione diventa tradimento [53, p. 98]. Secondo Omnès [*ibidem*], per fornire una corretta interpretazione della teoria non si deve cercare di esprimere la scienza nei termini del linguaggio del senso comune, ma seguire la strada opposta: riformulare le categorie di pensiero che appartengono al senso comune, e che si usano per descrivere esperimenti, nel linguaggio concettuale della teoria. È un passaggio difficile, perché si tratta di riconciliare il carattere probabilistico della teoria con la certezza dei fatti. Da un punto di vista fisico, Omnès individua, come criteri per una buona interpretazione, la consistenza (cioè l'assenza di contraddizioni interne) e la completezza (cioè la capacità di fornire previsioni esplicite per qualsiasi esperimento).

Per costruire un'interpretazione consistente e completa si deve partire dalle basi della teoria, cioè dall'introduzione di uno spazio di Hilbert e dall'equazione di Schrödinger. Le quantità fisiche sono dette osservabili: sono essenzialmente concetti fisici che possono essere rappresentati da numeri. Più esattamente, in meccanica quantistica a ogni osservabile è associato un operatore autoaggiunto dello spazio di Hilbert. Nell'approccio logico è importante il concetto di *proprietà*, cioè un enunciato del tipo "il valore di una data osservabile A appartiene a un insieme D di numeri reali". Il concetto è molto simile a quello di risultato di una misura, ma consente di evitare di parlare di misura. Ciò infatti presupporrebbe sapere che cosa è uno strumento e che cosa può misurare. Lo strumento, infatti, nonostante l'evidenza della fisica sperimentale, è un sistema fisico, e come tale deve obbedire alla meccanica quantistica, ma in generale è un sistema molto complicato. Perciò nella costruzione dell'interpretazione è meglio considerare le *proprietà*, che sono solo assunzioni formali di carattere logico.

Il carattere probabilistico della teoria non fa parte dei principi primi, ma appartiene all'interpretazione, e quindi deve essere spiegato dai principi stessi. Le probabilità, in particolare, non sono da intendersi necessariamente come quantità empiriche, ma, da un punto di vista matematico, come "peso" da assegnare a una certa proprietà. Si deve quindi definire formalmente lo stato di un sistema come dato che consente di attribuire una probabilità

a ogni proprietà. Un passo successivo è quello di ipotizzare che i termini contenuti in un enunciato di una proprietà abbiano un senso, e per questo è necessario introdurre il concetto di “storie” di un sistema quantistico. Una *storia*³ è una successione di differenti proprietà che si manifestano in diversi istanti. Il linguaggio della fisica sperimentale, quindi, deve giungere a comprendere e definire logicamente il possibile verificarsi delle varie storie. Si dicono *consistenti* quelle storie cui può essere assegnata una probabilità. L’uso di una famiglia consistente di storie consente di includere gli enunciati della meccanica quantistica in un quadro logico.

Nella presente interpretazione si può vedere che la logica ha un ruolo fondamentale. La logica quantistica è però più complessa della logica su cui poggia la fisica classica. Poiché infatti dalla non commutatività segue la complementarità, in meccanica quantistica diverse logiche possono descrivere lo stesso sistema.

5.4 LA DECOERENZA E IL PROBLEMA DELLA MISURA

Si è visto che una difficoltà per l’interpretazione della meccanica quantistica è la sovrapposizione lineare di differenti stati macroscopici in una misura quantistica. Il problema è risolto, nell’interpretazione logica dalla teoria, col meccanismo della *decoerenza* [53, p. 268]. Per descriverlo, consideriamo un oggetto macroscopico come costituito da due sistemi dinamici, uno descritto da coordinate collettive e l’altro da coordinate microscopiche. Chiamiamo questi due sistemi rispettivamente *sistema collettivo* e *sistema ambiente*. Quest’ultimo termine può trarre in inganno: non è l’ambiente esterno, ma una proprietà dell’oggetto, ad esempio la materia di cui è costituito. In genere il sistema collettivo e l’ambiente si considerano disaccoppiati e l’hamiltoniana totale si intende data da

$$H = H_c + H_e,$$

dove H_c dipende solo dalle coordinate collettive e H_e solo dalle coordinate microscopiche. Il valor medio di H_c è l’energia meccanica, il valor medio di H_e è l’energia interna. L’assenza di accoppiamento fra i due sistemi implica che non vi è scambio fra i due tipi di energia. Ma nella realtà i due sistemi sono accoppiati, e l’hamiltoniana reale è data da

$$H = H_c + H_e + H_i,$$

³Il concetto di “storie consistenti” si trova in R.B. Griffiths, J. Stat. Phys. 36, 219 (1984); Am. J. Phys. 55, 1 (1987).

dove l'hamiltoniana di interazione H_i produce un trasferimento di energia fra i due sistemi, quindi una dissipazione termica. Nella fisica classica, ad esempio, questo accoppiamento consente di spiegare l'attrito. Si può anche dimostrare che tale accoppiamento ha anche un effetto, chiamato decoerenza, su una sovrapposizione di due stati macroscopici differenti: si distrugge l'interferenza a livello macroscopico. In particolare, anche se le funzioni d'onda dell'ambiente per due stati macroscopicamente differenti sono coerenti,⁴ esse diventano ortogonali a causa del loro accoppiamento con differenti valori delle osservabili macroscopiche collettive. La decoerenza è un fenomeno difficile da osservare sperimentalmente, perché si verifica troppo rapidamente: è praticamente impossibile osservare interferenze in oggetti macroscopici, tranne in sistemi superconduttori opportunamente predisposti. Tali sistemi sono caratterizzati proprio da assenza di dissipazione.

La motivazione teorica della decoerenza è da ricercarsi nel fatto che un oggetto macroscopico vive in uno spazio di Hilbert molto grande e possiede uno spettro energetico molto "fitto". La vicinanza dei livelli energetici ha per conseguenza un'estrema sensibilità alle perturbazioni, da cui derivano funzioni d'onda molto complicate. Infatti il cambiamento in una funzione d'onda dovuto a una perturbazione, anche piccola, dipende (secondo la teoria delle perturbazioni) dalla differenza fra le energie non perturbate, che compare al denominatore di una frazione. L'effetto di una perturbazione è quindi amplificato. Due perturbazioni anche di poco differenti danno origine a funzioni d'onda perturbate in maniera molto differente. Tali funzioni d'onda risultano ortogonali per il loro gran numero di variabili.

In [53, p. 271] troviamo come esempio quello dei gradi di libertà collettivi di un oggetto macroscopico che possiamo considerare completamente classico, come un orologio meccanico: se anche è fatto di atomi (quantistici), assumiamo che il meccanismo si comporti classicamente. Poiché vi è accoppiamento fra il meccanismo e lo stato quantico degli atomi interni, vi è scambio di energia e quindi attrito e dissipazione. Dal punto di vista degli atomi che costituiscono l'orologio, il moto del meccanismo è una perturbazione e, a causa dell'alta densità dei suoi autostati dell'energia, la sua funzione d'onda globale sarà estremamente sensibile a un cambiamento, anche minimo, del meccanismo. In particolare, se l'orologio parte da due stati che corrispondono a una molla diversamente arrotolata, anche se di poco, le funzioni d'onda dei corrispondenti atomi nei due casi saranno fra loro molto diverse. Ora, se anche inizialmente le due funzioni d'onda erano coerenti, dopo la perturbazione non lo saranno più, quindi non potranno

⁴La coerenza è una condizione per l'interferenza.

interferire. Possiamo intendere quindi la decoerenza come una tendenza delle funzioni d'onda dell'ambiente a perdere la correlazione di fase iniziale quando sono accoppiate con due differenti stati di moto collettivi. Questa perdita di correlazione di fase fa in modo che tali funzioni d'onda diventino rapidamente ortogonali. In maniera molto semplificata, si può dire che lo spazio di Hilbert è così grande che, presi in esso due stati a caso, è molto difficile non trovarli ortogonali.

L'approccio logico e il meccanismo della decoerenza consentono di dedurre una teoria della misura dai principi primi [53, p. 489]. Per quanto riguarda la singola misura, occorre distinguere fra ciò che è mostrato da un apparato, il dato (proprietà classica), dal risultato di un esperimento, proprietà quantistica. Una misura, infatti, è un'interazione fra due sistemi fisici, un sistema da misurare, che può essere microscopico o macroscopico, e l'apparato di misura, che è necessariamente macroscopico. Questo può mostrare diversi fenomeni che sono i *dati* che si manifestano al termine di un esperimento. La distinzione classica dei dati come eventi distinti è il risultato della decoerenza. L'interazione fra i due sistemi avviene fra due istanti t e $t + \Delta t$. Un'osservabile A associata al sistema da misurare ha un ruolo privilegiato nell'interazione. Le proprietà rilevanti del sistema sono descritte da certi operatori dello spazio di Hilbert, detti proiettori, che rilevano che il valore di A è in un certo intervallo reale (il risultato dell'esperimento). A questo punto i teoremi (la descrizione dei quali qui omettiamo, per approfondimenti vedi [53]) consentono di dimostrare l'equivalenza logica fra dato e risultato, nel caso della singola misura, e il collasso della funzione d'onda, nel caso delle misure successive. Uno dei problemi da risolvere è però l'esistenza di un dato come fatto unico e attuale contro i vari possibili esiti previsti dalla teoria. È il problema, in altri termini, dell'opposizione fra fatti e fenomeni, o fra teoria e realtà. L'interpretazione logica della meccanica quantistica non è del tutto contraria all'unicità dei fatti, solo non prevede che tale unicità sia sempre valida. In particolare, se ad esempio si presenta in un certo istante un unico fatto in luogo di una serie di possibili fenomeni, segue che anche il passato doveva essere unico, ma il futuro resta sempre potenziale. La teoria non offre dunque una spiegazione del perché si verifichi un unico fatto e, anzi, è lecito a questo punto chiedersi se sia un problema di fisica o di filosofia. Vedremo più avanti alcune risposte fornite al problema dell'unicità della realtà.

5.5 IL PARADOSSO DI EINSTEIN, PODOLSKY E ROSEN

Alla meccanica quantistica, come era stata fondata tra gli altri da Bohr e Heisenberg, Einstein riconosceva un grande contenuto di verità, ma egli

riteneva che fosse necessario fornire ulteriori precisazioni riguardo alla spiegazione dell'esistenza dei fatti. Poiché dalla meccanica quantistica non derivavano contraddizioni sperimentali, la sola possibilità era quella di trovare una contraddizione nella teoria stessa. Questa è l'idea di fondo di un articolo [22] in cui, insieme con Podolsky e Rosen, Einstein descrive un esperimento ideale per sostenere l'ipotesi che la meccanica quantistica non è una teoria completa.⁵ Nell'articolo gli autori affermano che la realtà oggettiva è indipendente da ogni teoria, pertanto ogni seria discussione di una teoria fisica deve tenere conto della descrizione della realtà fornita dalla teoria e anche dei concetti con cui la teoria opera. Essi asseriscono che se, senza perturbare un sistema fisico, si può prevedere con certezza il valore di una quantità fisica, allora deve esistere un elemento di realtà corrispondente a quella quantità. In questo senso, ad esempio, la maggior parte dei concetti di cui si fa uso in fisica classica sono associati a un elemento di realtà, perché possono, in linea di principio, essere noti osservando attentamente il sistema o possono essere misurati senza perturbare il sistema. Posto che esistono elementi di realtà, gli autori definiscono *completa* una teoria in cui ogni elemento di realtà ha una controparte. Essi forniscono un esempio di elemento di realtà che non è un fenomeno classico: prendono in considerazione una particella descritta quantisticamente dalla funzione d'onda (in una dimensione)

$$\psi = e^{ip_0x/\hbar}.$$

In questo caso la quantità di moto è un elemento di realtà, poiché il suo valore è p_0 con probabilità 1 ed è noto senza perturbare il sistema con una misura. Al contrario la posizione della particella può essere conosciuta solo con l'aiuto di una misura che perturberà lo stato del sistema, quindi non è un elemento di realtà.

Come altro esempio, considerano due particelle, rispettivamente con posizione e quantità di moto (X_1, P_1) e (X_2, P_2) , di cui si misurano simultaneamente P_1 e X_2 . Secondo l'interpretazione di Copenhagen, avviene la riduzione del pacchetto d'onda quando la misura di P_1 fornisce il risultato p_1 , e si ottiene la funzione d'onda

$$\phi(x_1, x_2) = e^{ip_1x_1/\hbar} e^{ip_1x_2/\hbar}.$$

Questa è un'autofunzione dell'operatore $p_2 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2}$ con autovalore p_1 . Perciò, in base alla loro definizione di elemento di realtà, gli autori possono affermare che il valore di P_2 deve essere p_1 , perché è noto con probabilità

⁵In questo caso per "completezza" non si intende la capacità della teoria di fornire previsioni per qualsiasi esperimento. La definizione di teoria "completa" è fornita da Einstein, Podolsky e Rosen nell'articolo.

1 senza perturbare la particella 2. D'altra parte la meccanica quantistica ci dice che X_2 e P_2 sono osservabili incompatibili: per il principio di indeterminazione, se conosciamo con certezza X_2 non possiamo conoscere P_2 . Esiste quindi un elemento di realtà che non ha controparte nella teoria: la meccanica quantistica è incompleta.

L'esperimento descritto nell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen può essere formulato in maniere alternative. Lo troviamo ad esempio illustrato da Bell in [19], nei saggi dal titolo *Sul paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen e Gli esperimenti Einstein-Podolsky-Rosen*. Una versione di Bohm, importante perché può essere verificata sperimentalmente, è del 1951.⁶ Consideriamo [71] una particella a spin zero a riposo che decade in due particelle a spin $1/2$. Per la conservazione della quantità di moto, le due particelle emesse devono muoversi in direzioni opposte. Per la conservazione del momento angolare, lo stato di spin del sistema deve essere $|0, 0\rangle$, ipotizzando che il momento magnetico orbitale relativo sia zero. Due sperimentatori A e B vogliono misurare lo spin delle singole particelle, che chiamiamo 1 e 2. Supponiamo che la direzione del moto delle due particelle sia l'asse y . Se A e B decidono ad esempio di misurare S_z e A ottiene $\frac{\hbar}{2}$, B deve ottenere $-\frac{\hbar}{2}$. Poiché lo stato $|0, 0\rangle$ può essere espresso in termini degli stati di base $|+z, -z\rangle$ e $|-z, +z\rangle$ come

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+z, -z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-z, +z\rangle,$$

vi è il 50 per cento di probabilità di trovare tale situazione. Ora, se A misura per primo, la misura di A ha istantaneamente determinato il valore della misura di B anche se le due particelle non interagiscono e A e B possono essere separate da anni luce. Gli osservatori possono decidere di misurare S_x e troveranno che i risultati della misura sono ancora completamente correlati. Occorre osservare che le particelle non possono avere valori contemporaneamente determinati di S_x e S_z . Questo caso è un esempio del fenomeno quantistico dell'*entanglement*, in cui lo stato di un sistema costituito a sua volta da più sistemi dipende da tali sottosistemi anche quando questi sono spazialmente separati.

Questa conseguenza non piaceva ad Einstein: egli non gradiva il fatto che una singola particella può essere in uno stato in cui essa non ha un attributo ben definito (spin o posizione) prima che si compia una misura, perché ciò vorrebbe dire che le proprietà fisiche non hanno realtà oggettiva indipendente dal fatto che vengano o meno osservate. Secondo Einstein vi era una spiegazione più ragionevole. Sebbene i risultati delle misure condotte su una singola particella siano in accordo con la meccanica quantistica,

⁶D. Bohm, in *Quantum Theory*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1951.

essi non implicano che una particolare particella non abbia un attributo ben preciso prima che sia fatta la misura. Verificare le previsioni della meccanica quantistica richiede misure su un insieme di particelle, ciascuna delle quali si presume sia nello stesso stato. Dunque Einstein ipotizzava che il 50 per cento delle particelle nello stato $|+x\rangle$ ha $S_z = \frac{\hbar}{2}$ e il 50 per cento ha $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ ma che noi non siamo in grado di distinguere tra questi due tipi di particelle, come se l'attributo che ci consentirebbe di distinguerle ci fosse nascosto. Da qui prende il nome la *teoria a variabili nascoste* della meccanica quantistica. Per mostrare quanto fosse insoddisfacente l'interpretazione convenzionale della meccanica quantistica, Einstein, Podolsky e Rosen hanno proposto l'esperimento ideale qui descritto. Poiché tale interpretazione è completamente in disaccordo con ciò che Einstein definiva "ragionevole definizione della natura di realtà", che include il principio di località, cioè che la situazione del sistema 1 è indipendente da ciò che si compie sul sistema 2 che è spazialmente separato dal sistema 1, il contenuto dell'articolo del 1935 di Einstein, Podolsky e Rosen in cui si tratta questo argomento è chiamato paradosso EPR.

Il paradosso trova una spiegazione nell'interpretazione logica della meccanica quantistica [53]: si deve riconoscere che gli elementi di realtà rappresentano solo proprietà "attendibili" (*reliable*) ma non vere. In altri termini si tratta di proprietà arbitrarie, che dipendono dalla scelta di una particolare logica.

Un altro aspetto paradossale dell'esperimento EPR è il problema della non località o non separabilità della meccanica quantistica. Con *non località* si intende il fatto che lo stato di spin della particella 2 diventa istantaneamente un elemento conoscibile di realtà quando si misura una componente di spin della particella 1 e che questa connessione avviene a qualunque distanza si trovino le due particelle. Con *non separabilità* si intende lo stesso fatto ma con l'attenzione all'impossibilità di considerare una particella indipendentemente dall'altra per il fatto che sono correlate da un evento comune nel passato. Questa limitazione all'indipendenza della particella implica che essa non contiene in se la propria realtà ma è inseparabile da ciò che esiste al di fuori, per quanto lontano sia.

In [53, p. 399] troviamo la definizione di separabilità fornita da d'Espagnat:⁷: nell'ipotesi che un sistema fisico rimanga per un certo tempo meccanicamente isolato da altri sistemi, l'evoluzione delle sue proprietà in quell'intervallo di tempo non possono essere influenzate da operazioni compiute su altri sistemi. L'esperimento EPR implica in questo senso che la

⁷B. d'Espagnat, in *Conceptual Foundation of Quantum Mechanics*, Reading, Mass., Benjamin, 1976.

meccanica quantistica è non separabile. Ma [*ibidem*] occorrerebbe chiarire che cosa si intende per “proprietà” e cosa vuol dire “influenzare”. Se con “proprietà” si intende, secondo il concetto già visto, l’enunciato “il valore di un’osservabile A appartiene a un insieme D ”, le proprietà possono essere ricondotte a pochi tipi: alcune sono associate a una certa probabilità; alcune sono accettabili, cioè sono conseguenza di un fatto noto ma sono generate dalla libertà di espressione e non si adattano universalmente ai fatti; altre proprietà sono vere, cioè si adattano perfettamente ai fatti. Secondo Omnès, se ci si limita alle proprietà vere, quelle di un sistema momentaneamente isolato non sono sensibili a un’interazione che si verifica in un altro sistema. Relativamente alle proprietà vere, pertanto, la meccanica quantistica è separabile.

5.6 LE VARIABILI NASCOSTE

Le perplessità di Einstein, Schrödinger e de Broglie derivavano principalmente dal rifiuto di accettare l’esistenza di probabilità intrinseche o, in altri termini, l’esistenza di un’assoluta casualità in fisica. La visione delle teorie a variabili nascoste è quella di motivare questa casualità con la nostra ignoranza: le cause sarebbero a noi inaccessibili ma comunque reali. Ciò equivale a ripristinare la versione classica del calcolo delle probabilità, ove si assumeva che le proprietà di un sistema fisico esistono e sono ben definite ma in qualche modo non conoscibili. In queste teorie si assume che una particella sia realmente una particella: essa in ogni istante ha posizione e velocità ben definite, sebbene non determinabili nella pratica, potendosi determinare solo le loro distribuzioni statistiche. Tali distribuzioni sono correttamente descritte dalla meccanica quantistica, in virtù delle sue numerose conferme sperimentali. La meccanica quantistica, dunque, è una teoria essenzialmente corretta, almeno come strumento di calcolo, ma non rappresenta bene una realtà che è nascosta, che rimane incompleta. I parametri nascosti sono la motivazione per cui un apparato di misura fornisce un risultato piuttosto che un altro. Una versione di teoria a variabili nascoste è dovuta a Bohm e appartiene alla categoria di teorie introdotta da de Broglie e nota come teoria delle onde pilota. Secondo Bell, la teoria di Bohm è molto importante perché introduce, nella meccanica quantistica non relativistica, parametri che consentono di ottenere una descrizione deterministica e inoltre permette di eliminare la soggettività dell’interpretazione ortodossa, cioè il riferimento all’osservatore [19, p. 212].

Per esemplificare la teoria di Bohm,⁸ esaminiamo il caso di una particella singola sotto l’azione di un potenziale esterno [53, p. 401]. La particella

⁸Cfr. nota 6.

è descritta materialmente dalla funzione d'onda $\psi(x)$ e dalla posizione e quantità di moto. Tali quantità evolvono nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(\mathbf{x})\psi.$$

La funzione d'onda può essere scritta separando modulo e fase:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t)e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar}.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria nell'equazione di Schrödinger si ottengono diverse equazioni che contengono le funzioni R e S , una delle quali contiene una quantità Q che si considera come un potenziale quantistico che agisce sulla particella posta nella posizione \mathbf{x} . Poiché nessun esperimento ci può dire esattamente qual è questa posizione, la si descrive mediante il calcolo delle probabilità, assumendo che abbia una certa distribuzione $\rho(\mathbf{x}, t)$. Per quanto riguarda la quantità di moto, si assume che sia data esattamente da $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \nabla S$, dipendente sempre dalla funzione d'onda. L'ipotesi a questo punto è che il moto della particella sia dato semplicemente dalle leggi di Newton, sotto gli effetti combinati del potenziale esterno e di quello quantistico:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla(V + Q),$$

ove $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. Quando si risolve numericamente questa equazione, si ottiene un'interessante rappresentazione degli effetti quantistici. Nel caso ad esempio dell'esperimento delle due fenditure, il potenziale quantistico è responsabile della diffrazione attraverso le fenditure e della ripartizione delle particelle nella figura di interferenza dall'altra parte dello schermo.

5.7 LE DISUGUAGLIANZE DI BELL

Fino al 1964 si credeva di poter costruire una teoria a “variabili nascoste” che fornisse gli stessi risultati della meccanica quantistica. Von Neumann⁹ aveva tentato di dimostrare l'impossibilità di questa ipotesi, ma la dimostrazione corretta è stata elaborata da Bell.¹⁰ Nel 1964 Bell dimostrò che teorie alternative basate sul principio di località di Einstein conducono a disuguaglianze che contraddicono la meccanica quantistica (cfr. anche [19, pp. 2,38]).

⁹Cfr. nota 1.

¹⁰J. S. Bell, in *Rev. Md. Phys.* 38, 447 (1966).

Per costruire una teoria locale, immaginiamo [71] un sistema di due particelle nello stato $|0,0\rangle$ che viaggiano ciascuna verso i due osservatori A e B. Non si sa a priori se A e B misurano S_x o S_z . Il “realista locale” vuole che ogni particella abbia i suoi attributi ben definiti senza incertezza. Indichiamo con $\{+z, +x\}$ la situazione in cui A ottiene $\frac{\hbar}{2}$ in una misura di S_{1z} oppure $\frac{\hbar}{2}$ in una misura di S_{1x} . In tal caso per la particella 2 si avrà $\{-z, -x\}$. Tutti i possibili casi, rispettivamente per la particella 1 e per la particella 2 sono:

$$\begin{array}{ll} \{+z, +x\} & \{-z, -x\} \\ \{+z, -x\} & \{-z, +x\} \\ \{+z, +x\} & \{+z, -x\} \\ \{-z, -x\} & \{+z, +x\} \end{array}$$

Supponiamo ad esempio che A decida di misurare S_{1z} e trovi $\frac{\hbar}{2}$. In tal caso metà delle particelle osservate da B (particella 2) deve essere del tipo $\{-z, +x\}$ e metà del tipo $\{-z, -x\}$. Se dunque B misura S_{2x} , troverà il 50 per cento delle particelle con $\frac{\hbar}{2}$ e il 50 per cento con $-\frac{\hbar}{2}$. Quindi questo modello non quantistico in cui ogni particella ha caratteristiche ben precise riproduce bene i risultati della meccanica quantistica e i risultati di B sono completamente predeterminati dal tipo di particelle che B osserva, indipendentemente da ciò che A sceglie di misurare. Il modello soddisfa le esigenze del cosiddetto “realismo locale”.

Consideriamo ora un esperimento in cui A e B fanno entrambi una misura di spin lungo tre direzioni complanari e non ortogonali \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Ogni particella sarà del tipo $\{\pm\mathbf{a}, \pm\mathbf{b}, \pm\mathbf{c}\}$. Nei casi in cui gli apparati sono orientati in direzioni diverse, si valuta quale frazione delle loro misure fornisce valori di segno opposto (per i dettagli vedi [71]). Si trova, con un esperimento, che per certe orientazioni \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} i risultati sono in disaccordo con la meccanica quantistica.

Dalle ipotesi fatte, si possono dedurre disuguaglianze che possono essere verificate più facilmente rispetto all’esperimento descritto. Si può ottenere ad esempio la disuguaglianza

$$P(+\mathbf{a}, +\mathbf{b}) \leq P(+\mathbf{a}, +\mathbf{c}) + P(+\mathbf{c}, +\mathbf{b}). \quad (5.1)$$

Questa disuguaglianza è nota come disuguaglianza di Bell. Per verificarla, A e B devono determinare le tre probabilità. La disuguaglianza è in una forma per cui è possibile confrontarla con le previsioni della meccanica quantistica. In particolare si può dimostrare che la meccanica quantistica prevede che

$$\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2}.$$

Come nell'esperienza descritta, si vedrà che questa disuguaglianza è violata per certe orientazioni. Prendiamo il caso particolare in cui la direzione di c è la bisettrice di θ_{ab} . Ponendo $\theta_{ab} = 2\alpha$, si ha $\theta_{ac} + \theta_{bc} = \alpha$ e quindi

$$\sin^2 \alpha \leq 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ad esempio, se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, si ottiene $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{2}$, il che è assurdo e perciò si ha disaccordo fra le previsioni della meccanica quantistica e quelle di una teoria locale e realistica. Perciò se la meccanica quantistica è corretta e la disuguaglianza di Bell è violata, non può essere valida una teoria a variabili nascoste. Vari esperimenti hanno confermato la violazione della disuguaglianza di Bell e l'accordo con la meccanica quantistica. Questo risultato non è gradito al "realismo locale", in particolare il fatto che una misura dell'osservatore A sulla particella 1 può istantaneamente fissare il risultato della misura di B sulla particella 2 anche quando i due apparati di misura sono separati da distanze arbitrariamente grandi. Come può la misura di A influenzare quella di B?

5.8 IL PROBLEMA DELLA REALTÀ

Un confronto della teoria della misura con gli esperimenti mostra, come si è già evidenziato, un effetto non contenuto nella teoria stessa: mentre la meccanica quantistica può solo contemplare tutti i possibili risultati che si possono verificare in un esperimento, la realtà mostra comunque un unico dato reale, cioè un fatto attuale. Da dove viene l'unicità e l'esistenza dei fatti? Esistono tre tipi di risposte che intendono colmare questa lacuna della teoria. Il primo considera l'esistenza del problema come un'indicazione del fatto che la teoria è incompleta: si dovrebbe guardare altrove per spiegare l'esistenza dei fatti attuali. Questo è il punto di vista dei sostenitori delle variabili nascoste, di cui abbiamo già parlato. La seconda risposta, proposta da Everett (che vedremo nel prossimo paragrafo), si basa sul fatto che tutto ciò di cui parla la teoria è reale, perché la teoria stessa è legge di realtà, pertanto la realtà non è unica ma multipla. Si tratta dell'interpretazione a molti mondi. La terza risposta, che esaminiamo ora, risale a Bohr, ma è stata resa più chiara dai recenti progressi della teoria. Si tratta in particolare del contributo che l'interpretazione logica della meccanica quantistica fornisce alla teoria [53, p. 493]. Essa pone l'accento sull'unicità della realtà. L'universo ci mostra una moltitudine di fatti ma ciascuno è unico. Molti di questi fatti mantengono la memoria di fatti passati. Si può dunque mostrare che è possibile ricostruire logicamente il passato dal presente in maniera univoca. Il futuro invece rimane completamente aperto,

tranne che per le probabilità che si possono attribuire ai vari casi possibili. L'unicità dei fatti nel presente implica dunque l'unicità del passato, mentre il futuro rimane potenziale. Si può dunque assegnare all'intera costruzione logica un'ipotesi secondo cui i fenomeni presenti sono unici (e sono fatti). Questo porta a un altro importante accordo con l'evidenza: è logicamente necessario distinguere i caratteri del passato e del futuro. Questa non è solo una distinzione formale. La differenza fra passato e futuro è così ovvia che viene data per scontata, e lo stesso per l'unicità della realtà con i suoi fatti. La teoria afferma che queste due caratteristiche sono connesse, poiché il carattere del tempo segue dall'unicità dei fatti, o comunque che la meccanica quantistica non può separare le due caratteristiche senza cadere nell'inconsistenza. Si può formulare pertanto la seguente regola [53, p. 494]: la realtà fisica è unica; essa evolve nel tempo in maniera tale che, quando i fatti attuali hanno origine da diversi antecedenti, essi si verificano casualmente, con probabilità date dalla teoria.

5.9 INTERPRETAZIONE "A MOLTI MONDI"

Una posizione storicamente e concettualmente molto importante, come si è visto, è quella delle teorie a variabili nascoste, di cui si è già parlato. Per quanto riguarda la risposta di Everett,¹¹ egli suppone l'esistenza di un unico stato iniziale dell'universo, che porta a una moltitudine di realtà esistenti nel presente, tutte differenti ma tutte incapaci di comunicare reciprocamente a causa della decoerenza. Il contributo di Everett, che risale agli anni Cinquanta del Novecento, non è tanto una teoria quanto una rappresentazione della realtà in senso filosofico: un'immagine della realtà che non è completamente empirica ma implica una parte di immaginazione o convenzione, un modo di guardare alla realtà che ha origine essenzialmente dalle proprie convinzioni filosofiche. Non si tratta di scienza, perché nessun esperimento può mostrare che è errata; non si tratta di teoria perché non ha una dimostrazione; non è nemmeno "nonsense" perché non è una rappresentazione inconsistente; non si può però affermare che sia un problema che attiene alla fisica [53, p. 345].

Dell'interpretazione "a molti mondi" parla anche Bell [19] nei saggi *La teoria della misurazione di Everett e Sei possibili mondi della meccanica quantistica*. In termini moderni la visione di Everett è stata esposta da Gell-Mann e Hartle.¹² Si parte da uno stato iniziale unico dell'universo, forse anche uno stato quantico puro descritto da una funzione d'onda, che

¹¹H. Everett III, *Rev. Mod. Phys.* 29, 454 (1957).

¹²M. Gell-Mann, J. B. Hartle, in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, *Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity*, ed. by W. H. Zurek, Rea-

evolve secondo l'equazione di Schrödinger. Nella fase in cui l'universo conteneva essenzialmente radiazione termica, secondo i modelli del big bang, non vi erano ancora molti fenomeni classici degni di nota. Successivamente divennero possibili i fenomeni, come ad esempio la nascita di una galassia. Si tratta di fenomeni quantistici: vi è una certa probabilità che la galassia sia in un certo punto dell'universo piuttosto che in un altro, ma i possibili stati non hanno relazione fra loro e si ignorano reciprocamente a causa della decoerenza. Quando un abitante della galassia tenta di ricostruire il passato a partire da ciò che può osservare, può solo dedurre il passato della galassia fino a quando raggiunge una barriera di ignoranza. Il motivo è sempre la decoerenza: quando due oggetti classici, ad esempio due osservatori, appartengono a due storie differenti, devono completamente ignorarsi reciprocamente.

Sulla base della sua visione, Everett ha concluso che non c'è contraddizione fra una meccanica quantistica universalmente valida e il fatto che qualcuno, in uno specifico ramo della storia, osservi come unico tutto ciò che vi è di classico. Ma poi ha trasformato questa idea in una asserzione positiva: tutte le storie dell'universo sono reali: non esiste una realtà unica, ma molte zone differenti che non comunicano.

La visione di Everett è da molti rifiutata [53, p. 347] non per la sua inconsistenza ma per ragioni filosofiche, che privilegiano la preferenza per una realtà unica, anche se questa preferenza è pur sempre a priori. Altre critiche si basano su questioni estetiche e di economia del pensiero. Per quanto riguarda il primo aspetto, si osserva che nonostante il gran numero di effetti quantistici che si verificano nell'universo, un gran numero di essi fornisce lo stesso risultato. Ad esempio, sebbene l'emissione di un fotone da un atomo nella fotosfera del sole sia un evento quantistico, esistono così tanti fotoni che ciascuno di essi non cambia l'universo: essi sono completamente assorbiti in effetti collettivi così grandi da poter essere ben descritti dal determinismo classico. La rappresentazione di Everett è quindi “antieстетica” perché fornisce troppa importanza a ciò che non ne ha. Per quanto riguarda l'economia di pensiero, si può far riferimento alla regola del rasoio di Occam: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.¹³ La teoria della decoerenza ha mostrato che i vari esiti di una misura possono essere descritti dal convenzionale calcolo delle probabilità: perché allora fare uso di infinite sovrapposizioni?

ding, Addison-Wesley, 1990; anche in *Proceedings of the 3rd International Symposium on Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, ed. by S. Kobayashi, H. Ezawa, Y. Murayama, S. Nomura, Physical Society of Japan, 1990.

¹³Non bisogna moltiplicare gli enti senza necessità.

5.10 LA TEORIA GRW

Altre interpretazioni differiscono da quelle di Everett perché non accettano completamente la meccanica quantistica introducendovi alcuni cambiamenti. Della teoria che prevede l'esistenza di variabili nascoste abbiamo già parlato. La teoria di Bohm¹⁴ si basa sempre sulla funzione d'onda e sull'equazione di Schrödinger ma aggiunge coordinate reali delle particelle che si muovono deterministicamente in un potenziale in parte generato dalla funzione d'onda. La proposta di Ghirardi, Rimini e Weber¹⁵ prevede che un effetto fisico reale, che fino a un certo istante non è rivelato, si manifesti qua e là a caso nello spazio e nel tempo. Si tratta di un evento molto raro e una particella può attendere milioni di anni prima di materializzarsi nello spazio. Si tratta anche di un evento locale, nel senso che si verifica su distanze dell'ordine di centinaia di nanometri. In sostanza è una riduzione del pacchetto d'onda, come nell'interpretazione di Copenhagen: la funzione d'onda della particella è ridotta alla sua parte che giace in una piccola regione dello spazio ed è aumentata in grandezza in maniera tale da rimanere normalizzata. Questo è proprio ciò che segue da una misura di posizione nel caso della riduzione della funzione d'onda, ma la differenza rispetto all'interpretazione di Copenhagen sta nel fatto che non vi è apparato macroscopico di misura e anzi la misura è eseguita in un certo senso dallo spazio stesso. Ghirardi e gli altri hanno mostrato che l'effetto cumulativo di tali localizzazioni può essere efficiente fino a fissare la posizione di un solido contenente circa 10^{23} particelle in un tempo di circa una decina di microsecondi. La difficoltà di questa interpretazione sta nel fatto che se si riduce ad esempio la dimensione lineare di un solido di un fattore 10, il numero di particelle ivi contenute è ridotto di un fattore 1000 e il tempo necessario per una localizzazione del sistema è moltiplicato per 1000. Se si applicasse questa interpretazione a un rivelatore, esso non funzionerebbe.

5.11 ASPETTI FILOSOFICI

La struttura della meccanica quantistica consta di due parti, differenti ma intimamente collegate: una che riguarda l'evoluzione dinamica dei sistemi fisici e l'altra che riguarda la struttura logica della teoria [53, p. 506]. La struttura logica, sebbene interamente controllata dalla matematica, può essere usata per costruire con precisione l'intero linguaggio della fisica. L'interpretazione della meccanica quantistica poggia su un'unica regola, da cui

¹⁴Cfr. nota 6.

¹⁵G. C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, in *Phys. Rev. D* 34, 470 (1986).

poi procede in maniera completamente deduttiva. Questa regola seleziona, fra tutte le possibili proposizioni che descrivono una situazione fisica, quelle significative da quelle che non lo sono. La nostra immaginazione può concepire molte descrizioni, generate dalla nostra rappresentazione mentale o suggerite dalla possibilità di linguaggio. Quelle che rimangono fuori dal quadro della regola sono gratuite e senza senso. Sorgono però a questo punto alcuni problemi che, sebbene secondari, a noi possono interessare perché possono servire come spunti didattici per trattare in maniera interdisciplinare argomenti di fisica moderna con gli studenti, ad esempio da un punto di vista filosofico. La teoria è oggettiva? è realistica? Il primo problema è soprattutto fisico, il secondo filosofico.

Secondo Kant qualcosa è oggettivo se esiste al di fuori della mente, come oggetto indipendente dalla mente. Il problema dell'oggettività in fisica nasce col collasso della funzione d'onda. «Reduction was a pirouette of genius for escaping a contradiction which came from simultaneously admitting two different kinds of laws of physics» [53, p. 509]. La riduzione ha resistito alle analisi per lungo tempo, perché non si poteva criticare o giustificare logicamente. Essa fa riferimento a una misura, che è un dato espresso dalla fisica classica, ma stabilisce una conclusione su una funzione d'onda, che invece è un concetto quantistico. Poiché non vi è modo di analizzare la riduzione della funzione d'onda in maniera strettamente formale, essa è normalmente immaginata come un reale processo fisico, che si manifesta quando un sistema misurato e un osservatore interagiscono, sebbene non vi sia evidenza di un tale effetto. Von Neumann aveva proposto in merito una soluzione:¹⁶ la riduzione non ha niente a che vedere con un reale processo fisico, avviene nella rappresentazione del mondo che esiste nella coscienza di un osservatore. Perché accada la riduzione, è necessario che la funzione d'onda sia essa stessa un elemento di tale coscienza piuttosto che parte della realtà. La funzione d'onda è la rappresentazione della realtà che un osservatore può concepire in virtù delle informazioni che egli ha a disposizione. Ma il concetto di funzione d'onda è necessario per una completa descrizione della meccanica quantistica. E la meccanica quantistica è essa stessa fondante per la fisica e per la chimica, che a loro volta sono fondanti per altre scienze. Perciò tutta la scienza si può ridurre, in questa visione, allo stato della coscienza di uno o più osservatori. Non vi è oggettività, quindi, al più un accordo fra persone informate. Sfortunatamente, dice Omnès in [53, p. 510], questa visione è stata chiamata “interpretazione standard”.¹⁷ Bohr aveva d'altra parte messo in evidenza il carattere ogget-

¹⁶Cfr. nota 1.

¹⁷E. P. Wigner, in *Am. J. Phys.* 31, 6 (1963).

tivo della sua interpretazione, ma i suoi argomenti non erano sufficienti a chiarire il problema.

La mancanza di oggettività attribuita alla teoria non è comunque mai stata dimostrata. Poggia sull'evidenza di una facile soluzione soggettiva, molto più facile da capire dell'oggettività proposta da Bohr, che peraltro non è per niente ovvia. Per diverse motivazioni possiamo comunque ritenere oggi che la meccanica quantistica sia oggettiva: quando enuncia una proprietà o raggiunge una conclusione, la teoria usa solo fatti ben stabiliti. Pertanto la teoria si basa su fatti, non su ciò che abbiamo nella nostra mente: le conseguenze che trae dai fatti sono completamente indipendenti dall'arbitrarietà che ci può essere nella mente.

Il realismo della meccanica quantistica è stato affrontato da Bernard d'Espagnat.¹⁸ Per realismo possiamo intendere l'esistenza di un'entità, chiamata "realtà", che esiste indipendentemente dalle facoltà cognitive umane e da ciò che si decide di osservare e misurare. Il realismo in fisica, in particolare, assume che in linea di principio la realtà possa essere conosciuta per mezzo della fisica. Uno dei problemi che sorge a proposito del realismo è che le limitazioni quantistiche non consentono di ottenere una conoscenza completamente accettabile della realtà. Il problema è che tale conoscenza è proprio limitata in linea di principio dalla meccanica quantistica, come si è visto, ad esempio nelle conclusioni di EPR: le proprietà di un sistema cui siamo interessati possono essere modificate da un'azione su un altro sistema anche molto distante (è il fenomeno dell'*entanglement*, di cui si è già detto). La realtà dunque non può essere nota con certezza. Secondo d'Espagnat comunque questo non vuol dire che la realtà non esiste né che è impossibile conoscerla, bensì che tale conoscenza rimane incompleta. Egli parla di "realismo velato". Alla luce delle moderne riflessioni su EPR, si può dire che gli argomenti a favore del realismo velato non possono essere mantenuti, ma le sue conclusioni sì. Esiste infatti nella conoscenza dello stato dell'universo reale un certo margine di incertezza. Dire che la realtà può essere conosciuta completamente è eccessivo. Si può dire però che possono essere conosciuti fatti e proprietà di sistemi microscopici, che sono risultati di misure.

¹⁸B. d'Espagnat, in *An Uncertain Reality*, Cambridge University Press, 1989.

Una panoramica sullo stato degli studi in didattica della meccanica quantistica

6.1 PERCHÉ INSEGNARE LA FISICA MODERNA

Le motivazioni culturali alla base dell'insegnamento della fisica moderna sono concordemente riconosciute da autori e gruppi di ricerca, e possono essere così riassunte [69]:

- Si deve a ogni cittadino l'opportunità di conoscere e comprendere tutti gli aspetti essenziali del mondo e della cultura, e l'insegnamento della fisica moderna è una di queste opportunità.
- Tale insegnamento non può essere ridotto a una serie di conoscenze "utili", ma deve diventare parte integrante di una cultura scientifica e dei valori intellettuali che la ricerca scientifica propone.
- I risultati della fisica del XX secolo hanno influito in maniera importante sullo sviluppo del clima culturale contemporaneo e successivo.
- Una buona cultura fisica deve fornire gli strumenti per meglio comprendere ciò di cui si occupano gli scienziati oggi, e i fisici in particolare.
- La fisica moderna offre una visione del mondo, non solo un insieme di regole atte a riprodurre dati sperimentali o conoscenze il cui fine sia quello di sviluppare nuove tecnologie.

6.2 DIFFICOLTÀ E RESISTENZE NELL'INSEGNAMENTO DELLA FISICA DEL NOVECENTO

Il fatto che la fisica moderna sia compresa nelle Indicazioni Nazionali, però, non vuol dire che sia effettivamente insegnata. Ciò per vari motivi, evidenziati dai lavori esistenti, che dobbiamo sinteticamente descrivere.

Vi è [69], da parte di docenti scolastici e universitari, un certo ritengo nel tener conto delle principali scoperte della fisica del ventesimo secolo. Alla base di questo atteggiamento di ostilità [*op. cit.*] vi sono alcune convinzioni di base: il fatto che l'insegnamento scolastico della fisica debba avere valore pedagogico essenzialmente introduttivo e propedeutico a una "vera" fisica che si può apprendere solo in ambito accademico; il fatto che l'unica fonte di interesse nei confronti della fisica siano le applicazioni tecniche che caratterizzano il mondo che ci circonda; il fatto che nella scuola italiana l'intera formazione scientifica ha un ruolo secondario rispetto alla formazione umanistica, poiché si ritiene che solo quest'ultima sia portatrice di valori culturali e formativi. In generale quindi si rileva una diffusione della cultura fisica prevalentemente divulgativa, "con le sue caratteristiche di forzato semplicismo e fallimento comunicativo" [*op. cit.*]. Quand'anche a scuola si affronta la meccanica quantistica, lo si fa con alla base gravi difetti di impostazione. Si considera ad esempio l'insegnamento della meccanica quantistica come mera integrazione o appendice della fisica classica; si riduce la meccanica quantistica ad alcune leggi empiriche sorrette da ipotesi "strane", giustificate solo dall'accordo con i dati sperimentali; si introducono concetti che non corrispondono a quelli quantistici, in base a presunte necessità didattiche o difficoltà cognitive; si trascurano i problemi concettuali, evitando di discutere le loro implicazioni epistemologiche e culturali. Si cercano insomma "scorciatoie" [*op. cit.*] che semplificano eccessivamente la meccanica quantistica, traducendosi in proposte didattiche frammentarie e prive di organicità.

Venendo a difficoltà più tecniche, uno dei problemi più importanti è portare gli studenti ad affrontare processi quantistici in maniera quantitativa. I principali nodi concettuali possono essere così sintetizzati [65]:

- L'impossibilità di percepire con i sensi i processi microscopici rende difficile il passaggio dalla fenomenologia macroscopica a quella microscopica. Ad esempio gli studenti hanno difficoltà a caratterizzare l'ontologia di fotoni e elettroni e quindi le loro proprietà.
- La meccanica quantistica si fonda sul concetto di stato e sulla sua rappresentazione. Proprio la rappresentazione dello stato con opportuni

strumenti matematici è l'unico strumento possibile per modellizzare sistemi e processi quantistici, non solo quantitativamente ma anche qualitativamente. Non esistono infatti modelli macroscopici (familiari per gli studenti) che descrivono in modo coerente i fenomeni quantistici e inoltre gli enti formali della meccanica quantistica descrivono il modo in cui si estrae informazione da un sistema, ma non caratterizzano il sistema in quanto tale. Dal nodo concettuale dello stato quantistico seguono alcune difficoltà di insegnamento-apprendimento: non si distingue tra autostato, autovettore e autovalori; si attribuiscono indistintamente alla funzione d'onda vari significati (ampiezza di probabilità, probabilità, distribuzione di probabilità); si attribuisce alla funzione d'onda lo status di osservabile fisica e non di ente formale astratto; non si comprende come la funzione d'onda evolve nel tempo.

- Dove finisce la meccanica classica e dove inizia la meccanica quantistica? In realtà le difficoltà nell'interpretazione di una situazione quantistica si manifestano nelle situazioni in cui vi sono difficoltà nell'interpretare analoghe situazioni classiche (ad esempio il concetto di energia o di probabilità). Inoltre l'interpretazione dei processi quantistici risulta errata in quanto si usano schemi e concetti classici o semiclassici.

6.3 IMPOSTAZIONI PER L'INSEGNAMENTO DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Nella maggior parte dei testi scolastici di fisica per la scuola secondaria superiore, la meccanica quantistica è solitamente presentata secondo tre impostazioni [44]:

1. storica,
2. per problemi,
3. per ricostruzione razionale delle idee di fondo.

Si tratta di impostazioni simili, che si basano sulla quantizzazione di alcune grandezze fisiche osservabili e sulla presentazione di alcuni esperimenti che hanno contribuito storicamente alla crisi della fisica classica. La ricerca in didattica della fisica [44] evidenzia però due principali difetti di queste impostazioni: gli strumenti matematici di uno studente della scuola superiore non sono adatti alla descrizione precisa dei suddetti esperimenti

storici; non emergono in un quadro omogeneo e coerente le leggi generali della meccanica quantistica e la loro corretta interpretazione.

In Italia si occupano della didattica della fisica moderna alcuni gruppi di ricerca, che hanno elaborato e talvolta sperimentato proposte didattiche per studenti o percorsi di formazione rivolti a insegnanti.

Per quanto riguarda le proposte didattiche per gli studenti della scuola secondaria, le impostazioni didattiche più frequenti per l'insegnamento della meccanica quantistica, riconosciute dalla ricerca in didattica della fisica moderna [65], sono tre.

- **Impostazione storica.** Si segue un percorso di costruzione graduale dei concetti quantistici, in analogia col percorso storico. L'approccio storico è stato il primo a essere utilizzato: nelle trattazioni divulgative, nei programmi ministeriali, nella maggior parte dei testi scolastici, nelle prime sperimentazioni didattiche. Tale approccio ha un indubbio valore culturale ma necessita di tempi lunghi e strumenti formali adeguati e ha dato esiti significativi nel caso della formazione degli insegnanti, non altrettanto positivi nel caso delle proposte didattiche [*ibidem*]. Nelle impostazioni didattiche occorre comunque cercare di recuperare il ricco dibattito culturale che ha portato alla nascita della meccanica quantistica.
- **Impostazione formale analogica.** Si costruisce la matematica su cui poggia la meccanica quantistica in specifici contesti classici. Tali strumenti matematici sono interpretati in termini probabilistico-statistici. Le analogie con i contesti classici intendono avviare soprattutto alla descrizione dello stato quantistico per mezzo della funzione d'onda.
- **Impostazione concettuale.** Discute i contenuti concettuali della teoria quantistica mostrando le potenzialità che essa ha nell'unificare la visione dei fenomeni microscopici. Si basa sulla necessità di costruire una teoria basata su un concetto di stato non più legato a proprietà intrinseche del sistema (come nella fisica classica) ma al processo con cui si prepara un sistema in tale stato. Il nodo centrale è il legame tra principio di sovrapposizione e indeterminismo non epistemico che caratterizza i processi quantistici. Trova espressione nel formalismo lineare degli spazi di Hilbert e in particolare nella formulazione di Dirac della meccanica quantistica.

Descriveremo ora le principali proposte elaborate da alcuni gruppi di ricerca in didattica della fisica.

6.4 LA PROPOSTA DI UDINE

6.4.1 *Una proposta didattica per gli studenti*

La proposta dell'Unità di Ricerca in Didattica della Fisica dell'Università di Udine [49, 50] si basa sul proposito di introdurre la formulazione di Dirac, per due motivazioni principali. Anzitutto tale formulazione è fondata sul principio di sovrapposizione, ritenuto dagli autori un principio fondamentale. Inoltre il formalismo matematico basato su spazi vettoriali e operatori lineari fornisce, secondo gli autori, una visione unitaria di tutti i fenomeni microscopici.

Secondo questa proposta la meccanica quantistica può essere introdotta senza richiedere una base matematica avanzata (“without requiring an advanced mathematical background”), a differenza dell'approccio ondulatorio, che, pur essendo la modalità più rigorosa con cui avvicinarsi alla meccanica quantistica, si appoggia su prerequisiti fisici e matematici non comunemente presenti nella scuola secondaria e inoltre non mette in luce la sintetica potenzialità del formalismo vettoriale [49]. Nella proposta in esame, si presenta il fotone come sistema quantistico caratterizzato da stati di polarizzazione. Ogni stato può essere espresso in uno spazio vettoriale a due dimensioni, dove la base è una coppia di stati di polarizzazione ortogonali assunti come riferimento e le componenti sono chiamate ampiezze. Poiché la misura della polarizzazione di un fotone comporta la proiezione del suo stato su un altro, si può introdurre un operatore lineare che compie questa azione, associando così il concetto di osservabile fisica a quello di operatore. La proposta poggia su esperimenti di polarizzazione per facilitare la comprensione dei concetti introdotti.

Gli autori sottolineano che fra i prerequisiti non è richiesta un'interpretazione della polarizzazione della luce basata sull'elettromagnetismo, mentre si assume come conoscenza consolidata, da utilizzare per interpretare le situazioni proposte, il concetto di fotone come particella capace di descrivere il comportamento della luce e di rendere conto della sua natura [*op. cit.*].

Per una sintesi del percorso proposto dall'Unità di Ricerca in Didattica della Fisica dell'Università di Udine, cfr. appendice D.

Nell'articolo [47] è riportata la descrizione e l'esito di una sperimentazione pilota portata avanti con un numero ristretto di studenti (17). La sperimentazione didattica vera e propria è durata quattro anni. Ogni anno l'attività era di otto ore (comprensive del laboratorio e del test finale), nei mesi di maggio e giugno di una quinta liceo scientifico. Per il dettaglio dei risultati del test somministrato agli studenti, vedi [32, 66]. Stando alle conclusioni riportate dagli autori, la sperimentazione didattica ha dato risultati

positivi: la maggior parte degli studenti risultava in grado di interpretare l'intensità di trasmissione-assorbimento in termini di probabilità relativa del singolo fotone e di comprendere il concetto di stato quantico, l'incompatibilità di proprietà coniugate, la non località e l'indeterminismo quantistico. Gli autori rilevano che, per evitare che la sperimentazione rimanga un'esperienza didattica isolata, occorre investigare ulteriormente il confronto fra la fisica classica e la meccanica quantistica, per mezzo di una revisione critica dei nuovi concetti quantistici introdotti. Rilevano inoltre che comunque le maggiori difficoltà di apprendimento si trovano nel concetto di incompatibilità: il problema è quello di abbandonare la radicata idea classica di poter prevedere l'esito di una misura sulla base di proprietà preesistenti del sistema osservato. Un altro problema è il fatto che l'apprendimento dei concetti dipende dal contesto sperimentale esaminato: occorre generalizzare i risultati raggiunti, investigando su altri contesti sperimentali.

Partendo dalla base fenomenologica della polarizzazione lineare della luce e della sua interazione con filtri e cristalli, si riescono quindi a illustrare efficacemente agli studenti alcuni caratteri distintivi della meccanica quantistica. Questo approccio però ha un limite [44]: non consente di trattare il caso più generale degli spazi di Hilbert a infinite dimensioni e degli operatori con spettro continuo di autovalori come posizione e quantità di moto; nell'ambito di fenomeni a due gradi di libertà come la polarizzazione, non consente di determinare livelli energetici di un sistema fisico o la distribuzione di probabilità associata agli esiti di misura della quantità di moto o della posizione.

6.4.2 Una proposta per la formazione insegnanti

L'Unità di Ricerca in Didattica della Fisica dell'Università di Udine ha affrontato l'aspetto della formazione in diversi modi. Il gruppo, in particolare, organizza, nell'ambito del progetto Lauree Scientifiche, il master di secondo livello IDIFO (Innovazione Didattica In Fisica e Orientamento) per insegnanti della scuola secondaria. Riportiamo qui alcuni risultati molto importanti relativamente a un'indagine [48] compiuta su un gruppo di insegnanti che hanno frequentato il suddetto master, perché ci serviranno come spunti di riflessione. L'indagine è stata compiuta per mezzo di un questionario proposto ai 22 corsisti, e poiché solo 6 hanno restituito il questionario, gli autori hanno compiuto un esame qualitativo delle risposte. Il questionario era articolato in due parti, una sui nodi concettuali della meccanica quantistica ("elementi su cui focalizzare la riflessione intorno all'insegnamento-apprendimento della MQ") e l'altra sulle finalità e sugli aspetti rilevanti per una didattica della MQ ("la MQ a scuola").

Vediamo, per ogni quesito, una sintesi delle risposte attese dagli autori e delle conclusioni che essi hanno tratto dalle risposte fornite.

Per quanto riguarda la prima parte del questionario, il primo quesito chiedeva: *quali sono gli elementi che caratterizzano o identificano il comportamento quantistico?* Con questa domanda gli autori volevano osservare, fra le altre cose, se gli insegnanti prendono in considerazione l'evoluzione deterministica di uno stato secondo l'equazione di Schrödinger e l'evoluzione probabilistica che si manifesta con la misura. Gli insegnanti hanno rilevato come caratteristica del comportamento quantistico soprattutto l'indeterminismo e la non località, associati prevalentemente al processo di misura senza però definirlo esplicitamente. È stata invece trascurata l'evoluzione unitaria (secondo l'equazione di Schrödinger) e lineare dei sistemi non perturbati.

Il secondo quesito era: *conoscere o non conoscere le proprietà di un sistema implica l'esistenza di tali proprietà?* Scopo della domanda era osservare se gli insegnanti riflettono sulla possibilità di attribuire o meno una proprietà a un sistema quantistico. Nel caso si accetti tale possibilità, gli autori volevano osservare che cosa gli insegnanti intendono per proprietà e inoltre se riflettono sull'impossibilità di attribuire una proprietà a un sistema quantistico prima di sottoporlo a una misura. È emersa la convinzione per cui una proprietà non esiste prima di essere misurata, ma le risposte sono fornite con espressioni ambigue,¹ perché sembrano sottintendere invece che in meccanica quantistica si misurino proprietà già esistenti prima della misura. Questo potrebbe ingenerare problemi nell'apprendimento degli studenti, perché si sposta "continuamente il riferimento teorico da un'interpretazione standard della teoria quantistica a una a variabili nascoste" [48].

Come cambiano significato e ruolo della misura in meccanica quantistica rispetto alla fisica classica? Da questo terzo quesito gli autori si aspettavano che gli insegnanti riconoscessero il processo di misura quantistica come preparazione dello stato di un sistema, a differenza di quanto accade nella fisica classica, dove la misura è semplicemente la registrazione di uno stato che esiste precedentemente a tale processo. Dalle risposte emerge il ruolo attivo del processo di misura, che trasforma uno stato di sovrapposizione in un autostato.

Nel quarto quesito, sulla *prevedibilità del risultato di una misura e natura oggettiva delle proprietà misurate*, si voleva valutare se gli insegnanti rilevano la diversa natura della probabilità in meccanica quantistica e nella

¹Ad esempio un insegnante afferma [48]: "secondo l'interpretazione di Bohr, finché una grandezza fisica non è misurata, questa *non è ben determinata*."

fisica classica, ovvero la natura di caratteristica intrinseca del primo caso e di strumento che sopperisce alla mancanza di conoscenza nel secondo caso. Le risposte riportate dagli insegnanti mettono in evidenza l'aspetto indeterministico o quello probabilistico, ma spesso solo l'uno o l'altro. L'aspetto notevole è che tali risposte, in assenza di ulteriori precisazioni, potrebbero essere riferite anche a misure classiche.² Si mostra quindi ancora importante "l'esigenza di creare un linguaggio condiviso attraverso cui esplicitare le peculiarità dell'indeterminismo quantistico e dell'uso della probabilità in meccanica quantistica e caratterizzarle in modo specifico rispetto al contesto classico." Per quanto riguarda l'oggettività delle proprietà di un sistema, emergono posizioni realiste e non realiste.

Il quinto e ultimo quesito della prima parte del questionario chiedeva: *si può applicare la meccanica quantistica ai sistemi macroscopici?* Gli autori si aspettavano anche che emergesse, da questo quesito, l'assenza nella teoria quantistica di un limite di applicabilità e quindi la legittimità di quantizzare anche un sistema macroscopico. Sono stati riportati due tipi di risposte, uno in cui si dichiara che non esistono limiti all'applicabilità della meccanica quantistica e un altro in cui si afferma che invece la meccanica quantistica deve essere applicata solo ai sistemi microscopici. Gli autori suggeriscono di integrare queste due posizioni nella formazione degli insegnanti: è importante riconoscere che la meccanica quantistica non ammette limitazioni di principio né ambiti in cui non è empiricamente chiaro se applicarla o meno, ma è anche importante discutere il problema della realtà dei fenomeni macroscopici e del fatto che, nella misura, un sistema classico, il misuratore, interagisce con un sistema quantistico, quello che deve essere misurato. Questo infatti è ancora un problema aperto nella ricerca sui fondamenti (cfr. capitolo 5).

La seconda parte del questionario presentava tre quesiti, il primo dei quali per raccogliere le convinzioni degli insegnanti sulle motivazioni dell'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola: *perché insegnare la meccanica quantistica?* Gli autori si aspettavano che emergesse "l'importanza della meccanica quantistica nell'attuale visione del mondo microscopico, il suo ruolo di teoria paradigmatica, il ruolo che essa può avere nella costruzione del pensiero teoretico e formale", nonché "il contributo formativo che può avere il ripercorrere la nascita della teoria e i contributi al dibattito epistemologico e filosofico" [48]. Le risposte si soffermano sul valore culturale e paradigmatico della teoria quantistica, le sue idee di base strutturalmente

²Riportiamo a titolo di esempio alcune risposte fornite dagli insegnanti [48]: "il valore che si ottiene in una misura non può essere previsto in modo deterministico", "se facciamo infinite copie di uno stato e eseguiamo infinite misure della stessa osservabile, non otteniamo sempre lo stesso risultato, ma una distribuzione di risultati".

diverse da quelle della fisica classica, la possibilità di esplorare i limiti di applicabilità della teoria classica, tutte motivazioni che, rilevano gli autori, sono state messe in evidenza anche dalla letteratura di ricerca.

Concetti di base irrinunciabili in una proposta didattica in meccanica quantistica. Spiegare le ragioni delle scelte. Le risposte attese dagli autori per questo secondo quesito erano il concetto di stato quantico e il principio di sovrapposizione, nonché aspetti come l'*entanglement* e la non località. Le risposte degli intervistati contengono senz'altro i concetti fondamentali della teoria quantistica, ma gli autori rilevano la posizione autoreferenziale degli insegnanti, che ritengono che la scelta dei *concetti irrinunciabili* dipenda dalla propria libera scelta dell'impostazione da seguire e non da indicazioni fornite da una comunità scientifica di riferimento.

Quali aspetti privilegiare (formali, storici, concettuali, applicativi)? Anche in questo terzo e ultimo quesito gli insegnanti rivendicano un'autonomia nella scelta dei contenuti, ma non accompagnata da un'esplicitazione dei criteri scientifici che guidi tale scelta. In ogni caso privilegiano una trattazione concettuale, in particolare sugli aspetti fondanti della meccanica quantistica e su quelli che la distinguono dalla fisica classica. Per quanto riguarda il formalismo, le risposte rilevano ad esempio che: è importante introdurre una struttura formale; comunque il formalismo debba essere limitato all'essenziale; è improbabile introdurre spazi di Hilbert e concetto di operatore.

Complessivamente gli autori individuano i seguenti nodi concettuali non risolti: l'attribuzione a un sistema di proprietà già esistenti in un processo di misura, pur senza assumere esplicitamente un'interpretazione a variabili nascoste, con cui tale attribuzione dovrebbe essere coerente; il mancato riconoscimento dell'*entanglement*, cioè la convinzione che si possano considerare separatamente sottosistemi *entangled*; il riconoscimento dell'assenza di un limite di applicabilità alla meccanica quantistica e quindi della possibilità, almeno in linea di principio, di quantizzare anche un sistema macroscopico; il riconoscimento dell'(eventuale) oggettività delle proprietà di un sistema quantistico.

6.5 LA PROPOSTA DI MILANO

6.5.1 Problemi alla base della didattica della meccanica quantistica

La proposta scaturita dalle attività di ricerca didattica presso l'Università di Milano si basa sulla teoria quantistica dei campi. Una difficoltà nella presentazione didattica della meccanica quantistica [34] è il fatto che si ritiene che la realtà fisica possa essere identificata anche al di fuori di una

teoria formale. Da questo “vizio” di interpretazione segue che ci si riferisce alla realtà fisica attraverso modelli parziali, magari legati a concezioni ingenuie. Segue anche la convinzione che “determinate evidenze sperimentali in quanto esistenti *di per sé* possano essere spiegate da un modello o da un altro a seconda della *convenienza* (per esempio da un modello ondulatorio o da un modello corpuscolare)”. Gli autori in particolare evidenziano il fatto che la meccanica quantistica si è articolata in tre momenti storici³ e che le presentazioni didattiche della meccanica quantistica si riferiscono indistintamente a questi tre momenti, senza distinguerli con chiarezza.

Un altro problema, nella didattica della meccanica quantistica, è, secondo gli autori, il fatto che i concetti fisici sono *oggettivati* in modo ingenuo, da insegnanti e studenti. Per *oggettivazione* si intende l’atto cognitivo, così chiamato [34] da Lorenz,⁴ della formazione del concetto di *oggetto* a partire dalle esperienze sensoriali. Ma in ambito scientifico gli esperti delle varie discipline costruiscono concetti che spesso non derivano da esperienze sensoriali, come atomi o molecole. Si tratta di “oggetti intermedi”,⁵ che entrano a far parte di teorie che a loro volta spiegano il funzionamento degli *oggetti* in senso lorenziano. Nelle costruzioni scientifiche tali oggetti intermedi diventano essi stessi elementi di realtà, fungendo da supporto a una nuova visione del mondo che diventa parte della cultura universale. Si parla di “costruzione probabilistica della realtà” (secondo Cavallini [14]) o di “realismo ipotetico” (secondo Lorenz⁶, come riportato in [14]). Da un punto di vista didattico, però, il problema è, come si è detto, l’*oggettivazione* ingenua dei concetti fisici. Gli autori riportano l’esempio dell’idea di forza, che nella didattica della fisica si considera esistente indipendentemente dalla teoria che la descrive. La *forza*, invece, è proprio un “oggetto intermedio”, che assume significato solo nell’ambito della teoria newtoniana.

Da queste riflessioni gli autori traggono considerazioni per la didattica della meccanica quantistica: “ogni volta che si vuole introdurre nella prassi scolastica un argomento di fisica occorre definirne con chiarezza i termini di riferimento appropriati; occorre identificare i concetti propri della teoria, separandoli da altri riferimenti che servano per interpretarli in maniera tale

³La *old quantum physics* (dal 1900 al 1925); la teoria della meccanica quantistica col formalismo di Schrödinger e con l’interpretazione di Born o con la formulazione matematicamente equivalente di Heisenberg e Jordan (dal 1925 al 1927); la teoria quantistica dei campi.

⁴Konrad Lorenz, in *L’altra faccia dello specchio. Per una storia naturale della conoscenza*, Adelphi, Milano, 1974, pag. 26.

⁵Così definiti da Enrico Bellone in *Molte nature*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2008, pag. 118 [34].

⁶Konrad Lorenz, *op. cit.*

da ricondurli ad altre teorie fisiche o che portino a conciliarli troppo banalmente con il senso comune”. Bisogna introdurre con grande attenzione gli “oggetti intermedi”, prima come costruzioni ipotetiche e poi come oggetti reali inquadrati in una corretta teoria formale, ma da non confondere mai con gli oggetti reali *oggettivati* dal senso comune. Nel caso della meccanica quantistica occorre scegliere una teoria di riferimento. In relazione alle suddette tre parti storiche della teoria, non si potrà scegliere la *old quantum physics*, perché non è una teoria. Gli autori decidono di scegliere la teoria quantistica dei campi, perché è “l’unica teoria quantistica relativistica, consistente e provata, [...] e anche perché, e questa è una motivazione didattica, solo in tale teoria trova una sua formulazione completa l’idea di fotone.” Occorre evitare, suggeriscono, fraintendimenti verbali che, pur appartenendo a una teoria, sono ripresi da concezioni precedenti o esterne ad essa. Ad esempio si dovrebbe evitare di parlare ingenuamente di particelle come oggetti corporei e come sinonimi di quanti. L’idea di particella infatti è solo un’utile metafora tecnica da applicare con precauzione e in determinati contesti.

6.5.2 La proposta

Il contenuto della proposta è sintetizzato in [35] e in [33]. A differenza della proposta di Udine, che si basa sulla struttura di spazio vettoriale astratto della meccanica quantistica e sulla formulazione di Dirac, questa proposta si basa sul concetto di campo e sulla sua quantizzazione.

Poiché anche i fasci di materia mostrano un comportamento ondulatorio (ad esempio gli elettroni mostrano fenomeni di diffrazione), gli autori ipotizzano che la materia possa essere descritta classicamente da campi continui: come da uno di questi campi, quello elettromagnetico, si può dedurre l’ottica classica, così si può pensare di descrivere il comportamento di un fascio di materia (anziché di luce) in termini di una sorta di “ottica materiale”.

Si parte dagli esperimenti di interferenza e diffrazione di fasci di materia (per la descrizione di alcuni esperimenti di “ottica materiale” vedi [33]), che vengono inizialmente interpretati non come esperimenti quantistici ma come esperimenti classici ad alta intensità, cioè in termini esclusivamente ondulatori, senza pensare al fascio materiale come costituito da particelle. La rappresentazione particellare infatti è spesso impropria e può portare ad aspetti paradossali.

Si mostra, poi, come si possa derivare un’equazione d’onda di materia classica simile all’equazione di Schrödinger, ma senza la costante h , che può essere interpretata classicamente e che gioca un ruolo simile a quello dell’equazione d’onda elettromagnetica.

In termini più formali (per i dettagli vedi [33] e il paragrafo 4.2 in questa tesi) gli autori partono dalle equazioni di Maxwell scritte in termini del potenziale quadrivettore. Ogni componente del potenziale si può sviluppare in serie di Fourier, in cui i coefficienti sono ampiezze di onde piane. Si ipotizza a questo punto che un campo materiale si possa sviluppare in maniera analoga in onde piane. Il campo materiale così definito però non soddisferà più le equazioni di Maxwell, ma l'equazione di Klein Gordon. In tale equazione c'è un parametro μ che ora può essere interpretato fisicamente come massa: a diversi valori di μ corrispondono diversi campi materiali. Inoltre μ è l'inverso di una lunghezza, quindi si può associare a ogni campo una lunghezza caratteristica. Si trova ad esempio che il campo varia lentamente se la lunghezza d'onda centrale del pacchetto è molto maggiore dell'inverso di μ (approssimazione di campi lentamente variabili). Nell'approssimazione di campi lentamente variabili, però, si ottiene un campo che non soddisfa l'equazione di Klein Gordon. Occorre allora separare l'equazione di Klein Gordon in due equazioni. Questo comporta il fatto di dover trattare in maniera differente spazio e tempo (è un indice del fatto che siamo in ambito non relativistico). I campi descritti dalle due equazioni così ottenute sono campi che si propagano a bassa velocità. Poiché siamo nell'ipotesi di campi lentamente variabili, cioè con λ grande, si può osservare che pacchetti a bassa velocità sono pacchetti a bassa frequenza. Ora si può osservare che il segno di μ consente di passare da un'equazione all'altra. Per ogni valore di $|\mu|$, quindi, si ottengono due campi distinti che chiamiamo campo di materia e di antimateria.

Il concetto quantistico emerge nella descrizione delle interazioni, sia per forze che per campi di materia. Emerge ad esempio per spiegare leggi chimiche, che possono essere spiegate in maniera semplice in termini di interazione di quanti (che per la chimica sono atomi, elettroni, ioni, ...). Per ragioni simili interazioni di radiazione elettromagnetica con la materia (effetto fotoelettrico, effetto Compton) possono essere spiegate in termini di interazione di quanti (fotoni). Il concetto chiave è quindi la quantizzazione del campo. Per questo scopo si ricorre a esperimenti a doppia fenditura, esperimenti *wich way* e esperimenti *interaction-free* (che descriveremo brevemente più avanti). Si vuole mettere in evidenza il fatto che le interazioni fra campi sono eventi nello spazio-tempo che obbediscono a leggi di conservazione e che tali eventi, che necessitano di una descrizione statistica, sono i "quanti". Ma non è permesso dire che il mondo è fatto di quanti, altrimenti si giunge a paradossi, ad esempio se nell'esperimento della doppia fenditura (con fotoni o con elettroni) si cerca di attribuire una traiettoria ai quanti del campo: la fisica delle interazioni elementari è intrinsecamente statistica e la rivelazione di un quanto si descrive in termini probabilistici.

Una volta che si rileva che un campo ondulatorio presenta nelle interazioni aspetti quantistici, è possibile interpretare alcune osservazioni fenomenologiche. Poiché infatti si sa che i quanti di un campo elettromagnetico hanno energia e quantità di moto legate alla pulsazione e al numero d'onda dalle relazioni

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

si può ipotizzare di generalizzare queste relazioni a qualunque tipo di campo. Si giunge così alle relazioni di de Broglie.

Per descrivere la localizzazione della funzione d'onda, si fa uso dei pacchetti d'onda: un pacchetto d'onda localizzato in un intervallo di tempo Δt si può considerare come somma di infinite onde monocromatiche con frequenze comprese in un intervallo $\Delta\nu$ tale che

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}.$$

Questa relazione consente di giungere alla relazione di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \approx h.$$

Tutto ciò premesso, gli autori osservano che l'unica teoria che spieghi i seguenti fatti:

- la propagazione libera è descritta da una teoria delle onde;
- le interazioni sono descritte in termini quantistici;
- gli esperimenti mettono in evidenza una struttura statistica delle interazioni i cui valori medi devono ricondursi al caso classico;

è la teoria quantistica dei campi, i cui fondamenti abbiamo descritto nel paragrafo 4.2.

Gli autori ritengono di dover lasciare fuori da questo approccio i modelli storici dell'atomo, perché fuorvianti per gli studenti. Per giungere alla struttura atomica, allora, propongono di studiare gli esperimenti di Geiger e Marsden sulla deflessione delle particelle alfa da bersagli sottili, che implicano l'esistenza di un campo elettrico che circonda un nucleo "piccolo". Si prosegue poi con l'analisi del comportamento di un campo quantizzato confinato in una buca finita, che fornisce livelli energetici discreti. Con l'aiuto delle relazioni di Heisenberg, si sostiene, non è difficile arrivare direttamente ai livelli energetici.

6.5.3 *Formazione insegnanti*

Sull'approccio qui descritto si è basato il corso di Teorie Quantistiche presso la SILSIS⁷ di Milano, con 26 futuri insegnanti (per i dettagli vedi [35]). Qui possiamo evidenziare il fatto che i partecipanti al corso ne hanno giudicato i contenuti talmente complessi da scoraggiare un tale approccio nelle loro classi, ma dopo un corso di laboratorio hanno cambiato radicalmente idea. Sarebbe interessante sapere se questo approccio è stato poi effettivamente proposto dai corsisti nella loro successiva attività professionale.

Questo approccio didattico ha il vantaggio [44] di superare la separazione fra proprietà corpuscolari e ondulatorie della materia, tradizionalmente presente nei libri di testo, e di evidenziare l'aspetto unificante del concetto di campo nella fisica moderna. D'altra parte [*op. cit.*] nella teoria quantistica dei campi i fondamenti della meccanica quantistica non relativistica sono oscurati da un'estrema complicazione formale e concettuale che rende difficile, ad esempio, di introdurre in maniera semplice anche solo il concetto di indeterminismo legato agli esiti dell'esperimento di misura. Inoltre il passaggio alla meccanica quantistica ordinaria nel limite non relativistico presenta difficoltà formali e interpretative che potrebbero non essere alla portata delle conoscenze di uno studente della scuola superiore. Infine, anche nell'approccio didattico che si serve del concetto di campo quantistico, i postulati della meccanica quantistica ordinaria devono essere assunti come negli altri approcci didattici, e non dedotti da quelli della teoria dei campi.

6.5.4 *Esperimenti *wich way**

Si chiamano esperimenti *wich way* quelli in cui si vuole determinare quale percorso ha preso una particella (ad esempio attraverso una doppia fenditura), ma nel contempo si distrugge l'interferenza. La scomparsa dell'interferenza, secondo l'interpretazione originariamente fornita da Bohr, è da attribuirsi al processo di misura. Se si esamina infatti la particella, ad esempio con un fotone, esso deve avere lunghezza d'onda sufficientemente piccola da distinguere i due percorsi. Il fotone inoltre, nell'interazione con la porzione di onda che viaggia attraverso uno dei due percorsi, introduce un'indeterminazione sulla quantità di moto sufficientemente grande da distruggere la coerenza fra le due parti di funzione d'onda. Gli esperimenti *wich way* consentono di rilevare il percorso della particella senza introdurre l'indeterminazione sulla quantità di moto. Uno di questi [63] si basa su un

⁷Scuola Interuniversitaria Lombarda di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario.

interferometro di Mach-Zender, in cui un fascio di fotoni è suddiviso in due percorsi (mediante specchi semitrasparenti detti *beam splitters*) che, dopo opportune riflessioni, sono ricombinati. Il fascio ricombinato mostra frange di interferenza dovute alla differenza di cammino fra i due percorsi. L'interferometro è modificato con l'inserimento di polarizzatori lineari in ciascuno dei due percorsi: ciò consente di codificare l'informazione sul cammino del fotone nella sua polarizzazione. Ai due fasci sono assegnate rispettivamente polarizzazione orizzontale e verticale. Dopo che il fascio ricombinato lascia l'interferometro, lo si analizza con polarizzatori lineari e circolari. Se l'analizzatore è orientato nella direzione x o y , si vede solo la luce che ha viaggiato in una direzione o nell'altra, e non si vede interferenza. L'aspetto più interessante è la mancanza di interferenza anche quando non vi è analizzatore. Non è necessario infatti osservare la luce tramite l'analizzatore, per far sparire l'interferenza: la sola codifica dell'informazione *wich way* (tramite i polarizzatori) è sufficiente a distruggere l'interferenza. Per verificare che la scomparsa dell'interferenza non è dovuta all'indeterminazione sulla quantità di moto che distrugge la coerenza, si può cancellare l'informazione *wich way* e ristabilire l'interferenza, orientando l'analizzatore a 45° , che funge, in tal modo, da "cancellatore quantistico".

In generale, ogni caratteristica *wich way* in un interferometro può essere rappresentata da un vettore di stato che contiene gradi di libertà spaziali, indicati con R , e gradi di libertà di spin, indicati con M . In questo caso i gradi di libertà di spin descrivono la polarizzazione orizzontale o verticale del fotone. La misura *wich way* produce uno stato del tipo

$$\frac{|R_1 M_1\rangle + |R_2 M_2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Possiamo limitarci a considerare i gradi di libertà di polarizzazione, e scegliere come base ortonormale gli stati $|x\rangle$ e $|y\rangle$ che rappresentano la polarizzazione orizzontale e verticale. Se lo stato iniziale è un fascio polarizzato a 45° , del tipo

$$|\psi_i\rangle = \frac{|x\rangle + |y\rangle}{\sqrt{2}},$$

dopo la ricombinazione si ottiene lo stato finale

$$|\psi_f\rangle = \frac{|x\rangle + e^{i\phi} |y\rangle}{\sqrt{2}},$$

che non manifesta interferenza e dove ϕ è la differenza di fase introdotta dalla differenza di cammino ottico fra i due rami dell'interferometro.

Vediamo cosa succede se il fascio ricombinato è analizzato con un polarizzatore a 45° . Si definisce l'operatore di polarizzazione a 45° , mediante i suoi effetti sugli stati di base:

$$\hat{P}_{45} |x\rangle = \frac{|x\rangle + |y\rangle}{2}$$

$$\hat{P}_{45} |y\rangle = \frac{|x\rangle + |y\rangle}{2}.$$

Si può dimostrare che il valore di aspettazione dell'operatore è

$$\langle \psi_f | \hat{P}_{45} | \psi_f \rangle = \frac{1 + \cos \phi}{2}.$$

Tale espressione denota l'interferenza.

In questo esperimento si verifica un *entanglement* fra componenti spaziali e di polarizzazione di un fotone, analogo all'*entanglement* di spin correlati che si manifesta ad esempio nell'esperimento EPR.

6.5.5 Esperimenti *interaction-free*

L'interferometro di Mach-Zender consente anche di eseguire le cosiddette misure *interaction-free*, cioè esperimenti in cui si osserva la presenza di un oggetto senza assorbimento di un fotone [18]. Consideriamo anzitutto il caso in cui nessun oggetto blocca i due percorsi del dispositivo. Si può dimostrare che se la riflettività⁸ del primo *beam splitter* è uguale alla trasmissività⁹ del secondo, allora un fotone che entra nell'interferometro raggiungerà sempre il primo rivelatore e mai il secondo. Se ora si dispone un oggetto perfettamente assorbente nel percorso inferiore dell'interferometro, un fotone può raggiungere il primo rivelatore, come nel caso precedente, ma ha anche la possibilità di essere assorbito dall'oggetto o di raggiungere il secondo rivelatore. Questo procedimento consente di misurare la presenza dell'oggetto senza interazione col fotone, perché quando l'oggetto non è presente, nessuna luce raggiunge il secondo rivelatore. Poiché però un fotone che raggiunge il primo rivelatore non fornisce informazioni sulla presenza o assenza dell'oggetto, per valutare l'efficienza dell'apparato si devono confrontare le probabilità relative delle altre due possibilità. Tale efficienza è definita come il rapporto fra la probabilità di una misura *interaction-free* e

⁸La riflettività, o riflettanza, è il rapporto tra l'intensità del flusso radiante riflesso dalla superficie e l'intensità del flusso incidente sulla superficie.

⁹La trasmissività, o trasmittanza, di un polarizzatore è il rapporto fra l'intensità della luce trasmessa e l'intensità della luce incidente.

la probabilità di misura o assorbimento, in funzione della riflettività R_1 del primo *beam splitter*. Si trova che l'efficienza è

$$\eta = \frac{1 - R_1}{2 - R_1},$$

e raggiunge il valore limite $1/2$ quando R_1 tende a zero. L'efficienza teorica risulta in buon accordo con quella sperimentale, tranne che per valori molto piccoli di R_1 . Sfortunatamente la probabilità di misure *interaction-free* si avvicina a zero quando l'efficienza raggiunge il valore massimo, perciò molti fotoni colpiscono il primo rivelatore e non forniscono alcuna informazione.

Un altro interessante esperimento può essere eseguito disponendo un certo numero di interferometri in serie. Si può dimostrare che se la riflettività del primo *beam splitter* è $R = \cos^2 \frac{\pi}{2N}$ (dove N è il numero di divisori di fascio), la luce raggiunge sempre il primo rivelatore. Se ora un oggetto blocca tutto il percorso superiore dell'apparato, un fotone può essere assorbito o raggiungere il secondo rivelatore. Si trova che per N grande la probabilità di misura *interaction-free* è

$$P_{IFM} \simeq 1 - \frac{\pi^2}{2N}.$$

Per N grande, quindi, tale probabilità si avvicina a uno, e con questo aumenta l'efficienza del dispositivo.

6.6 LA PROPOSTA DI TORINO

Come si è visto (cfr. paragrafo 4.1.4), una delle formulazioni della meccanica quantistica, quella dei cammini di Feynman, si basa sul concetto di probabilità di transizione. Ma tale probabilità, come abbiamo avuto modo di ribadire più volte, non segue le leggi di composizione della teoria classica della probabilità. Abbiamo visto ad esempio come Feynman illustra la diffrazione degli elettroni da parte di una doppia fenditura [28]. In generale [44] la formulazione dei cammini di Feynman consente di calcolare la probabilità di transizione tra due punti dello spazio-tempo per una particella soggetta a un potenziale arbitrario: tale probabilità è proporzionale al modulo quadro della somma delle traiettorie classiche che uniscono i due punti, pesate con un opportuno fattore di fase.

La proposta didattica del gruppo di ricerca dell'Università di Torino [12] si basa sull'uso di strumenti informatici: gli studenti, con un foglio di calcolo di uso comune, possono determinare il valore delle fasi associate a determinate traiettorie e sommarne i contributi per determinare l'ampiezza

di transizione tra due eventi dello spazio-tempo. Le fasi corrispondenti alle singole traiettorie sono visualizzate con la rappresentazione dell'orologio che abbiamo descritto nella sintesi della formulazione dei cammini di Feynman. La fase globale si ottiene sommando vettorialmente le fasi di ciascuna traiettoria. La proposta ha diversi aspetti positivi [44]. Anzitutto, poiché il metodo di calcolo della fase si basa sul concetto classico di traiettoria, esso è facilmente comprensibile per lo studente. Tale proposta inoltre consente di introdurre subito il concetto di indeterminismo quantistico, perché l'ampiezza di transizione consente di determinare solo la probabilità dell'evento associato. Il fatto che, poi, si debbano sovrapporre, con opportuni "pesi", tutte le traiettorie possibili, consente di evidenziare il carattere lineare della teoria. La proposta consente anche di mettere in evidenza il limite classico della teoria, come si vede nell'esempio della riflessione su uno specchio piano proposto anche da Feynman, che abbiamo già descritto.

Si rilevano però [44] anche alcuni fraintendimenti che la proposta didattica potrebbe indurre negli studenti. Ad esempio l'uso del concetto classico di traiettoria, sebbene di facile comprensione per gli studenti, potrebbe far credere loro all'esistenza fisica della traiettoria. I cammini di Feynman sono invece solo un utile mezzo per calcolare le ampiezze di probabilità di eventi quantistici. Un altro problema di questa impostazione è la sua difficile applicazione al di fuori del contesto illustrato. Non può essere applicata facilmente, ad esempio, alla trattazione di osservabili quantistiche diverse dalla posizione, come lo spin. Inoltre, anche limitandosi al caso della posizione, con l'uso del foglio di calcolo è possibile trattare facilmente il solo caso della particella libera.

6.7 LA PROPOSTA DI ROMA "LA SAPIENZA"

Il gruppo di ricerca in didattica della fisica dell'università di Roma "La Sapienza" ha messo in evidenza [69] alcuni problemi, sicuramente condivisibili, riguardanti l'insegnamento della fisica moderna nella scuola. Un tale insegnamento infatti comporta "un complesso cambiamento nel modo stesso di insegnare la disciplina". Si dovrebbe avviare un processo di innovazione, ma non solo da parte degli insegnanti di fisica, bensì di tutti gli attori che hanno un ruolo nel mondo della scuola: insegnanti di matematica e di eventuali altre discipline coinvolte, dirigenti scolastici e altre autorità scolastiche, comunità scientifica e ambiente accademico. In quest'ultimo si ricomprendono i gruppi di ricerca in didattica della fisica, cui spetta il compito di velocizzare questo processo di innovazione. La fisica moderna [*ibidem*] è in effetti già presente nei libri di testo, ma si è trattato di adeguamenti imposti dall'alto, "spesso didatticamente discutibili", che non hanno prodotto

sostanziali cambiamenti. Gli insegnanti stessi manifestano diffidenza nei confronti dell'insegnamento della fisica moderna, e per di più la comunità scientifica dei fisici, “abituata a vedere l'insegnamento scolastico come una sottospecie dell'insegnamento universitario, mantiene un atteggiamento indifferente, se non addirittura ostile, verso la fisica moderna”. Per di più la comunità scientifica, rileva l'articolo, è poco interessata alle competenze specifiche richieste a un futuro insegnante di fisica (e l'iter legislativo dei vari canali di formazione degli insegnanti, che abbiamo descritto nel capitolo 1, lo dimostra). Le scuole di specializzazione [70] hanno ad esempio mostrato che “l'insegnamento universitario non è concepito in funzione della formazione di futuri insegnanti”, perché si basa sul semplicistico schema *formazione dell'insegnante=padronanza dei contenuti disciplinari*. Non appare evidente, nell'insegnamento accademico, “l'esigenza della consapevolezza critica, della visione globale, della sensibilità storica verso i contenuti disciplinari”.

Un corretto approccio all'insegnamento della fisica moderna [70] deve anzitutto proporsi di introdurre la meccanica quantistica nella forma più organica e completa possibile. Bisognerebbe cioè chiarire da subito i principi di fondo e collegare le regole basilari del linguaggio formale che esprime tali principi con il loro significato concettuale. Si dovrebbe poi sottolineare l'aumento delle capacità esplicative della meccanica quantistica e il cambiamento che essa implica nella visione degli enti e dei processi fisici fondamentali. Sarebbe anche necessario ristrutturare il percorso scolastico, sia in senso verticale, cioè lungo tutti gli ordini e gradi di scuola, sia in senso orizzontale, cioè curando meglio il rapporto fra le varie discipline. Sulla base di queste considerazioni, il gruppo di Roma propone un approccio “evolutivo”: per comprendere nuovi criteri di rappresentazione e spiegazione, occorre comprendere i problemi conoscitivi che ne sono alla base. La ricerca didattica non può limitarsi a problemi metodologici, ma deve occuparsi anche della storia e dei fondamenti della fisica, per basare l'insegnamento su percorsi coerenti che forniscano il senso di progresso conoscitivo. L'approccio “evolutivo”, perciò, non è un approccio meramente storico. Alla luce di questa visione evolutiva, il gruppo di ricerca individua i contenuti “irrinunciabili” da insegnare. Anzitutto si deve far apprendere agli studenti che non esiste un modello classico univoco degli oggetti quantistici (non sono onde né particelle, ad esempio). Si deve poi insegnare il fatto che cambia il concetto di sistema e di proprietà che gli può essere attribuita. Ci si deve soffermare inoltre sul cambiamento del ruolo della misura. Questo nuovo modo di vedere trova espressione nei principi di complementarietà e indeterminazione, che devono essere resi oggetto di attenta riflessione critica, per evitare semplificazioni fuorvianti.

Le riflessioni del gruppo di Roma si sono concretizzate in un percorso di

formazione per insegnanti, sperimentato presso la SSIS Lazio, coordinata dall'università La Sapienza. La collaborazione dell'autore col master IDIFO si è concretizzata in una prima sistematizzazione della proposta, da cui scaturiscono gli articoli citati in bibliografia.

La proposta si articola in tre parti [70]. Nella prima parte si affronta la crisi della fisica classica. È una fase di raccordo delle nuove nozioni con quelle già apprese dagli studenti. Introdurre la fisica moderna costringe a ripensare criticamente i contenuti e la sottostante visione del mondo tipici della fisica classica. Si analizzano i principali schemi esplicativi della fisica classica per mettere in evidenza la problematicità di una loro integrazione coerente. Si parte [70] da alcune antinomie che caratterizzano l'intero impianto esplicativo della fisica classica: *continuo/discreto*, *macroscopico/microscopico*, *causale/casuale*, *stabile/instabile*. Per riconsiderare in maniera critica gli schemi esplicativi della fisica classica, è importante la padronanza di particolari nuclei fondanti, sia dal punto di vista fisico che matematico. Ad esempio le onde e le oscillazioni, si osserva in [70], sono talvolta trascurate nell'insegnamento tradizionale. Nella seconda parte si affrontano i primi concetti e esperimenti quantistici. L'esposizione non si basa sulla "vecchia teoria dei quanti", l'insieme dei modelli meccanici quantizzati elaborati a partire dal 1913. Si ritiene invece importante esporre il problema della radiazione termica e l'ipotesi della quantizzazione di Planck, il modello di Einstein dei quanti di luce e il connesso dilemma onda-corpuscolo, il modello di Bohr, ma prescindendo come si è detto dai modelli fisico-matematici della "vecchia teoria dei quanti". Si tratta quindi di una trattazione non storiografica ma concettuale. Nella terza parte, la più delicata, si introducono gli studenti alla nuova fisica quantistica e al suo formalismo.

La proposta, si legge in [70], assume qui aspetti "futuribili", perché implica non solo il ripensamento della scansione dei programmi, ma anche una ristrutturazione radicale del rapporto fra l'insegnamento della fisica e quello della matematica. Il percorso si fonda sul riconoscere che la meccanica quantistica è una teoria lineare e su una conseguenza fondamentale di questo fatto, la validità del principio di sovrapposizione. Si può allora partire da sistemi classici che godono delle stesse proprietà, per giungere al principio di sovrapposizione. In [70] si propone come esempio oscillatori semplici accoppiati (sistemi armonici), nei quali con opportune eccitazioni si possono generare stati di oscillazione stazionaria e si possono propagare movimenti ondulatori. Lo studio dei sistemi oscillanti consente di evidenziare l'esistenza di "modi normali", stati caratterizzati da frequenze proprie, che corrispondono ad autostati del sistema. La ricerca di questi autostati può essere ricondotta a un problema agli autovalori di una matrice $n \times n$,

dove n è il numero di gradi di libertà del sistema. Si possono a questo punto introdurre in forma algebrica gli elementi essenziali dello sviluppo di Serie di Fourier, che consentirebbero di trattare pacchetti d'onde e analisi spettrale. Al percorso “evolutivo” gli autori pertanto affiancano un approccio “matematico-sperimentale”. La parte sperimentale prevede l'osservazione e/o la riproduzione di alcuni esperimenti importanti: fenomeni relativi e luce polarizzata; fenomeni di quantizzazione a due stati (ad esempio esperimento di Stern e Gerlach); interferenza e diffrazione di sistemi che manifestano un comportamento materiale e che possiamo chiamare, con le dovute cautele, “particelle”.

Il percorso era inizialmente rivolto a aspiranti insegnanti laureati in matematica, che avevano una minore familiarità con i contenuti della meccanica quantistica. L'autore del percorso riteneva però che questa minore familiarità con i contenuti fosse compensata da una minore difficoltà con i problemi simbolici e formali. In realtà così non è stato: si è osservato che la ricerca di un formalismo semplice non conduce necessariamente a un formalismo consueto. La meccanica quantistica infatti può essere formulata col simbolismo proposto da Dirac, che è un linguaggio di tipo algebrico-vettoriale ma non è per niente consueto per i laureati in matematica. Paradossalmente uno studente potrebbe essere più ben disposto all'apprendimento di tale simbolismo. L'autore ha rilevato inoltre la necessità di introdurre, fin dall'inizio del percorso, i numeri complessi, e questo è un problema molto importante per la ricerca didattica sia in fisica che in matematica. Il percorso è poi strutturato quasi esclusivamente nell'ambito dell'algebra vettoriale e delle trasformazioni lineari.

L'autore osserva che il programma di ricerca su cui si basa questa proposta è ancora in fase di sperimentazione e evoluzione. Uno dei possibili sviluppi è quello di evidenziare le differenze essenziali fra il comportamento dei fotoni e quello degli elettroni, per arrivare agli aspetti delle statistiche quantistiche.

I vantaggi di questo approccio sono nella facilitazione per lo studente dell'uso del formalismo quantistico, poiché egli applica preventivamente alcuni concetti di algebra lineare in contesti semplificati [44]. Inoltre una caratteristica apprezzabile di questo approccio, sempre secondo [44], è l'importanza che attribuisce alla linearità di una teoria. Bisogna però rilevare che il principio di sovrapposizione in meccanica quantistica ha alla base un'interpretazione che è legata al carattere statistico della misura e che non ha un analogo in fisica classica. Ad esempio l'indeterminismo quantistico deve essere assunto senza una base sperimentale, perché se ci si appoggia allo studio di un sistema lineare classico come analogia, esso evolve in maniera rigorosamente deterministica. L'analogia quindi potrebbe in-

durre lo studente ad applicare un'interpretazione classica a un formalismo quantistico.

Parte II

**Verso una proposta didattica:
concetti fondanti, strumenti
matematici, fenomenologia**

Scelta dei contenuti per una proposta didattica

7.1 PERCHÉ LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA?

Il primo problema che si pone, nella didattica della meccanica quantistica a livello preuniversitario, è: a che livello si può essere rigorosi? Si è visto che nell'economia del sistema didattico è fondamentale la precostruzione del sapere. Addirittura, sostiene Chevallard [15, p. 89], la precostruzione è una componente di base della nostra ontologia e della nostra rappresentazione spaziale del mondo. Il sapere precostruito non è quello che nella burocrazia della scuola va sotto il nome di prerequisiti. È piuttosto uno strato di sapere che non può essere reso esplicito, per mancanza di conoscenze e abilità adeguate a quel momento didattico dello studente, ma che è implicitamente compreso nel “contratto didattico” fra insegnante e allievo. Ovviamente il precostruito non può rimanere tale in eterno, altrimenti l'economia didattica non funziona più. Il tempo didattico, del resto, non è lineare (abbiamo visto che Chevallard parla di cronogenesi): non è una successione di contenuti che possono essere presentati rigorosamente in sequenza. Il tempo didattico invece presuppone e richiede anticipazioni e posticipazioni, e rimaneggiamento continuo delle conoscenze e abilità acquisite (Chevallard, come si è visto, mutua dalla psicoanalisi freudiana il concetto di *après coup*, in italiano potremmo dire “posteriorità”). In una parola, richiede rielaborazione. Nella relazione didattica, dunque, l'insegnante si distingue dall'allievo sull'asse temporale (cronogenesi): l'insegnante è capace di anticipazione (e questo è tanto più vero, come vedremo, nell'insegnamento della meccanica quantistica), cioè può sapere ciò che l'allievo può apprendere. Ma la distinzione tra insegnante e allievo si manifesta anche in relazione ai ruoli, oltre che alla dimensione temporale (Chevallard parla di topogenesi): esiste un sapere dell'insegnante e un sapere dell'allievo e quindi l'oggetto del sapere è di natura *transazionale* tra i due regimi didattici. E in meccanica

7. SCELTA DEI CONTENUTI PER UNA PROPOSTA DIDATTICA

quantistica questa distinzione è resa tanto manifesta dal fatto che il sapere dell'insegnante, data la complessità della materia trattata, è un sapere quasi "esoterico", dal punto di vista dell'allievo.

7.2 LINEE GUIDA PER UNA PROPOSTA DIDATTICA

Preso atto degli ostacoli matematici e fisici posti dall'insegnamento della meccanica quantistica e della necessità di una buona trasposizione didattica, che si serva di una certa dose di precostruzione ma "quanto basta", preso atto anche delle proposte esistenti in letteratura, di cui si è data una rassegna nel capitolo dedicato, uno degli obiettivi del presente lavoro di ricerca è quello di fondare la didattica della meccanica quantistica su due aspetti:

- la meccanica quantistica ha consentito di spiegare fenomeni fisici che non potevano essere descritti con i modelli della fisica classica o comunque trovavano in essa spiegazioni artificiose;
- la meccanica quantistica è una nuova teoria, e quindi manifesta una rottura con i modelli già assimilati, pertanto porta non solo a spiegare fenomeni prima inspiegabili, ma anche a prevedere nuovi fenomeni.

Il primo aspetto è quello che ci consentirà di fondare la proposta didattica sulla *motivazione*: mettendoci nei panni degli studenti, è proprio necessario studiare la meccanica quantistica? La risposta è: sì, perché tale teoria ci consente, ad esempio, di spiegare il funzionamento dell'atomo. Il secondo aspetto è quello che porta a fondare la proposta didattica sulla *novità*: la meccanica quantistica non è una mera estensione o modificazione della fisica classica, ma una nuova teoria che, come tale, ha delle conseguenze che nell'ambito della fisica classica non si possono nemmeno concepire. Per cogliere questi due aspetti, la proposta didattica si baserà su due tematiche: lo studio dei sistemi a due stati (la novità della teoria) e lo studio dell'atomo (l'utilità della nuova teoria).

Questa parte dedicata allo sviluppo della proposta didattica sarà così strutturata: il presente capitolo è dedicato alla scelta dei contenuti e dei concetti fondanti da cui partire (il *savoir savant*), in particolare il principio di sovrapposizione, i sistemi a due stati (spin), l'atomo, la funzione d'onda; un seguente capitolo sarà dedicato alle conoscenze matematiche necessarie, un altro capitolo conterrà una proposta di trasposizione didattica.

7.3 IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Una teoria necessita di una base di principi fisici. Conveniamo con quanto elaborato dal gruppo di ricerca in didattica della fisica dell'Università di

Udine (cfr. paragrafo 6.4) che uno dei principi fondamentali è il principio di sovrapposizione, e che una possibile base fenomenologica per illustrarlo è la polarizzazione.

Un altro esperimento che può essere di aiuto per trattare il principio di sovrapposizione è l'interferenza dei fotoni. L'esperimento di Young ha rivelato la natura ondulatoria della luce, ma altri esperimenti hanno rivelato che la luce ha anche un comportamento corpuscolare e si può quindi considerare costituita da particelle dette fotoni. Supponiamo di riuscire a fare in modo che il fascio iniziale, utilizzato per questo ipotetico esperimento di Young modificato, sia molto debole, tale da emettere un solo fotone alla volta. Si ha uno schermo con doppia fenditura, che nell'esperimento originale di Young funge da separatore del fascio di luce in due componenti, mentre qui costringe il fotone a prendere una strada oppure un'altra. Oltre la doppia fenditura, uno schermo con rivelatore mostrerà che anche con singoli fotoni si formano le tipiche figure di interferenza. La novità da sottolineare sta nel fatto che, ragionando in termini di singolo fotone, non si può prevedere con certezza in quale fenditura esso passerà; si può solo assegnare una certa probabilità.

Un altro aspetto importante si può mettere in evidenza con un esperimento illustrato in [27]. Supponiamo che ci venga il desiderio di stabilire in quale fenditura passa il singolo fotone. Se si dispongono rivelatori in A o in B per cercare di capire dove passano i fotoni, si trova certamente che passeranno in A o in B ma in questo caso nello schermo finale si misura una frequenza di fotoni pari alla semplice somma della frequenza di fotoni passati in A e della frequenza di fotoni passati in B. Ebbene, il solo fatto di osservare dove passano i fotoni, cioè di misurare, distrugge l'interferenza: nello schermo non si vedranno più le caratteristiche figure.

Lo stesso aspetto è messo in evidenza ancora da Feynman [28] con un esperimento sempre con doppia fenditura ma con elettroni. Avendo a disposizione una sorgente di elettroni con intensità molto bassa e un rivelatore molto sensibile, gli elettroni non arriveranno allo schermo sotto forma di corrente continua, ma di singoli impulsi, separati da intervalli di tempo in cui non si registra alcun evento. Questa premessa serve per motivare il fatto che consideriamo gli elettroni come particelle: supponendo che lo schermo sia cosparso di rivelatori, non ci sarà mai una mezza risposta di un rivelatore né più rivelatori scatteranno simultaneamente. Se misuriamo il numero medio di impulsi al secondo, cioè la probabilità relativa che l'elettrone passi per la doppia fenditura verso lo schermo in funzione della posizione sullo schermo, troveremo di nuovo la nota figura di interferenza. L'esito del fenomeno è insolito, secondo il "senso comune", perché se gli elettroni sono particelle, devono passare o in una fenditura o nell'altra, perciò

sullo schermo si dovrebbe vedere la somma delle probabilità degli elettroni di passare in una fenditura o nell'altra (secondo una nota legge del calcolo delle probabilità). Si può verificare direttamente che gli elettroni passano in una fenditura o nell'altra coprendo alternativamente le due fenditure e misurando la probabilità che l'elettrone passi nella fenditura non coperta. Un altro esito insolito: in questo caso si trova proprio ciò che volevamo trovare prima e cioè che sullo schermo si vede non la figura di interferenza ma la somma delle probabilità degli elettroni di passare in una fenditura o nell'altra.

Perché quando non si guarda dove passa la particella si vede interferenza mentre se si compie una misura per vedere dove passa la particella si ottiene una semplice somma di probabilità?

Esaminiamo anzitutto il caso in cui si ha interferenza. L'andamento della probabilità che si ottiene in questo caso è in tutto simile all'andamento dell'intensità nell'interferenza di onde. Poiché per le onde sappiamo che l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda, per analogia ipotizziamo che la probabilità che il fotone o l'elettrone passino nella doppia fenditura sia il quadrato di una quantità che chiamiamo *ampiezza di probabilità*. Vedremo dopo quali caratteristiche deve avere questa ampiezza. Per adesso possiamo dire che *nel mondo quantistico si sommano le ampiezze e si fa il quadrato per ottenere la probabilità*, e quindi si trova un caso in cui la probabilità non segue una ben nota legge del calcolo della probabilità. Tale legge è invece rispettata se decidiamo di andare a vedere dove passa la particella: in tal caso la probabilità totale è la somma delle singole probabilità. Torneremo dopo su questo punto, per sottolineare il ruolo della probabilità in meccanica quantistica.

Siamo dunque a questo punto: se non osserviamo dove passa la particella, non possiamo sapere con certezza dove passerà ma possiamo assegnare una probabilità che arrivi in un dato punto dello schermo (che non si calcola secondo le leggi classiche della probabilità), d'altra parte è certo che passerà in una o nell'altra fenditura o che non si divide tra le due fenditure. Dirac suggerisce quindi di considerare il fascio iniziale (costituito da un solo fotone o da un solo elettrone) come costituito dalla sovrapposizione di due stati, corrispondenti al passaggio della particella in una o nell'altra. Per vedere dove passa la particella, possiamo ad esempio misurarne una sua grandezza fisica. Nel momento in cui misuriamo, la particella passa dall'essere nella sovrapposizione di due stati all'essere in uno stato ben preciso, ciò accadrà sempre con una data probabilità che però, abbiamo visto, si tratta con le leggi classiche della probabilità. Dirac generalizza il caso così: osservare dove passa una particella vuol dire misurarne una sua grandezza fisica. Chiamiamo a e b i valori assunti dalla grandezza quando

la particella passa nella fenditura A e in quella B . Noi non sappiamo dove passerà la particella ma sappiamo che se passa in A la grandezza in esame ha sicuramente il valore a mentre se passa in B ha sicuramente il valore b . Quando la particella è nello stato iniziale, si considera come se si trovasse contemporaneamente in due stati. Questa sovrapposizione è inconcepibile dal punto di vista classico. Ciascuno dei due stati componenti ha un peso nella sovrapposizione (nell'esempio considerato il peso è lo stesso) e il significato di peso sarà precisato nel seguito della teoria. Quando osserviamo dove passa la particella, e quindi quando cessa la sovrapposizione, la misura della grandezza fisica in esame sarà talvolta a , talvolta b con una legge di probabilità che dipende dai pesi relativi di A e B nel processo di sovrapposizione. In questo caso la probabilità che la particella giunga in un certo punto dello schermo si calcola secondo le leggi classiche della probabilità. Nota bene: l'esito della misura non è un valore intermedio fra a e b ma è comunque a o b con una certa probabilità. Nel nostro caso le probabilità sono entrambe $1/2$ ma si dà il caso che potrebbero essere una qualsiasi coppia di probabilità la cui somma è uno. Ecco perché in generale si può dire che i due stati compongono la sovrapposizione in un numero infinito di modi.

7.4 SISTEMI A DUE STATI

Per dare un supporto concreto ai principi introdotti, si potrebbero considerare esperimenti effettuati con apparati di Stern e Gerlach. Questi dovrebbero consentire di parlare dello spin, una proprietà che in fisica classica non è definita, e di dare una base quantitativa ai principi introdotti. Del resto, lo studio dei sistemi a due stati è un passaggio fondamentale nella didattica della meccanica quantistica. *A solid understanding of problems involving two-state systems will turn out to be rewarding to any serious student of quantum mechanics* [62, p. 2].

Un apparato di Stern e Gerlach può essere presentato come un dispositivo che, grazie a un campo magnetico non uniforme, riesce a deviare la traiettoria delle particelle. Introducendo il concetto di spin, abbiamo un esempio di quel tipo di sapere che Chevallard chiama *precostruito* (cfr. paragrafo 3.6). Qual è il livello di precostruzione del sapere che può essere accettato per un'adeguata comprensione del funzionamento di questo apparato sperimentale? Lo studente avrà già un'idea delle caratteristiche atomiche (necessarie, ad esempio, per affrontare lo studio della chimica), idea che, per forza di cose, costituisce un sapere precostruito, perché per spiegare la struttura atomica occorrerebbe già conoscere la meccanica quantistica. Diamo perciò per scontato che lo studente accetti che una particella come l'elettrone abbia una proprietà fisica chiamata spin, grandezza analoga, dal

punto di vista dimensionale, al momento angolare orbitale ma non dovuta a rotazioni, bensì proprietà intrinseca della particella. L'esperimento originale è stato condotto su atomi di argento, con numero atomico 47, il cui momento magnetico è determinato dallo spin dell'elettrone dispari. Il campo magnetico dell'apparato di Stern e Gerlach interagisce col momento magnetico degli atomi di argento e ne modifica la traiettoria. Poiché i momenti magnetici degli atomi sono orientati in maniera casuale, ci si aspetta che le traiettorie vengano deviate secondo angoli pure casuali e variabili con continuità in un certo intervallo. L'esperimento invece ha rilevato che gli atomi vengono deflessi solo secondo due possibili traiettorie. Ciò implica che lo spin, che determina il momento magnetico, può assumere solo due possibili valori. In analogia con l'esempio del fotone, ogni atomo ha una probabilità del 50 per cento di avere un valore dello spin o l'altro, come il fotone ha il 50 per cento di probabilità di passare in una fenditura o nell'altra. I due stati dell'atomo in cui lo spin assume un valore o l'altro sono assunti come stati fondamentali. In base al principio di sovrapposizione esplicitato si può dire che ogni atomo, prima di passare nel dispositivo, si trova in uno stato che è una sovrapposizione dei due stati fondamentali. Il passaggio degli atomi nell'apparato equivale a una misura dello spin. Questo pone un problema dal punto di vista del "sapere", cioè *il ruolo della misura in meccanica quantistica*, ma dal punto di vista del "sapere insegnato" non è difficile, per lo studente, interpretare il fatto che dall'apparato esca il 50 per cento di atomi con un valore dello spin e il 50 per cento degli atomi con l'altro valore come una misura di una grandezza fisica dell'atomo che chiamiamo spin. Qui si manifesta il ruolo anticipatorio dell'insegnante nella cronogenesi del sapere, introducendo il concetto di misura ma sorvolando sui problemi che esso comporta in meccanica quantistica, prevedendo una ripresa e risistemazione del concetto.

7.5 L'ATOMO

Per la meccanica quantistica, un dato di fatto che può ben essere colto da uno studente, è questo: *la meccanica classica non fornisce una descrizione corretta degli eventi atomici*. Il motivo, in prima approssimazione, può essere ritrovato nel fatto che gli eventi atomici riguardano sistemi "piccoli": poiché la fisica opera sulle entità che si possono misurare (le c.d. "grandezze fisiche"), e poiché possiamo osservare un oggetto solo facendolo interagire con un apparato esterno, *ogni misura è accompagnata da una perturbazione dell'oggetto da misurare*. Dirac [20] suggerisce di chiamare "grande" un sistema fisico in cui la perturbazione che accompagna la misura può ritenersi trascurabile. Che la meccanica classica non sia più soddisfacente, segue da

un altro fatto. Si potrebbe pensare, almeno in linea teorica, di avere a disposizione strumenti di misura sempre più perfezionati tecnicamente, che riducano il più possibile la perturbazione che accompagna la misura. Ma questo, dice sempre Dirac, non è possibile: dobbiamo accettare che esista un limite intrinseco ai nostri mezzi di osservazione. Ciò premesso, si può dare un senso ai concetti di grande e piccolo, e individuare gli ambiti di applicazione di ciò che va sotto il nome di meccanica classica e della nuova teoria che chiamiamo meccanica quantistica.

Per introdurre i principi che giustificano il funzionamento dell'atomo, possiamo fare un'analogia col moto dei pianeti. Ipotizzando che i pianeti siano soggetti all'interazione gravitazionale col sole e applicando la legge fondamentale del moto, si può determinare il moto dei pianeti. La legge fondamentale del moto, per i pianeti, è la seconda legge di Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Da un punto di vista fisico il problema è determinato: conoscendo la forza si può ricavare l'accelerazione, quindi la velocità e la posizione. Da un punto di vista matematico il problema è più complesso. Negli ordinari problemi di fisica (a carattere liceale) proponiamo agli studenti casi in cui le forze sono costanti e quindi le accelerazioni sono costanti (oppure casi particolari di forze variabili trattabili per altre vie). In generale però occorre ricordare che l'equazione del moto è un'equazione differenziale del secondo ordine: l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo, quindi l'equazione del moto ha come incognita una funzione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ che compare, nell'equazione, derivata due volte.

In meccanica quantistica l'equivalente della legge di Newton è l'equazione di Schrödinger. Che tipo di equazione è e che cosa rappresentano le sue soluzioni? La funzione incognita non è più la posizione della particella al variare del tempo, ma una funzione della posizione e del tempo detta "funzione d'onda", che assomiglia proprio a un'equazione d'onda e che quindi ha un'ampiezza. Tale ampiezza, in maniera consistente con quanto abbiamo già osservato, ci consente di calcolare la probabilità che la particella assuma un certo stato: la probabilità è il modulo al quadrato dell'ampiezza. Come nella legge di Newton abbiamo bisogno di sapere a quale forza è soggetto il corpo per determinarne il moto, così nell'equazione di Schrödinger abbiamo bisogno di conoscere il contesto fisico della particella: tale equazione è formulata in termini dell'energia cinetica e dell'energia potenziale cui è soggetta la particella. La cosa notevole è che per quanto la meccanica quantistica abbia un sottofondo probabilistico, come abbiamo già osservato, la sua equazione fondamentale, l'equazione di Schrödinger, è una legge

deterministica come la legge di Newton: se noi conosciamo le condizioni iniziali di una particella, l'equazione consente di conoscere la funzione d'onda della particella in tutte le posizioni e in ogni istante successivo. Non è l'equazione che è probabilistica, ma l'interpretazione delle sue soluzioni. Questa, come hanno dimostrato Heisenberg, Bohr, Born, Von Neumann e altri, non è una contraddizione. Ma per questa ragione, dice Feynman [28], *quantum mechanics appears as a difficult and somewhat mysterious subject to a beginner*.

Anche l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale del secondo ordine, come la legge di Newton, ma è alle derivate parziali, perché la funzione d'onda dipende sia dalla posizione che dal tempo. Non abbiamo, a differenza di quanto facciamo con la legge di Newton, semplificazioni che ci consentono di risolvere l'equazione di Schrödinger a livello di scuola superiore. Non ci si può esimere però dal sottolineare il carattere fondamentale che ha tale equazione per lo studio di sistemi che non obbediscono alle leggi della fisica classica.

7.6 LA FUNZIONE D'ONDA

Partiamo dal fatto che la materia manifesta in certe circostanze un comportamento ondulatorio. Possiamo descrivere una particella con una equazione analoga all'equazione di un'onda armonica

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{ik(x - vt)}.$$

Bisogna però fare un passo indietro, e ricordare alcune proprietà delle onde. Consideriamo due onde emesse da sorgenti monocromatiche. Ipotizziamo anche che le sorgenti siano coerenti, cioè che la differenza di fase tra le due onde non cambi nel tempo. Nell'interferenza di onde coerenti, l'intensità risultante in ogni punto non varia nel tempo. Poiché in generale non è possibile rendere coerenti due diverse sorgenti di luce, perché gli atomi delle due sorgenti agiscono da emettitori in maniera indipendente, per ottenere sorgenti coerenti si può usare il metodo della doppia fenditura. Consideriamo due onde coerenti che interferiscono (per semplicità in $x = 0$):

$$y_1 = A \sin \omega t$$

$$y_2 = A \sin(\omega t + \phi).$$

Per il principio di sovrapposizione, l'onda risultante è

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Sia I l'intensità risultante e I_0 l'intensità che un'onda produrrebbe da sola. Si ha

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2$$

e quindi

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}.$$

L'intensità quindi varia da un minimo di zero (quando $\phi = \pi$, cioè le onde sono in opposizione e l'interferenza è distruttiva) a un massimo di $4I_0$ (quando $\phi = 0$, cioè le onde sono in fase e l'interferenza è costruttiva).

Torniamo ora agli esperimenti quantistici: questi (ad esempio la diffrazione elettroni) ci dicono che le particelle hanno un comportamento ondulatorio. A una particella possiamo associare una lunghezza d'onda (secondo la relazione di de Broglie), perciò possiamo dire che a un insieme di particelle tutte uguali corrisponde un insieme di onde coerenti. Il problema è che una particella deve essere localizzata (nello spazio e nel tempo) mentre un'onda non lo è. A una particella quindi non possiamo banalmente associare una generica equazione d'onda armonica. Quale equazione d'onda dobbiamo allora associare a una particella? Ce lo dice l'equazione di Schrödinger, le cui soluzioni, nota la situazione fisica cui è soggetta la particella (essenzialmente l'energia), sono le "funzioni d'onda". Come si è detto, non è possibile trovare una scorciatoia per risolvere un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali come l'equazione di Schrödinger, però possiamo riflettere sulla sua soluzione.

Se ci limitiamo, in questo momento, ai concetti quantistici e non alle loro interpretazioni, osserviamo che la funzione d'onda è una funzione $\Psi(x, t)$ che dipende dalla posizione e dal tempo e tale che $|\Psi(x, t)|^2 dx$ è la probabilità di trovare la particella in una posizione fra x e $x + dx$ all'istante t . Da quest'ultima caratteristica della funzione d'onda segue che la probabilità di trovare la particella in tutto lo spazio deve essere uno, e ciò si traduce matematicamente con la c.d. condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

L'equazione di Schrödinger contiene il potenziale in cui si trova la particella. In particolare, se si considera un potenziale nullo, quindi una particella libera, si trova che le soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono (cfr. appendice B per alcuni dettagli sull'equazione di Schrödinger)

$$\Psi_k(x, t) = A e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} \quad (7.1)$$

con $k = \pm \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Scegliamo questo caso particolare dell'equazione di Schrödinger perché è strettamente legato alle onde. La presenza dei fenomeni ondulatori nei programmi effettivamente svolti nella scuola secondaria è abbastanza consolidata, anche se è un argomento non sempre ben assimilato. Ci può servire, però, come punto di partenza per trattare qualche concetto di meccanica ondulatoria, perché fornisce strumenti matematici, anche se non di facile uso per gli studenti, comunque non troppo lontani dalla loro esperienza.

Alla particella libera corrisponde una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}.$$

Una siffatta onda trasporta una quantità di moto

$$p = \hbar k$$

e ha velocità

$$v = \frac{\hbar|k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}.$$

Possiamo confrontare la (7.1) con l'equazione dell'onda armonica, ma abbiamo detto che un'onda di questo tipo, associata a una particella, in realtà non ha significato fisico perché si estende all'infinito nello spazio e nel tempo. Una motivazione più rigorosa fornita dalla meccanica quantistica è che una funzione di questo tipo non è normalizzabile. Come ottenere allora una funzione d'onda per la particella libera che abbia significato fisico?

Torniamo a un esempio tratto dalle onde. Consideriamo due onde armoniche (per semplicità questa volta solo la loro parte spaziale)

$$y_1 = A \sin k_1 x$$

$$y_2 = A \sin k_2 x$$

con k_1 molto vicino a k_2 . Se le due onde si sovrappongono si ottiene l'onda risultante

$$y = 2A \cos(\Delta k \cdot x) \sin(k_0 \cdot x)$$

dove

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

È interessante vedere il grafico della funzione ottenuta: si ottiene un'onda con k pari alla media dei valori corrispondenti alle due onde, ma con ampiezza che varia a sua volta in maniera periodica. Si ottiene cioè un

pacchetto d'onde che inizia a essere localizzato. Si intuisce che se si sommano più funzioni, si otterrà un pacchetto sempre più localizzato. Questo esempio può servire per illustrare il principio di indeterminazione: a un'onda armonica, con k ben definito, corrisponde una particella con quantità di moto p ben definita, ma, poichè una tale onda si estende in tutto lo spazio, la posizione della particella non è ben definita; d'altra parte, a un pacchetto d'onda corrisponde una particella localizzata, ma nel pacchetto si disperde l'informazione su k e quindi si avrà una quantità di moto p non più ben definita.

Il supporto teorico, per ottenere una sovrapposizione di funzioni significative dal punto di vista fisico, ci è fornito dallo sviluppo in serie di Fourier.

Scelto un opportuno insieme di funzioni goniometriche, una funzione può essere espressa come combinazione lineare in tale base, tramite la cosiddetta serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

dove $f(x)$ è una funzione definita in $[-L, +L]$. Affinchè una funzione possa essere approssimata con una serie di Fourier, occorre definire un opportuno spazio di funzioni, una condizione sulla successione $\{c_n\}$ e un tipo di convergenza. Rimandiamo i dettagli matematici eventualmente necessari sulla serie di Fourier all'appendice E. Ci basti qui sottolineare che lo spazio funzionale deve essere uno spazio di Hilbert, uno spazio a dimensione infinita in cui è possibile generalizzare il concetto di base ortonormale degli spazi a dimensione finita. Se $f(x)$ è già una funzione periodica con periodo $2T$, può essere sviluppata in serie di Fourier con frequenze discrete $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$. Nello sviluppo in serie, i coefficienti rappresenteranno quindi l'ampiezza del contributo di ogni componente armonica pura di frequenza ω_n . Se la funzione non è periodica (quindi $T \rightarrow \infty$), le frequenze dello sviluppo in serie sono molto vicine e la sommatoria tende a un integrale del tipo

$$f(t) \sim \int g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

dove $g(\omega)$ rappresenta il contributo all'ampiezza delle frequenze comprese fra ω e $\omega + d\omega$. Data una $f(t)$, la corrispondente distribuzione in frequenze $g(\omega)$ si dice trasformata di Fourier, mentre, se è assegnata la $g(\omega)$, la $f(t)$ si dice antitrasformata di Fourier. Ponendo $k = \frac{n\pi}{L}$, si trova che (per i dettagli cfr. sempre appendice E)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ikx} dk$$

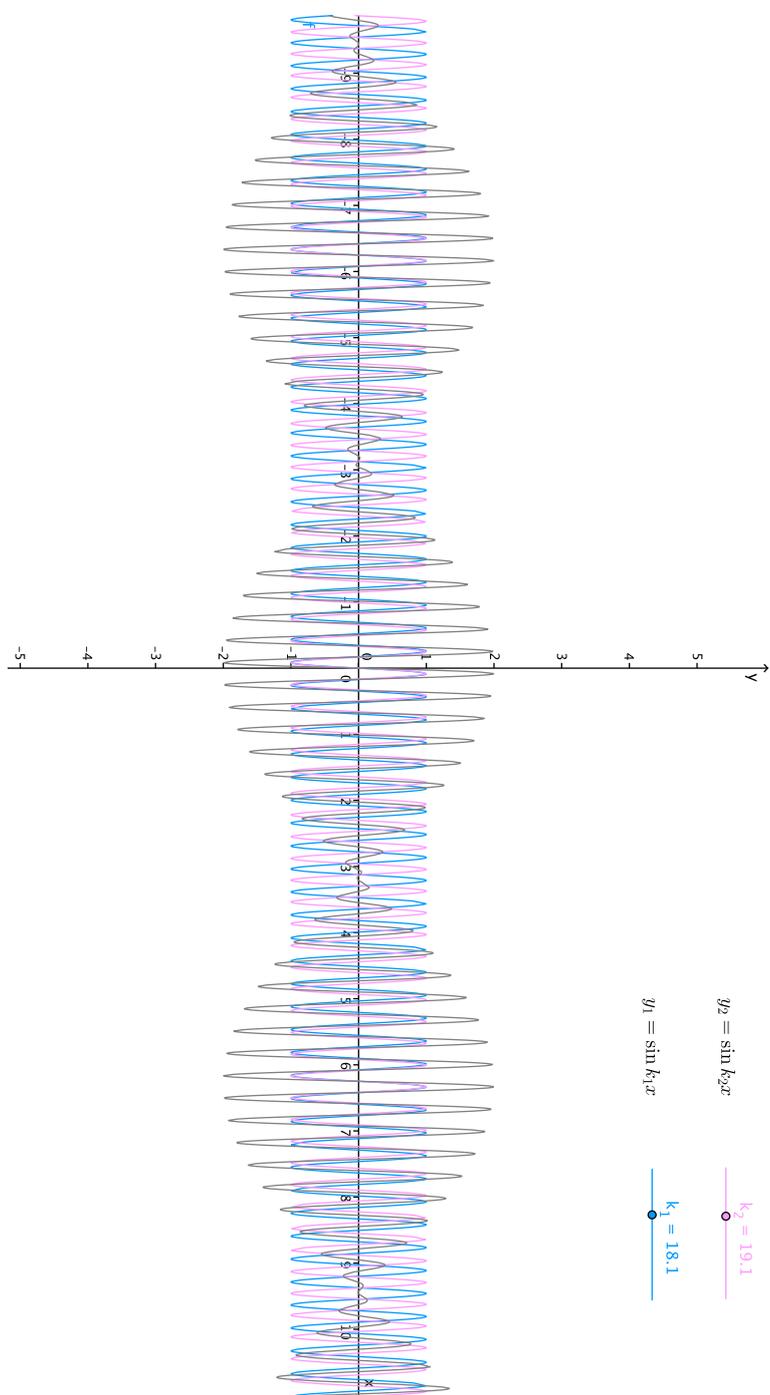


Figura 7.1: Pacchetto d'onde

con

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Vediamo come tutto questo si applica alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. Abbiamo visto che in tal caso le soluzioni sono del tipo (7.1). Per avere una soluzione con significato fisico dobbiamo costruire un pacchetto d'onde, e lo possiamo fare perché una combinazione lineare di soluzioni (7.1) è ancora una soluzione dell'equazione di Schrödinger. In particolare si avrà

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk,$$

dove $\phi(k)$ è il contributo all'ampiezza dei valori di k compresi fra k e $k + dk$, ovvero dei valori della quantità di moto compresi fra p e $p + dp$.

Il problema quantistico consiste nel determinare la trasformata $\phi(k)$, conoscendo lo stato iniziale $\Psi(x, 0)$ della particella, e quindi la funzione d'onda $\Psi(x, t)$. Nelle proposte didattiche che andremo a elaborare non sarà possibile applicare questa procedura. Si potrà però tentare di esaminare un possibile stato iniziale $\Psi(x, 0)$ di una particella libera e la corrispondente trasformata $\phi(k)$ per riflettere sulla relazione di indeterminazione tra posizione e quantità di moto.

7.7 GLI STATI PERMESSI

Un altro caso di funzione d'onda che è utile trattare è la soluzione dell'equazione di Schrödinger per la buca di potenziale infinita. Questo caso infatti consentirebbe di mostrare agli studenti un esempio di sistemi con energia quantizzata simile all'atomo ma molto più semplice. Lo studio dell'atomo di idrogeno, infatti, che pure è il più semplice e può essere trattato in maniera completa, è molto lungo e complesso dal punto di vista matematico (l'equazione di Schrödinger è risolta in coordinate sferiche e occorre, tra l'altro, servirsi dei polinomi di Laguerre e di Legendre, cfr. ad esempio [38, p. 152]). La buca di potenziale infinita invece consente di trattare esempi quantitativi con un solo insieme di funzioni goniometriche.

In particolare, se una particella è soggetta a un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{altrove} \end{cases} \quad (7.2)$$

si trova che le soluzioni dell'equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo sono le funzioni

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

ciascuna corrispondente a un'energia

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Tali funzioni (che, cosa utile per un'eventuale rappresentazione, hanno la forma di onde stazionarie) sono ortonormali e costituiscono un insieme completo. Ogni altra funzione quindi può essere espressa come combinazione lineare del tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

ove, come si è già detto, il coefficiente c_n è la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore E_n .

La soluzione generale dell'equazione di Schrödinger sarà

$$\Psi(x, t) = f(x)e^{-iEt/\hbar}.$$

Si ha quindi $\Psi(x, 0) = f(x)$ e si possono ricavare i coefficienti c_n con gli integrali

$$c_n = \int \psi_n(x)\Psi(x, 0)dx.$$

7.8 ALCUNI CONCETTI FONDANTI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Come si è visto nella rassegna sulle proposte didattiche oggetto di studio (o già elaborate) da parte dei gruppi di ricerca in didattica della fisica, ogni proposta parte da alcuni concetti fondanti della meccanica quantistica, selezionati in base a criteri scientifici. Questa precisazione è necessaria in quanto, volendo che il presente lavoro di ricerca sia anche uno strumento per l'insegnante, si verifica talvolta (come si è visto nell'esame di alcune ricerche sulla formazione degli insegnanti e come si vedrà nel capitolo sulle attività da me svolte con gli insegnanti) che, nella pratica didattica quotidiana, o non si ha una chiara idea di che cosa sia un "concetto fondante" o la scelta dei concetti da cui partire non è motivata da ragioni scientifiche ma da contingenze più o meno stringenti (o da una non meglio identificata "libertà di insegnamento").

Per comprendere il seguito del lavoro, riassumiamo i concetti fondanti che fonderanno l'ipotesi di proposta didattica che sarà descritta più avanti. Tale elenco non è da intendersi come l'insieme dei concetti che è importante che lo studente conosca, ma come un insieme di concetti fra i quali l'insegnante deve scegliere per poter elaborare una proposta didattica; scelta arbitraria, ma motivata da ragioni scientifiche e epistemologiche.

Principio di sovrapposizione. La meccanica quantistica è una teoria che, come si è ricordato più volte, necessita, per la sua descrizione, dell'introduzione di uno spazio vettoriale, in particolare di uno spazio di Hilbert. Una caratteristica fondamentale della teoria, senza la quale non si comprenderebbe il concetto di *stato quantico*, è la linearità. Ecco perché si ritiene importante, seguendo anche le indicazioni di autorevoli gruppi di ricerca più volte citati, inserire tra i concetti fondanti da cui partire il principio di sovrapposizione, che consente di costruire lo stato quantico.

Stato quantico. Qualsiasi formulazione della meccanica quantistica si voglia seguire, l'oggetto di studio della teoria è lo *stato*. Mentre nella fisica classica si fa uso di modelli abbastanza diversificati (punto materiale e corpo rigido, ad esempio) la cui scelta è dettata dall'opportunità, il concetto di stato quantico non è un modello cui possiamo liberamente rivolgerci per descrivere la teoria, ma è l'elemento dello spazio di Hilbert in cui devono essere descritti i sistemi che obbediscono alla teoria quantistica.

Misura. L'operazione di misura, come si è visto, è una caratteristica che contraddistingue la fisica classica da quella quantistica. Mentre nella fisica classica la misura è in generale una lettura su uno strumento o un calcolo mediante leggi fisiche, comunque una "presa d'atto" dello stato del sistema in esame, in meccanica quantistica la misura di un'osservabile *può modificare* lo stato del sistema, con un esito probabilistico. Si potrebbe obiettare che anche in una misura classica siamo costretti a introdurre considerazioni probabilistiche per interpretare le fluttuazioni statistiche di una misura, ma tali fluttuazioni sono dovute a limiti tecnici o umani; in una misura quantistica invece il carattere probabilistico è intrinseco alla teoria.

Ampiezza di probabilità. Le ampiezze sono i coefficienti dei vettori dello spazio di Hilbert che definiscono uno stato quantico. Sono in generale numeri complessi. Il modulo al quadrato dell'ampiezza di probabilità fornisce la probabilità che l'osservabile di cui si compie una misura assuma un certo valore.

Spin. Un esempio di osservabile è lo spin. Si ritiene importante, nel presente lavoro, introdurre lo spin perché è una grandezza fisica che non ha un analogo in fisica classica ed è invece una caratteristica intrinseca delle particelle quantistiche. Si presta inoltre alla descrizione dei

sistemi a più stati. Tale descrizione, comunque, può essere molto utile portata avanti (come abbiamo visto nei lavori di ricerca già illustrati) col supporto di altra fenomenologia, come ad esempio la polarizzazione del fotone.

Equazione di Schrödinger. È l'equazione “del moto” della meccanica quantistica, cioè l'equazione che consente di determinare l'evoluzione di uno stato quantico. Ribadiamo che, anche se all'esito di una misura di uno stato occorre attribuire carattere probabilistico, l'equazione di Schrödinger è una legge deterministica.

Funzione d'onda. È la soluzione dell'equazione di Schrödinger e un'altra maniera di rappresentare lo stato quantico. L'informazione fisica fornita dalla funzione d'onda viene dalla sua ampiezza, il cui modulo quadro è pari alla probabilità di trovare la particella in un certo stato. Si ritiene importante, in questa sede, fissare il concetto di funzione d'onda tra quelli fondanti, perché la meccanica ondulatoria è una formulazione storicamente importante della meccanica quantistica. L'insieme delle caratteristiche della funzione d'onda inoltre ha molte analogie con le proprietà delle onde che si studiano in fisica classica.

Principio di indeterminazione. In meccanica quantistica esistono grandezze compatibili e incompatibili, intendendo con questa terminologia il fatto che possano o meno essere misurate contemporaneamente con arbitraria precisione. Inseriamo perciò anche l'indeterminazione fra i concetti fondanti, perché è una caratteristica intrinseca della meccanica quantistica (non si tratta, come si è detto anche per la misura, di un'indeterminazione dovuta a limiti di strumenti o sperimentatori). La compatibilità si traduce matematicamente con la commutatività. Le relazioni di commutazione portano ai diversi principi di indeterminazione della meccanica quantistica.

7.9 UNA BASE FENOMENOLOGICA

Per elaborare una proposta didattica sulla meccanica quantistica, oltre alla scelta dei concetti fondanti, occorre anche individuare una solida base fenomenologica. La scelta degli esperimenti da cui partire dipende anzitutto da ragioni scientifiche ma nel caso della fisica moderna anche da ragioni tecniche: non in tutte le scuole è presente un laboratorio didattico o, se è presente, la sua dotazione è limitata per la maggior parte a esperienze rela-

tive alla fisica classica.¹ Sussiste inoltre l'ipotesi, che riprenderemo alla fine di questo lavoro, che gli insegnanti non siano adeguatamente sensibilizzati all'uso di apparecchiature di fisica moderna a scopo didattico, che pure esistono: le scuole, talvolta, usufruiscono di finanziamenti dedicati all'acquisto di materiali per laboratori didattici, ma il materiale relativo alla didattica della fisica moderna spesso rimane fuori da questi piani di acquisto, perché gli insegnanti non sono a conoscenza di tale materiale o non ne riconoscono l'utilità, e quindi non ne propongono l'acquisto. Rimane comunque la possibilità di servirsi delle smisurate risorse della rete: è possibile infatti trovare valide simulazioni di importanti esperimenti che possono degnamente fare da supporto all'attività didattica.

A sostegno delle proposte didattiche che andremo a illustrare, proponiamo qui due esperimenti, scelti sulla base dei concetti fondanti che sono stati prima illustrati e sulla possibilità di acquisto del relativo materiale da parte delle scuole. Si tratta della diffrazione degli elettroni, che consente di evidenziare come, in certe circostanze, quelle entità che pensiamo come "particelle" manifestino un comportamento ondulatorio, e dell'esperimento di Franck ed Hertz, che consente di visualizzare il comportamento discreto dei fenomeni microscopici. Si tratta di esperienze che richiedono certo una dotazione sofisticata e costosa, ma presente nei più diffusi cataloghi di materiale per laboratorio a uso didattico, e non è escluso, perciò, che in presenza di finanziamenti dedicati allo sviluppo dei laboratori tali apparecchiature possano essere acquistate dalle scuole. In ogni caso si potrebbero organizzare, per gli studenti, visite in laboratori universitari dotati dell'apposito materiale. Il laboratorio didattico di fisica dell'Università di Cagliari presso la Cittadella di Monserrato, ad esempio, oltre che assolvere al suo ruolo principale, a servizio dei corsi universitari che prevedono fisica sperimentale, consente anche lo svolgimento di attività formative per studenti e insegnanti delle scuole secondarie.

7.9.1 *Diffrazione degli elettroni*

L'esperimento di Young (1801) forniva la prima prova della natura ondulatoria della luce. Con le onde si manifesta l'interferenza: se due onde si sovrappongono in un punto, si sommano; ma l'intensità risultante in quel punto può essere maggiore o minore dell'intensità delle singole onde. Supponendo che le due onde siano monocromatiche e coerenti (la relazione tra

¹Questa considerazione è frutto della mia personale esperienza di insegnante. Sarebbe interessante uno studio sulla presenza dei laboratori didattici nelle scuole superiori e sulla loro dotazione, anche solo a livello locale, ma tale studio sarebbe l'oggetto di un'altra tesi di dottorato.

le fasi non cambia nel tempo), l'intensità totale in un punto dipende dalla differenza di fase delle due onde ma non cambia nel tempo. Poiché è difficile avere due onde coerenti, si usa lo stratagemma della doppia fenditura, che serve per creare due sorgenti coerenti. Dopo che la luce ha attraversato la doppia fenditura, nello schermo si vede la figura di interferenza. Ciò dimostra che la luce si comporta come un'onda. Quando la luce attraversa una fenditura di larghezza confrontabile con la lunghezza d'onda della luce, si manifesta anche il fenomeno, anch'esso tipico delle onde, della diffrazione, che consiste nella deviazione e nello sparpagliamento dell'onda: quando la luce investe la singola fenditura, si divide in singole onde che interferiscono fra di loro. L'effetto è quello di vedere su uno schermo non l'immagine nitida della fenditura, ma un insieme di bande alternate chiare e scure simili alla figura di interferenza. In generale, quindi, quando la luce attraversa una doppia fenditura, si dovrebbe tener conto sia dell'interferenza che della diffrazione.

Se anziché due fenditure ne consideriamo N , si ottiene un reticolo di diffrazione. L'effetto congiunto di interferenza e diffrazione, in un reticolo, è la diversa disposizione delle frange: quelle luminose diventano più strette e compaiono massimi secondari meno intensi. La condizione per i massimi principali è

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Al crescere di N i massimi principali diventano più netti. L'ampiezza angolare per il massimo principale in corrispondenza dell'angolo θ relativo a un dato ordine m (cioè l'intervallo fra il picco e il primo minimo adiacente) è

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

dove d è la distanza fra le fenditure e N è il numero delle fenditure. Il massimo centrale è il più stretto ($\cos \theta = 1$). La larghezza del picco cresce al crescere di θ , quindi verso frange di ordine superiore. I massimi diventano più netti (cioè $\Delta\theta$ diventa più piccolo) al crescere del prodotto Nd (che è la larghezza totale del reticolo). Un reticolo può avere $N = 10000$ fenditure distribuite su qualche centimetro. In tal caso i massimi sono molto stretti e se ne può misurare la posizione con grande precisione. Per questo motivo i reticoli sono usati per misurare lunghezze d'onda.

Osservando che fasci di particelle producono fenomeni di diffrazione, si può verificare che la materia manifesta un comportamento ondulatorio. Esistono apparecchiature a scopo didattico che consentono di osservare la diffrazione degli elettroni (es. PHYWE). In un recipiente sferico in cui è stato fatto il vuoto, si manda un fascio focalizzato di elettroni, tutti con

la stessa energia cinetica, verso uno strato policristallino di grafite che funge da reticolo. Un solido cristallino, infatti, è costituito da atomi disposti in maniera regolare. A seconda di come sono disposti gli atomi, si può individuare una cella elementare, che è l'unità fondamentale del cristallo (l'unità che si ripete uguale a se stessa) e che corrisponde alla fenditura di un reticolo. Nell'esperienza in questione, gli elettroni diffratti dai cristalli di grafite si distribuiscono casualmente nello spazio e generano una figura di interferenza nella parte interna della superficie del bulbo, che è rivestita di uno strato fluorescente. Si osserverà un insieme di cerchi concentrici luminosi. All'interno del tubo un insieme di elettrodi consente di selezionare, accelerare e focalizzare gli elettroni che poi attraverseranno la grafite.

È possibile calcolare la lunghezza d'onda associata agli elettroni, mediante la relazione di de Broglie. Si ha

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \sqrt{\frac{h^2}{2meV_A}}$$

dove K è l'energia cinetica dell'elettrone e V_A è il potenziale anodico. Tenendo conto che $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js, $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg, si può scrivere

$$\lambda = \sqrt{\frac{1500\text{kV}}{V_A}} \text{ pm}$$

Per ricavare le condizioni di diffrazione si può trascurare la struttura della cella elementare, che influisce solo sull'intensità dei fasci diffratti. Indicando con θ l'angolo che il raggio forma col piano di incidenza precedentemente fissato e con d la distanza fra piani adiacenti che passano attraverso le celle elementari, si può dimostrare che affinché si abbia interferenza costruttiva deve essere (legge di Bragg)

$$2d \sin \theta = m\lambda.$$

Nel caso della grafite policristallina, gli elettroni sono diffusi in tutte le direzioni, quindi l'interferenza degli elettroni diffratti avviene su coni che hanno un'apertura α . Interpretando il fenomeno come diffrazione di Bragg, che è più semplice ma non esatta, per questo caso, l'angolo di Bragg risulta $\theta = \frac{1}{2}\alpha$.

Per geometria si ha (teorema della corda)

$$2r = 2R \sin 2\alpha$$

quindi

$$\sin 2\alpha = \frac{r}{R}.$$

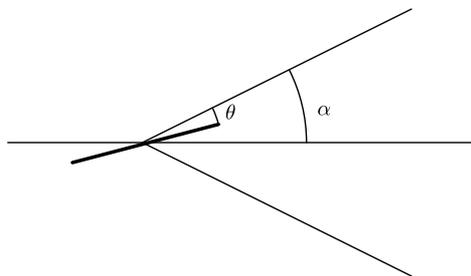


Figura 7.2: Angolo di Bragg

Il raggio del bulbo di vetro è $R = 65$ mm. Si ha

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ma poiché α è circa 10° si ha $\cos \alpha \sim 1$ quindi

$$\sin 2\alpha \sim 2 \sin \alpha.$$

D'altra parte

$$\sin \alpha = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \sim 2 \sin \theta$$

e quindi

$$2 \sin \theta \sim \sin \alpha \sim \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{r}{2R}.$$

Dalla legge di Bragg si può ricavare quindi

$$r = \frac{2R}{d} m \lambda.$$

Le particelle policristalline della pellicola di grafite hanno la struttura esagonale della grafite, in cui le distanze reticolari piane più grandi sono $d_1 = 213$ pm e $d_2 = 123$ pm. A d_1 e d_2 corrispondono i due anelli di diffrazione principali.

L'esperienza si realizza con i seguenti passaggi:

- al variare della tensione anodica si calcola λ ;
- al variare della tensione anodica si misura anche il raggio dei primi due anelli;
- dalla relazione fra r e λ si possono ricavare d_1 e d_2 e confrontarli con i valori teorici.

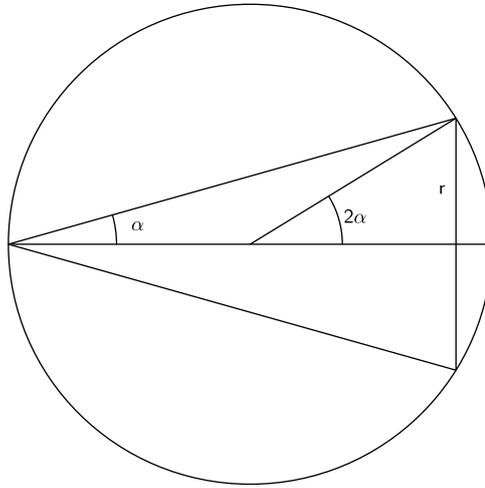


Figura 7.3: Schema del bulbo

In particolare, per ricavare d si procede per regressione lineare. Prendiamo ad esempio la relazione (per il primo anello)

$$r_1 = \frac{2R}{d_1} \lambda,$$

che è lineare del tipo $y = Ax + B$. Si determinano alcune coppie (r_1, λ) facendo variare la tensione anodica; si determina il coefficiente A che equivale a $\frac{2R}{d_1}$ e quindi consente di ricavare d_1 .

D'altra parte da r si può ottenere anche l'angolo di diffrazione al variare della tensione anodica:

$$\theta = \frac{1}{4} \arcsin \frac{2r}{D}.$$

Nota tecnica: nel regolare i parametri, la differenza di potenziale G_1 non deve essere a meno di 50 V (si tratta infatti di una tensione che deve limitare la corrente anodica).

7.9.2 Esperimento di Franck ed Hertz

Nel modello atomico di Bohr gli elettroni si trovano in stati energetici discreti e le transizioni da uno stato a un altro con energia inferiore producono radiazioni, la cui frequenza è determinata dalla differenza di energia fra gli stati. In base al modello, gli elettroni possono anche subire transizioni da uno stato a un altro con energia superiore, se gli si fornisce la quantità di

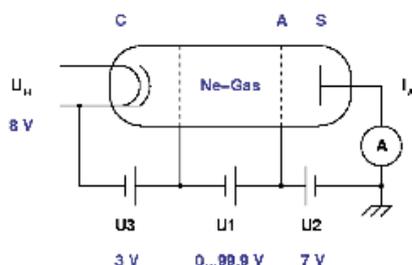


Figura 7.4: Esperimento di Franck ed Hertz

energia che corrisponde esattamente alla differenza fra i livelli energetici interessati. Questo è stato dimostrato da Franck ed Hertz nel 1913, proprio mentre Bohr presentava il suo modello. Poiché il modello di Bohr può essere derivato dalla meccanica quantistica, l'esperimento di Franck ed Hertz può essere assunto come una conferma della validità della teoria. In particolare Franck ed Hertz si sono serviti di un fascio di elettroni accelerati per misurare l'energia necessaria per portare elettroni di una certa sostanza dallo stato fondamentale a uno stato eccitato.

Nell'esperienza a scopo didattico esaminata (apparecchiatura PHYWE) gli elettroni, emessi da un catodo termoionico, sono accelerati verso l'anodo in un tubo con neon, ove sono diffusi da collisioni elastiche. L'unità di controllo per il tubo di Franck ed Hertz (vedi figura) fornisce la differenza di potenziale U_1 fra anodo e catodo, la differenza di potenziale per il contatore S . Per una tensione anodica U_1 di 16,8 V gli elettroni raggiungono un'energia cinetica sufficiente a portare gli elettroni di valenza del neon al primo stato eccitato mediante collisioni anelastiche. Poiché in questo passaggio gli elettroni del fascio perdono energia, non riescono ad attraversare il campo elettrico opposto tra A e S e quindi la corrente anodica misurata raggiunge un minimo. Se si aumenta U_1 , gli elettroni del fascio acquistano energia sufficiente a superare il campo elettrico e quindi la corrente anodica aumenta nuovamente. Quando $U_1 = 2 \cdot 16,8$ V, l'energia cinetica raggiunge un valore tale da eccitare l'elettrone dello stesso livello per due atomi in successione: si ottiene un secondo minimo. Continuando ad aumentare U_1 si ottiene un andamento della corrente con massimi e minimi equidistanti.

Si ha

$$U_1 = U + (\Phi_A - \Phi_C)$$

dove U è la differenza di potenziale applicata e Φ è la funzione di lavoro di anodo e catodo. Poiché l'energia di eccitazione E è determinata dalla

differenza di potenziale in corrispondenza dei minimi della corrente anodica, in questo caso Φ non ha importanza. Come si è detto, l'esperimento è interpretato sulla base della teoria quantistica, secondo cui gli elettroni in un atomo sono disposti in livelli energetici ben determinati e perché avvenga un processo elementare a un atomo deve essere assegnata una ben determinata energia. Ora, gli elettroni del neon, dopo essere stati eccitati, emettono l'energia sotto forma di fotoni con lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{ch}{E}.$$

Per $E=16,8$ eV si ottiene $\lambda=73,8$ nm. Nell'esperienza didattica l'energia E di eccitazione si ricava dai minimi della curva della corrente anodica come segue: si misura il potenziale corrispondente a ogni minimo; si calcola la differenza fra ogni potenziale e il precedente; si calcola la media di queste differenze di potenziale. L'energia di eccitazione si ricava da questo valore.

La stessa esperienza può essere condotta con un tubo con vapori di mercurio, in cui per un'energia di eccitazione di 4,9 eV si ottiene $\lambda=253$ nm (quindi nell'intervallo UV).

Nella versione "manuale" dell'esperienza si vedono strati luminosi con lunghezza d'onda di circa 640 nm, corrispondente a circa 2 eV, generati quando gli elettroni del neon, eccitati dalle collisioni degli elettroni del fascio, ritornano dallo stato $3p$ (circa 19 eV) allo stato fondamentale passando per lo stato $3s$ (circa 17 eV).

Gli strumenti matematici

8.1 STRUMENTI MATEMATICI NECESSARI

Esaminiamo qui più in dettaglio gli strumenti matematici necessari per lo sviluppo della proposta didattica presentata. Nei limiti imposti dalla complessità degli argomenti trattati, vogliamo ripercorrere un'analogia storica: come la meccanica quantistica ha dato origine a una nuova matematica, così in un percorso didattico sulla meccanica quantistica vogliamo scegliere e adattare gli strumenti matematici che ci occorrono, che per l'insegnante sono noti ma per lo studente, talvolta, sono una scoperta. Vogliamo ipotizzare che lo studente sia come lo scienziato che per costruirsi la "sua" meccanica quantistica ha bisogno di creare e assimilare nuovi concetti matematici. Questa potrebbe essere una situazione in cui si manifesta quel tipo di "apprendimento come ricerca", di cui si è parlato nel capitolo 2.

Gli strumenti matematici che riteniamo essenziali per elaborare una proposta didattica, sulla cui importanza vogliamo che gli insegnanti riflettano e che vogliamo che gli studenti (ri)scoprano sono i numeri complessi, il concetto di probabilità e gli spazi vettoriali. Vediamo a quale livello, con quale grado di approfondimento e con quale finalità possono essere trattati a scuola.

8.2 NUMERI COMPLESSI

Introdurre i numeri complessi anche prima dell'ultimo anno di un liceo, prima cioè di affrontare argomenti di fisica moderna, non è impossibile. Da un punto di vista matematico, anzi, è anche più difficile introdurre gli studenti alla necessità di passare dall'insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali: l'esperienza personale mostra che studenti che dovrebbero aver acquisito il concetto di numero reale, di fronte a quesiti come *Quali sono i numeri reali?* oppure *Fai un esempio di numero reale*, non sanno cosa

rispondere. Eppure riescono a risolvere equazioni di secondo grado in cui le soluzioni sono numeri irrazionali. La possibilità di estendere l'insieme dei numeri reali a quello dei numeri complessi, invece, è abbastanza ben compresa, solitamente con la necessità di calcolare radici quadrate di numeri negativi. Per i nostri scopi, è sufficiente che gli studenti conoscano la forma algebrica dei numeri complessi. Si può introdurre anzitutto l'unità immaginaria, cioè quel numero i non appartenente all'insieme dei numeri reali tale che

$$i^2 = -1.$$

Con l'unità immaginaria possiamo costruire i cosiddetti numeri immaginari puri, del tipo bi con b numero reale. I numeri così costruiti non sono numeri reali, perché i non è reale, e il loro quadrato è un numero negativo. Possiamo andare ancora oltre e osservare che, più in generale, un numero del tipo

$$z = a + ib$$

con a e b reali non è un numero reale. Lo chiamiamo numero complesso, con a parte reale e b parte immaginaria. Ciò che è importante sottolineare, dal punto di vista dello studente, è che con i numeri complessi in questa forma si possono svolgere le quattro operazioni con le usuali regole algebriche (e tenendo presente che $i^2 = -1$). I concetti nuovi saranno invece il modulo di un numero complesso

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e il complesso coniugato di z

$$z^* = a - ib.$$

Per verificare che la forma algebrica dei numeri complessi è uno strumento utilizzabile già a partire, ad esempio, dalla seconda superiore, possiamo esaminare un qualunque libro di testo in uso nella scuola secondaria. Si trova [9, p. 159], dopo aver esposto la necessità di estendere l'insieme dei numeri reali per poter calcolare le radici quadrate di numeri negativi, la seguente definizione:

Chiamiamo numero complesso ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

Sulla base di questa definizione sono introdotte nell'insieme dei numeri complessi le quattro operazioni e l'elevamento al quadrato. In particolare ci interessa la seguente definizione:

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, il loro prodotto è il numero complesso definito dalla coppia $(ac - bd; ad + bc)$.

L'autore sottolinea come la definizione sia apparentemente complicata, ma tale da fornire risposta al problema introduttivo, cioè trovare un numero che elevato al quadrato dia un numero negativo. Dopo l'introduzione dell'unità immaginaria, la coppia $(0; 1)$, si osserva che ogni numero complesso può essere scritto nella forma $(a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0)(0; 1)$, dove nell'ultimo passaggio si è usata la definizione di prodotto di numeri complessi. Da questa uguaglianza segue la forma algebrica dei numeri complessi. È utile, per i nostri scopi, evidenziare ciò che afferma il testo a proposito del calcolo con i numeri complessi:

La forma algebrica di un numero complesso è analoga a quella di un binomio. Questa analogia si mantiene anche nell'eseguire le operazioni con i numeri immaginari e con i numeri complessi, per le quali possiamo utilizzare le stesse regole del calcolo letterale. In ogni operazione, però, bisogna tener presente che i è un numero e non una lettera e che $i^2 = -1$.

Il testo propone poi una serie esauriente di esempi ed esercizi sulla forma algebrica dei numeri complessi, che possono essere tutti affrontati con le sole conoscenze algebriche del biennio. Nel caso del quoziente fra due numeri complessi $a + bi$ e $c + di$, ad esempio, il testo fa osservare allo studente che il risultato dell'operazione può essere pensato come una frazione algebrica, e suggerisce di moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, per ottenere il risultato finale:

$$(3 - 2i) : (4 + i) = \frac{3 - 2i}{4 + i} = \frac{(3 - 2i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{12 - 3i - 8i - 2}{16 + 1} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$$

8.3 SPAZI VETTORIALI

Come si è detto, lo stato quantistico è un elemento di uno spazio vettoriale, in particolare di uno spazio di Hilbert. Per trattare sistemi quantistici occorrerebbe introdurre il concetto di spazio vettoriale astratto. È arduo introdurre un tale concetto partendo dalla definizione di spazio vettoriale astratto presente nei manuali di algebra lineare (per quanto in alcuni libri di testo per la scuola secondaria sia introdotto proprio così, cfr. ad esempio [10, p. 150]). La necessità di servirsi dei vettori come strumenti matematici per trattare problemi fisici dovrebbe essere già stata prospettata agli studenti in argomenti di fisica di base (ad esempio in problemi con grandezze meccaniche). Gli studenti normalmente conoscono le principali proprietà dei vettori e le operazioni che con essi si possono svolgere. Si tratta, nel contesto che ci interessa, di generalizzare e approfondire alcuni

aspetti, senza necessariamente introdurre la definizione di spazio vettoriale astratto. Esaminando i vettori nel piano, gli studenti avranno visto (anche solo graficamente) che ogni vettore si può scrivere in un solo modo come somma di due qualsiasi vettori non paralleli. Viceversa, data una qualsiasi coppia di vettori del piano, servendosi di opportuni coefficienti è possibile costruire ogni altro vettore. Questi aspetti sono normalmente trattati nella classe terza del liceo scientifico, e ora, col nuovo ordinamento, è possibile che siano trattati anche nel biennio. Per studiare i sistemi quantistici a due stati, pertanto, faremo uso proprio del concetto di spazio vettoriale a due dimensioni, assimilando uno stato di spin a un vettore del piano.

Volendo comunque tentare una generalizzazione del concetto di spazio vettoriale astratto (se si vuole ad esempio trattare la funzione d'onda), si potrebbe osservare che uno spazio vettoriale può essere costituito anche da altri elementi diversi da vettori geometrici, con conseguente estensione a casi di n dimensioni. In questo ci vengono in aiuto strumenti della trigonometria che sono normalmente trattati nel liceo scientifico. Ricordiamo anzitutto che sommando funzioni periodiche si ottengono funzioni periodiche, procedura che si può facilmente eseguire con un qualsiasi software matematico (qui si è usato Geogebra). In particolare, se prendiamo ad esempio le funzioni $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x$ e le combiniamo in vari modi possibili, otteniamo sempre una funzione periodica con periodo 2π . Poiché una prima caratteristica di uno spazio vettoriale astratto è l'esistenza di un'operazione interna che a due elementi dello spazio associa un elemento dello spazio stesso, sembrerebbe quindi che l'insieme delle funzioni periodiche sia candidato a essere uno spazio vettoriale. Effettivamente è così, ma bisogna precisare bene le condizioni. Affinché un insieme di funzioni periodiche costituisca uno spazio vettoriale, occorre che ogni funzione periodica possa essere espressa come combinazione di funzioni periodiche. Ebbene, anzitutto si trova che ogni funzione periodica $f(x)$ di periodo 2π può essere approssimata a partire dalla famiglia di funzioni

$$\sin \frac{1}{2}x, \sin x, \sin \frac{3}{2}x, \sin 2x, \dots, \sin \frac{n}{2}x$$

ovvero con una somma del tipo

$$f(x) = c_1 \sin \frac{1}{2}x + c_2 \sin x + c_3 \sin \frac{3}{2}x + \dots + \sin \frac{n}{2}x$$

dove i coefficienti rappresentano il contributo che la corrispondente funzione $\sin \frac{n}{2}x$ porta alla $f(x)$. L'approssimazione sarà tanto migliore quante più funzioni si prenderanno. Se immaginiamo di prendere un numero infinito

di funzioni, il risultato sarà al limite esatto e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n2x.$$

Possiamo dire quindi che ogni funzione periodica può essere espressa come combinazione di funzioni periodiche se combiniamo infinite funzioni goniometriche. A questo punto, è facile verificare la definizione di spazio vettoriale e si può affermare perciò che l'insieme delle funzioni periodiche è uno spazio vettoriale speciale: a dimensione infinita.

Facciamo un'ulteriore astrazione. Cosa si può dire se la funzione non è periodica? Se proviamo a scriverla come somma di funzioni del tipo $\sin kx$, mentre nel caso precedente i valori di k erano discreti, nel caso di una funzione non periodica si infittiscono sempre di più: la somma diventa un integrale:

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} c(k) \sin kx dk.$$

I coefficienti rappresentano sempre il contributo della corrispondente componente $\sin kx$, ma poiché ora i valori di k sono tutti infinitamente vicini fra loro, indicheremo i coefficienti con $c(k)$ e rappresenteranno il contributo dei valori di k compresi fra k e $k + dk$.

Mentre il riconoscere che le funzioni periodiche costituiscono uno spazio vettoriale richiede solo gli strumenti della trigonometria normalmente trattati a scuola, l'ultima generalizzazione descritta è possibile se gli studenti possiedono il concetto di integrale. In tal caso, si può accettare come concetto precostruito ciò che afferma la teoria degli sviluppi in serie di Fourier, che ci dice che una funzione, sotto opportune ipotesi, può essere espressa nella forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ikx} dk \quad (8.1)$$

dove la distribuzione dei valori di k è data da

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx \quad (8.2)$$

dove abbiamo espresso le funzioni periodiche in forma esponenziale.

8.4 LA PROBABILITÀ

8.4.1 Difficoltà legate al concetto di probabilità

Un interessante studio [7] compiuto negli Stati Uniti su studenti universitari che hanno affrontato un primo corso di meccanica quantistica ha rilevato

che una difficoltà concettuale non indifferente è l'uso della probabilità. Benché la mia ricerca sia rivolta alle difficoltà di apprendimento della meccanica quantistica in ambito preuniversitario, alcune delle riflessioni presenti nell'articolo citato si possono adattare al nostro contesto.

L'articolo riporta alcune domande poste agli studenti, le cui risposte ci possono far riflettere. Alcuni quesiti rappresentativi sono i seguenti: *Se si lancia una moneta per tre volte e si ottiene sempre "testa", la probabilità di ottenere "testa" anche in un quarto lancio è maggiore, minore o uguale al 50 per cento? Se si lancia una moneta cento volte, che cosa ci si deve aspettare? Se si lancia altre cento volte, ci si deve aspettare lo stesso numero di "testa" e "croce"?* Dalle risposte del campione di studenti risulta che non si comprende la differenza fra la natura statistica di una singola osservazione e la distribuzione attesa del risultato di un campione di osservazioni: essi credono che piccoli campioni riproducano la tendenza attesa per un numero molto grande di prove ma soprattutto che il risultato di una prova può essere influenzato dagli esiti precedenti. Queste sono difficoltà su cui ci si può soffermare anche a livello di scuola secondaria, dove raramente si parla di probabilità, e, quando si fa, si manifestano comunque problemi di comprensione dei concetti e di interpretazione probabilistica di fenomeni anche semplici. È importante superare queste difficoltà non solo in vista dell'apprendimento della meccanica quantistica, ma soprattutto per acquisire una competenza fondamentale, l'uso di uno strumento matematico importante come la probabilità, per interpretare e comunicare fenomeni non solo fisici ma anche economici, sociali, meteorologici, a titolo di esempio.

Per quanto riguarda i nostri scopi (l'apprendimento della meccanica quantistica), l'articolo citato si propone di investigare sulla capacità degli studenti di interpretare frasi come: *probabilità di trovare una particella in una certa regione*, rilevando che la maggior parte degli studenti che giungono agli studi universitari hanno familiarità solo con una descrizione cinematica del moto e quindi hanno difficoltà a comprendere come la rappresentazione probabilistica si lega all'esito di un'osservazione e come la misura può essere usata per costruire i dettagli del comportamento della particella. Il ruolo della probabilità nei sistemi quantistici è concettualmente molto sottile. In generale negli esperimenti quantistici non è possibile disporre di un oggetto singolo (un atomo, una molecola o un nucleo) per sperimentare su di esso ripetutamente. In un esperimento di collisione di elettroni, ad esempio, migliaia di elettroni si scontrano con elettroni di migliaia di atomi o molecole. Per ogni singola collisione si potrebbe applicare il principio di conservazione della quantità di moto ma il risultato globale si descrive piuttosto in termini di distribuzione di probabilità di trovare una certa quantità di moto in una singola particella. Pertanto, se anche i singoli atomi obbedissero a

leggi del moto classiche e non quantistiche o relativistiche, dovremmo comunque descrivere la maggior parte degli esperimenti con atomi con l'uso della probabilità.

8.4.2 Verso una probabilità quantistica: problemi epistemologici

Per quanto la teoria della probabilità abbia origini empiriche,¹ il significato dell'applicazione del concetto di probabilità alla realtà empirica ha portato a dibattiti epistemologici molto accesi [72]: la probabilità è un esempio di paradosso epistemologico, cioè l'uso di un concetto di base senza la sua piena comprensione. Una difficoltà nell'interpretazione empirica della probabilità ha origine dall'idea che l'esperienza possa essere trattata come un concetto dato e la probabilità come un concetto applicato all'esperienza. La comprensione del concetto di esperienza, invece, non può avvenire senza l'uso del concetto di probabilità.

Un altro paradosso sorge quando esaminiamo la relazione fra la teoria della probabilità e la meccanica quantistica. Premesso che la teoria della probabilità può essere presentata in forma assiomatica, l'uso empirico del concetto di probabilità sembra allora voler dire che agli assiomi si può assegnare un significato empirico. D'altra parte certi fenomeni fisici si spiegano con la meccanica quantistica. Ci si dovrebbe aspettare perciò che la verifica sul significato empirico della probabilità debba essere condotta cercando di applicare il concetto di probabilità alla meccanica quantistica. Ma gli assiomi della teoria classica della probabilità non valgono per la meccanica quantistica: abbiamo visto ad esempio che una caratteristica peculiare della probabilità quantistica è l'interferenza di probabilità e che ci si deve riferire non a probabilità misurabili ma a ampiezze di probabilità. Ciò comporta, vedremo, un cambiamento degli assiomi. Quindi se un sistema assiomatico di probabilità deve essere applicato all'esperienza in accordo con le leggi della natura oggi osservate, tale sistema non può essere quello della probabilità classica.

Weizsäcker [*op. cit.*] analizza il concetto di probabilità della teoria classica per mettere in evidenza le difficoltà epistemologiche. Se interpretiamo la probabilità in senso strettamente empirico, considerandola come quantità misurabile, data una situazione sperimentale in cui diversi eventi E_i sono i possibili esiti, si può definire la frequenza relativa. Se consideriamo una serie futura di esiti dello stesso esperimento, ipotizziamo che le

¹In particolare la teoria della probabilità ha preso il via da problemi su giochi d'azzardo. Storicamente è importante la data del 1654, quando un certo Antoine Gombaud, francese, detto Chevalier de Méré, pose a Pascal un problema di dadi che innescò l'inizio della riflessione teorica sul calcolo delle probabilità.

nostre conoscenze ci consentano di calcolare la probabilità p_k di E_k : tale probabilità è interpretata come previsione della frequenza relativa per esiti futuri. L'obiezione epistemologica è illustrata da Weizsächer con un esempio: la probabilità che esca un certo numero col lancio di un dado è $1/6$, ma se si lancia il dado un certo numero di volte, raramente la frequenza sarà esattamente uguale a $1/6$; inoltre la teoria della probabilità prevede una distribuzione della frequenza intorno al valore previsto della probabilità. Nella teoria classica quindi la probabilità è un valore medio (valore di aspettazione), la cui definizione però si basa sulla definizione di probabilità. La difficoltà, dice Weizsächer, non sta nel concetto di probabilità ma in che cosa si intende per verifica empirica di una previsione teorica. In breve, egli afferma che la verifica empirica di una teoria non è mai possibile con certezza, ma solo con un certo grado di probabilità, ed è perciò in questo senso che il concetto di esperienza scientifica nell'uso pratico presuppone l'applicabilità di un concetto di probabilità anche se questo concetto non è esplicitamente articolato. Ecco perché il tentativo di definire la probabilità sulla base di un concetto di esperienza è destinato a condurre a una definizione circolare ed ecco anche perché è impossibile definire il concetto di esperienza sulla base della probabilità. Esperienza e probabilità non sono in una relazione di subordinazione gerarchica.

Non seguiamo nel dettaglio il percorso seguito da Weizsächer per risolvere il paradosso epistemologico. Seguiamo però l'esempio fisico che fornisce per mostrare che è possibile costruire una teoria quantistica della probabilità a partire da postulati semplici. Bisogna anzitutto stabilire che cosa si intende per eventi: se gli eventi sono tutti i possibili esiti di un esperimento, non è necessario cambiare gli assiomi; se gli eventi sono i possibili esiti di tutti i possibili esperimenti che possono essere compiuti su un sistema, allora gli eventi sono sottospazi di uno spazio di Hilbert. Come esempio semplice possiamo considerare il caso dello spin: il sistema può assumere solo due stati, ciascuno espresso da una funzione d'onda, e quindi si trova in uno spazio di Hilbert a due dimensioni. Ma se abbiamo un insieme di N oggetti a due stati, lo stato complessivo sarà descritto da una funzione d'onda in uno spazio a 2^N dimensioni. Il postulato che aggiunge Weizsächer, per rendere consistente la sua teoria della probabilità quantistica, è che la probabilità di un evento è il valore di aspettazione della frequenza relativa del suo verificarsi. Tale valore di aspettazione non è definito nello spazio a due dimensioni, ma nello spazio a 2^N dimensioni (che chiama metaeventi). Dal punto di vista epistemologico, non è stato eliminato il concetto preliminare di probabilità, che risultava impreciso, ma è stato trasferito dall'insieme di eventi all'insieme di metaeventi.

8.4.3 *Probabilità e ampiezza di probabilità*

Dopo aver messo in evidenza i problemi epistemologici che sorgono nell'uso della probabilità in meccanica quantistica, vediamo ora di fatto cosa cambia. Una caratteristica peculiare della meccanica quantistica [28], abbiamo visto, è che esistono esperimenti dei quali l'esito non si può prevedere: in questi casi si devono conteggiare le probabilità dei vari esiti. Ma le leggi della composizione delle probabilità non sono quelle della teoria classica della probabilità. Le leggi della meccanica quantistica, tuttavia, tendono a quelle della probabilità classica all'aumentare delle dimensioni degli oggetti coinvolti negli esperimenti. Ci preme qui sottolineare che non è il concetto di probabilità che cambia: se si dice che la probabilità di un certo esito di un certo esperimento è p , vuol dire che se si ripete l'esperimento molte volte ci si aspetta che la frazione di eventi che fornisce l'esito in esame è p . Ciò che cambia è il metodo di calcolo della probabilità per eventi composti. Torniamo all'esempio della doppia fenditura, quando abbiamo constatato che, se non osserviamo dove passa la particella, si ottiene un andamento di probabilità che corrisponde a una funzione di interferenza, mentre se si osserva dove passa la particella si ottiene la semplice somma di probabilità che la particella ha di passare nell'una o nell'altra fenditura. Per giustificare il caso in cui si ha interferenza, si è ipotizzato che la probabilità $P(x)$ di trovare la particella in x sia il modulo quadro di un'ampiezza di probabilità $\phi(x)$. Le ampiezze si sommano, quindi si avrà

$$P(x) = |\phi(x)|^2 = |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2.$$

Ma in generale

$$|\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2 \neq |\phi_1(x)|^2 + |\phi_2(x)|^2$$

quindi, sempre in generale,

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x).$$

Questo è il caso in cui le probabilità non si compongono come dice la teoria classica della probabilità. Quando invece si osserva dove passano le particelle, si ha

$$|\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2 = |\phi_1(x)|^2 + |\phi_2(x)|^2$$

ovvero

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x).$$

Da un punto di vista fisico, la risposta è che osservando le particelle, ad esempio con luce opportuna, si introducono perturbazioni, entra in gioco il principio di indeterminazione e si distrugge l'interferenza. Da un punto di vista matematico, diciamo che la probabilità di un evento è il modulo quadro di un numero complesso chiamato ampiezza di probabilità. Quando un evento si può verificare in diversi modi, l'ampiezza di probabilità è la somma delle singole ampiezze, e la probabilità, essendo il modulo quadro dell'ampiezza, fornisce un risultato più articolato rispetto alla semplice somma delle probabilità. Se invece un esperimento può determinare quale alternativa si è realmente verificata, si perde l'interferenza e la probabilità diventa semplicemente la somma delle probabilità. La meccanica quantistica fornisce il metodo per calcolare le ampiezze di probabilità: sono le soluzioni dell'equazione di Schrödinger, l'equazione del moto della meccanica quantistica, la cui ricerca in forma semplificata potrebbe far parte di un percorso didattico più approfondito (cfr. paragrafo 7.6).

8.4.4 *La gaussiana*

Un concetto importante per trattare il carattere probabilistico della meccanica quantistica è la gaussiana, la funzione del tipo

$$f(x) = ae^{-b(x-c)^2},$$

molto usata in probabilità, perché rappresenta la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale. È importante ricordare che la funzione di densità di probabilità è una funzione $f(x)$ tale che $f(x)dx$ è la probabilità che la variabile assuma valori fra x e $x + dx$. La distribuzione normale è una distribuzione di probabilità in cui i valori della variabile casuale si concentrano intorno al valor medio. La varianza è una misura di quanto i valori si discostano dal valor medio:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

La gaussiana è importante in meccanica quantistica perché è la funzione che rappresenta il pacchetto d'onde con indeterminazione minima, quindi può essere usata come modello per esempi di carattere quantitativo. Sarà utile pertanto con gli studenti esaminare le caratteristiche principali di questa funzione, magari prima di affrontare argomenti di meccanica quantistica, come si è visto per altri strumenti matematici, ad esempio nell'ambito di un percorso di apprendimento sulla probabilità. Con un software matematico (qui è stato usato Geogebra) possiamo costruire facilmente una funzione

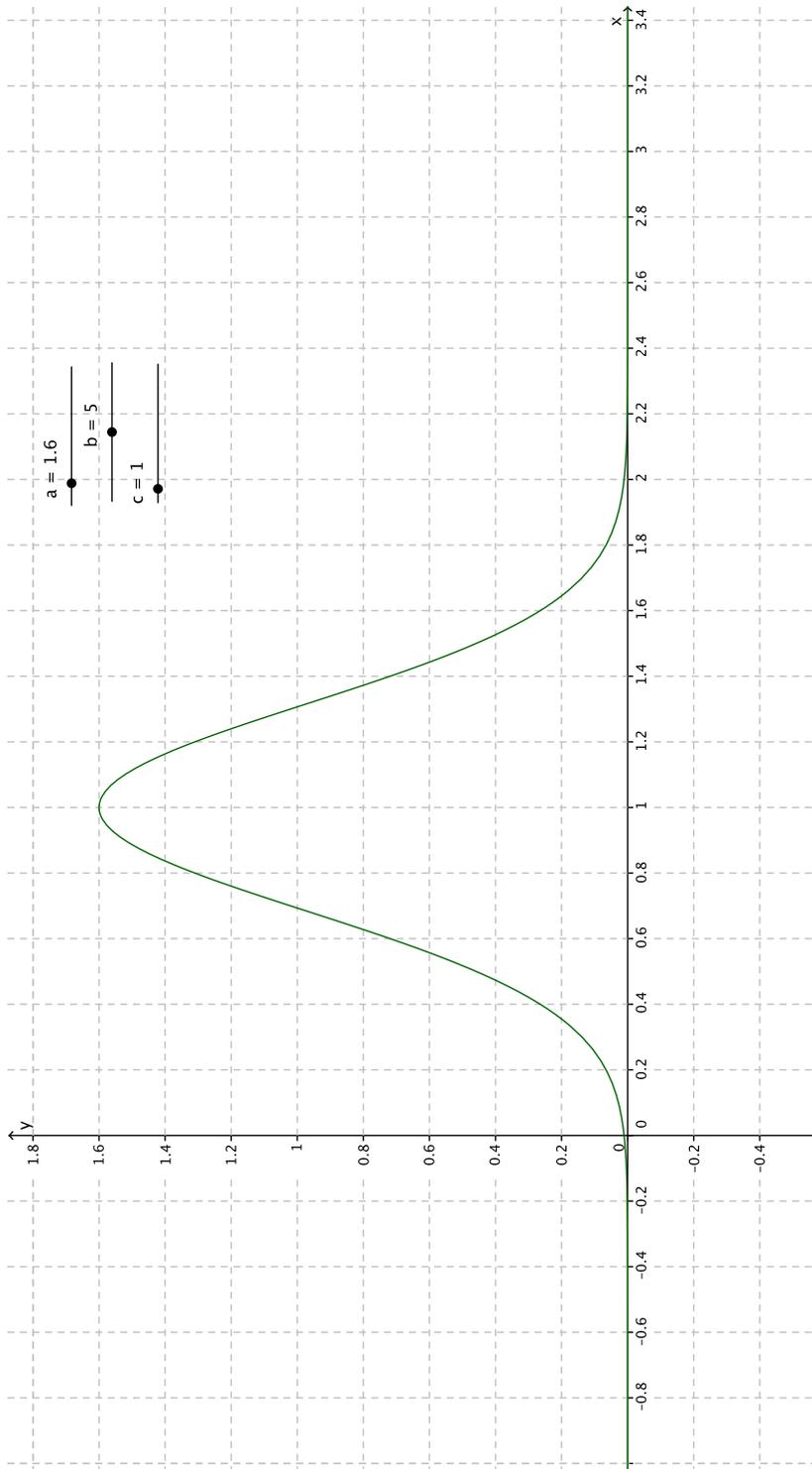


Figura 8.1: Grafico di una gaussiana non normalizzata

gaussiana in cui facendo variare i tre parametri a , b , e c facciamo variare la forma della funzione stessa (cfr. ad esempio figura 8.1).

Se vogliamo però che la funzione rappresenti una distribuzione di probabilità, il parametro a non può essere qualunque: deve verificare la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-b(x-c)^2} dx = 1$$

da cui si ottiene

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}.$$

In tal caso il grafico è quello rappresentato in figura 8.2. In probabilità, il parametro c è il valor medio μ della distribuzione mentre $b = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$ dove σ^2 è la varianza. La distribuzione normale quindi può essere scritta nella forma

$$f(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ricordiamoci questa forma, perché ci sarà utile per un'analogia con la meccanica quantistica.

8.5 SINTESI DEGLI STRUMENTI MATEMATICI PROPOSTI

La necessità di alcuni strumenti matematici per trattare argomenti di meccanica quantistica discende dal fatto che certi concetti fondanti sono per loro natura descritti da un corrispondente strumento matematico: l'operazione di misura, ad esempio, ha un esito intrinsecamente probabilistico e gli stati quantistici vivono in uno spazio vettoriale astratto che è uno spazio di Hilbert su campo complesso. Ecco perché, per elaborare una proposta didattica, abbiamo individuato la necessità degli strumenti matematici fin qui descritti. Tali strumenti dovranno essere calati nel contesto della scuola secondaria superiore e in particolare inseriti nel curriculum.

Numeri complessi. Per le proposte didattiche che andremo a illustrare, sarà sufficiente che gli studenti conoscano la forma algebrica dei numeri complessi, cosa che può essere trattata fin dalla seconda superiore, con le proprietà dei polinomi.

Spazi vettoriali. In base al livello cui si vuole portare la proposta didattica, non è necessario introdurre la definizione formale e le proprietà di uno spazio vettoriale astratto. Per uno studio dei sistemi a due stati, ad esempio, che sia condotto partendo dallo spin o dalla polarizzazione come base fenomenologica, sarà sufficiente uno spazio vettoriale a

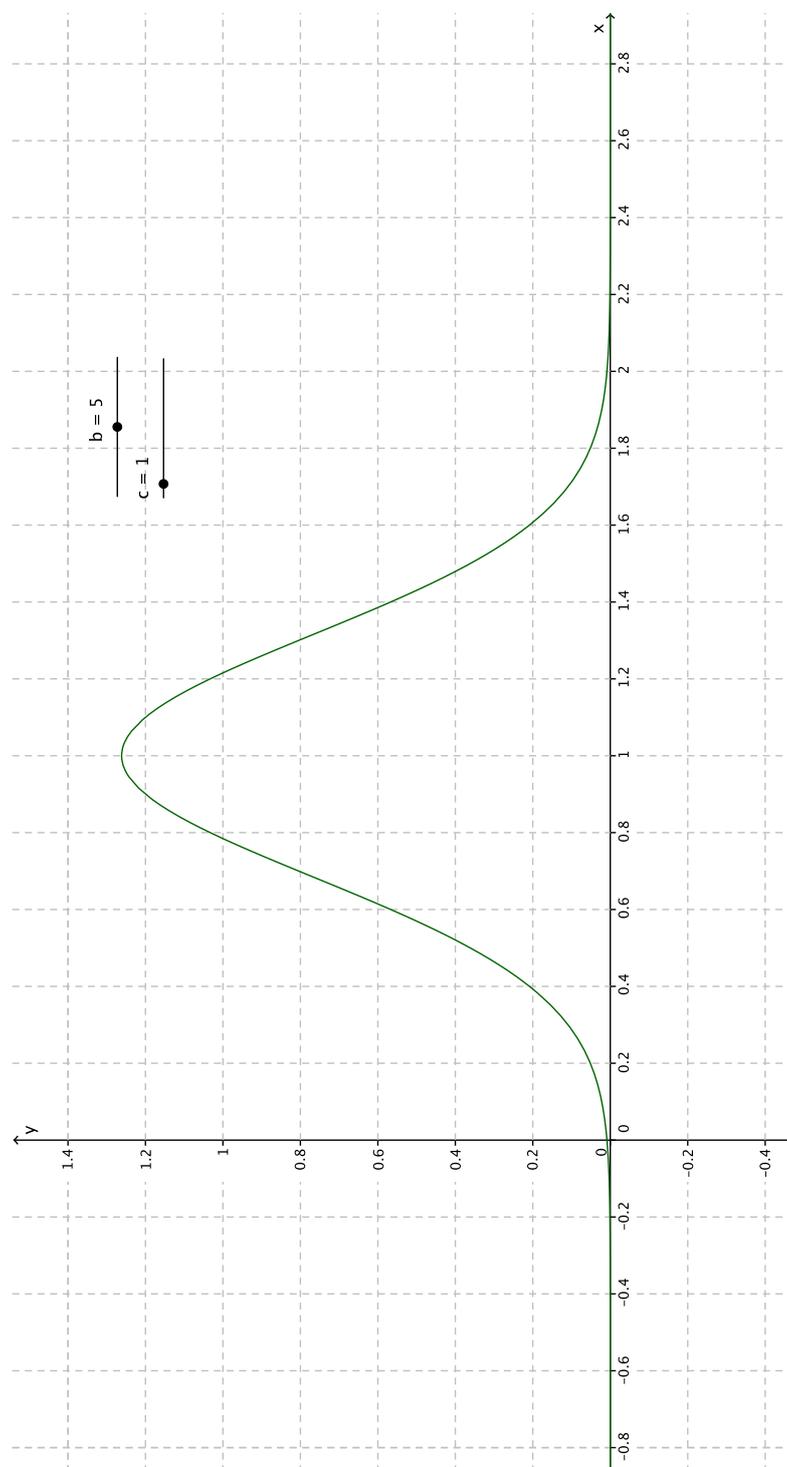


Figura 8.2: Grafico di una gaussiana normalizzata

due dimensioni analogo al piano cartesiano. Gli studenti quindi applicheranno le proprietà dei vettori che si insegnano tradizionalmente quando si iniziano a trattare le grandezze fisiche vettoriali, quindi nella classe terza del liceo scientifico e ora, possibilmente, anche nel biennio. Se si vuole invece giungere con una proposta didattica a trattare il concetto di funzione d'onda, occorre far riflettere gli studenti sul fatto che uno spazio vettoriale può essere costituito anche da elementi che non sono i tradizionali vettori. Si è proposto l'esempio delle funzioni periodiche, nel qual caso questa generalizzazione potrà essere condotta a partire dalla quarta liceo scientifico, per quanto ora, con il nuovo quadro orario del liceo scientifico, gli strumenti della trigonometria e dell'analisi potrebbero essere anticipati.

Probabilità. Per lo sviluppo delle proposte didattiche si richiede anzitutto il concetto di probabilità e le principali proprietà del calcolo classico delle probabilità, che possono essere trattate anche a partire dal biennio. Occorre però chiarire contestualmente con gli studenti alcuni aspetti critici, che possono ostacolare l'applicazione successiva del concetto di probabilità, ad esempio la differenza fra la natura statistica di una singola osservazione e la distribuzione attesa del risultato di un campione di osservazioni, come si è visto prima. Gli aspetti della probabilità legati al mondo quantistico, invece, compariranno per gli studenti contestualmente al percorso didattico che andremo a descrivere: la natura intrinsecamente probabilistica della meccanica quantistica e la necessità di nuove regole di composizione delle probabilità.

Proposte di trasposizione didattica

Sulla base della riflessione sui concetti fondanti della meccanica quantistica, sugli strumenti matematici necessari e sulle proposte didattiche già elaborate, vogliamo ora formulare un'ipotesi di trasposizione didattica di alcuni argomenti della meccanica quantistica: trasformiamo gli oggetti del sapere, che abbiamo individuato come oggetti da insegnare (i concetti fondanti), in oggetti di insegnamento.

9.1 UNA BASE QUANTISTICA

Una base fenomenologica da cui partire potrebbe essere senz'altro la polarizzazione del fotone, per le motivazioni già evidenziate nei capitoli precedenti. Un'altra possibilità è quella di iniziare dallo studio dell'esperimento di Stern e Gerlach. Ove non si disponesse dell'attrezzatura in un laboratorio didattico, esistono in rete alcune utili (e accattivanti) simulazioni.

Stern e Gerlach, nei primi anni Venti del Novecento,¹ mostrarono l'esistenza di un momento angolare intrinseco degli atomi e la sua quantizzazione. L'esperimento di Stern e Gerlach può essere utile, oggi, per mostrare la quantizzazione di una grandezza fisica e l'influenza della misura su uno stato fisico. Nell'esperimento originale (cfr. ad esempio [71]) un fascio di atomi di argento, prodotti per evaporazione e collimati mediante una serie di fenditure sottili, era diretto fra i poli di un particolare magnete. Si osservava che gli atomi erano deflessi: agiva quindi su di essi una forza magnetica e questo era indice del fatto che gli atomi hanno un momento magnetico. Classicamente gli atomi dovrebbero essere deviati con angoli che variano con continuità entro un intervallo, perché i momenti magnetici degli atomi sono orientati in maniera casuale. Nell'esperimento originale si osservava

¹Otto Stern e Walther Gerlach, in *Das magnetische Moment des Silberatoms*, *Zeitschrift für Physik*, 9 (1922) 353-355.

invece (mediante deposito degli atomi di argento su una lastra di vetro) che gli atomi erano deviati solo in due direzioni ben precise.

In analogia col fatto che una particella carica che percorre un'orbita circolare ha un momento magnetico che dipende dal momento angolare, si può pensare che il momento magnetico di un atomo di argento che entra nel dispositivo di Stern e Gerlach dipenda da un momento angolare, ma poiché l'atomo non ruota, non si tratta di un momento angolare di rotazione. L'esperimento di Stern e Gerlach mostrava dunque che gli atomi hanno un momento angolare intrinseco, chiamato spin, che dimensionalmente, ma non fisicamente, equivale al momento angolare, e che può assumere solo due possibili valori, quantificati in $\pm \frac{\hbar}{2}$, dove $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{eV}\cdot\text{s}$ e h è la costante di Planck. La teoria atomica oggi ci dice che lo spin dell'atomo di argento, che è composto dal nucleo e da 47 elettroni, dipende sostanzialmente dal quarantasettesimo elettrone. Possiamo attribuire dunque la proprietà dello spin all'elettrone, e nelle riflessioni sullo spin possiamo immaginare, d'ora in poi, di agire, anziché con atomi, con elettroni. Se ipotizziamo che il campo magnetico dell'apparato di Stern e Gerlach sia orientato lungo un asse che chiamiamo z , i due possibili stati di spin saranno uno nel verso positivo e uno nel verso negativo dell'asse z e li chiamiamo *up* e *down*.

L'esperimento di Stern e Gerlach (anche virtuale) consente di osservare i seguenti aspetti.

- L'apparato consente una misura dello spin di una particella lungo un certo asse, ma se si mandano nell'apparato particelle di cui non si conosce lo spin, l'esito della misura è probabilistico: si otterrà spin *up* oppure *down* con probabilità $1/2$.
- Se l'apparato misura lo spin lungo l'asse z , si osserva che mandando particelle con spin *up* la probabilità di ottenere spin *up* è uno mentre la probabilità di trovare spin *down* è zero.

La prima osservazione consente di ipotizzare che lo stato di spin prima della misura sia in una sovrapposizione dei due stati *up* e *down*, ciascuno dei quali contribuisce con un certo "peso" alla sovrapposizione. Dalla seconda osservazione si deduce che lo spin *up* e *down* sono proprietà mutuamente esclusive. Da qui parte l'analogia con i vettori del piano cartesiano. Anzi-tutto gli spin *up* e *down* si comportano come un vettore parallelo all'asse x e uno parallelo all'asse y , quando vogliamo ad esempio determinare la componente lungo l'asse x di un vettore parallelo all'asse y . Si può pertanto con gli studenti generalizzare il concetto di ortogonalità: dire che due vettori sono ortogonali, non vuol dire solo che "formano un angolo di 90 gradi" ma

anche che rappresentano, in un certo senso, stati che si escludono a vicenda, come gli stati di spin up e down dell'elettrone. Solo a questo punto si potrà dire che dati i due stati di spin che si escludono a vicenda, si può costruire ogni altro stato di spin, così come data una coppia di vettori del piano ortogonali si può costruire ogni altro vettore del piano. Si osservi che implicitamente si sta affermando che l'insieme degli stati di spin dell'elettrone e l'insieme dei vettori del piano sono esempi di spazio vettoriale a due dimensioni e che si sta introducendo, sempre implicitamente, il concetto di base, di dimensione e di combinazione lineare. Non è necessario dunque procedere con l'introduzione della definizione di spazio vettoriale astratto, perché si può procedere analogamente alle regole di composizione e scomposizione dei vettori nel piano, ma per comodità nel descrivere l'ipotesi di trasposizione didattica ipotizziamo di aver introdotto i concetti matematici che saranno citati nel seguito.

Assumiamo che gli stati che corrispondono allo spin $\pm \frac{\hbar}{2}$ siano la base di uno spazio vettoriale a due dimensioni. Tutti gli stati di spin potranno essere costruiti con i due vettori di base, come con due vettori del piano si possono costruire tutti i vettori del piano. Chiamiamo \mathbf{u} e \mathbf{d} questi vettori di base. Un qualsiasi stato di spin sarà

$$\mathbf{s} = a_+ \mathbf{u} + a_- \mathbf{d}. \quad (9.1)$$

Le coordinate a_+ e a_- sono chiamate ampiezze di probabilità. Perché? Affrontiamo il problema dal punto di vista delle conoscenze degli spazi vettoriali. Come si trovano le componenti di un vettore? Proiettando il vettore dato sui vettori della base. Occorre quindi il prodotto scalare, e dobbiamo per semplicità aver scelto i nostri vettori di base tra loro ortogonali e con modulo unitario. In tal caso possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} &= a_+, \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} &= a_-. \end{aligned}$$

Come si può esplicitare il passaggio dall'ampiezza di probabilità alla probabilità? Proviamo sempre con un'analogia col piano cartesiano: il modulo del vettore \mathbf{s} , dato da

$$|s|^2 = |a_+|^2 + |a_-|^2.$$

In meccanica quantistica si richiede che tutti i vettori² abbiano modulo unitario (condizione di normalizzazione), a causa del carattere probabilistico

²È opportuno qui ricordare che lo stato quantico è rappresentato in generale da un vettore di uno spazio di Hilbert, uno spazio vettoriale complesso a infinite dimensioni in cui è definito un prodotto scalare e che sia completo rispetto alla norma indotta da tale prodotto scalare (uno spazio è completo se tutte le successioni di Cauchy sono convergenti a un elemento dello spazio stesso).

della teoria: vale quindi la relazione

$$|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1.$$

L'importanza della probabilità in meccanica quantistica è proprio in questa condizione, che può essere letta come una somma di probabilità che deve dare uno. Perciò interpretiamo $|a_+|^2$ come la probabilità che una misura dello spin (lungo l'asse z) dia il valore $+\frac{\hbar}{2}$ e $|a_-|^2$ come la probabilità che una misura dello spin dia il valore $-\frac{\hbar}{2}$. Nel caso in esame, poiché le probabilità sono entrambe del 50 per cento, si ha

$$|a_+|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|a_-|^2 = \frac{1}{2}$$

quindi le ampiezze, cioè l'equivalente delle componenti nel nostro ipotetico spazio vettoriale quantistico, sarebbero

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ma in meccanica quantistica le ampiezze sono, in generale, numeri complessi. Come superare questo ostacolo? La teoria richiederebbe di ricavare le ampiezze degli stati scrivendole sotto forma di numeri complessi e applicando l'ortonormalità. Nel nostro caso non si ritiene praticabile affrontare un calcolo con numeri complessi e fattori di fase globali e relativi, ma si potrebbe osservare, ad esempio, che se si ha $|a_+|^2 = \frac{1}{2}$, non è detto che debba essere solo $a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$: potrebbe essere anche $a_+ = \frac{i}{\sqrt{2}}$ oppure $a_+ = -\frac{i}{\sqrt{2}}$. A differenza dello spazio ordinario, quindi, dove le componenti dei vettori sono solo numeri reali, nello spazio degli stati quantistici si possono (anzi si devono) usare i più generali numeri complessi.

Riassumendo, si ipotizza che il nostro spazio quantistico a due dimensioni si possa costruire a partire dai due stati di spin lungo l'asse z , come combinazione lineare con opportuni coefficienti, come ogni vettore del piano si può costruire a partire da due vettori di base con opportune componenti; il livello di precostruzione che accettiamo è quello di ipotizzare che nello spazio quantistico le componenti sono in generale numeri complessi.

9.2 ESEMPI DI ESERCIZI

Nel processo di testualizzazione del sapere (cfr. paragrafo 3.4), un passo importante per chi opera la trasposizione didattica è strutturare un certo numero di esercizi per il controllo dell'apprendimento. Posto che lo scopo ultimo dell'apprendimento non è semplicemente che lo studente trovi le risposte giuste agli esercizi di fine capitolo, si ritiene però necessario che egli abbia una palestra su cui esercitarsi per apprendere le tecniche fondamentali degli argomenti che sta studiando, affinché possa trovarsi a suo agio nella sequenzialità del percorso di apprendimento.

Che tipo di esercizi si possono proporre per consolidare quanto illustrato sul principio di sovrapposizione e sui sistemi a due stati? Non si potranno certo svolgere calcoli elaborati, ma si potrà comunque riflettere numericamente sul concetto di probabilità quantistica. Dopo che gli studenti avranno preso atto che le coordinate del nuovo spazio quantistico possono essere anche numeri complessi, si potrà fare l'esempio di alcuni stati di spin che possono essere espressi nella base scelta. Supponiamo ad esempio di far passare un fascio di particelle con spin *up* lungo l'asse *x* in un dispositivo di Stern e Gerlach con campo magnetico orientato lungo l'asse *z*. Si osserva che metà delle particelle uscirà con spin *up* e metà con spin *down* lungo l'asse *z*. Questo porta a confermare che ogni stato può essere espresso come sovrapposizione di altri due stati. Nel caso in esame, le particelle che entrano nel dispositivo sono nello stato \mathbf{u}_x (hanno tutte spin $+\frac{\hbar}{2}$) e il fatto che escano per metà con spin $+\frac{\hbar}{2}$ e per metà con spin $-\frac{\hbar}{2}$ ci dice che lo stato \mathbf{u}_x può essere espresso come sovrapposizione degli stati \mathbf{u}_z e \mathbf{d}_z . In particolare, la teoria consente di esprimere i seguenti stati:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_z \\ \mathbf{d}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_z - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_z \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_z + \frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_z \\ \mathbf{d}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_z - \frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_z \end{cases} \quad (9.3)$$

A titolo di esercizio, si può ora proporre: se in un dispositivo di Stern e Gerlach entra un fascio di particelle con spin *up* lungo l'asse *x*, qual è la probabilità che escano particelle con spin *down* lungo l'asse *z*? La probabilità è il modulo al quadrato dell'ampiezza, che a sua volta è un prodotto scalare. Vediamo come affrontare questo passaggio con il formalismo che ci siamo dati. Le particelle si trovano nello stato \mathbf{u}_x ; per calcolare la probabilità di trovare, dopo la misura, particelle nello stato \mathbf{d}_z , dobbiamo calcolare il prodotto scalare fra i due vettori (l'ampiezza di probabilità) e calcolare il

modulo al quadrato (la probabilità); nel caso in esame dobbiamo calcolare

$$\mathbf{d}_z \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{d}_z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{d}_z \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi

$$|\mathbf{d}_z \cdot \mathbf{u}_x|^2 = \frac{1}{2}.$$

In generale però non è così semplice, perché i nostri vettori possono avere anche componenti complesse. Come si calcola il prodotto scalare fra due vettori nel nostro spazio quantistico che è uno spazio vettoriale complesso? Daremo questa regola: se abbiamo una particella in uno stato \mathbf{u} e vogliamo la probabilità che dopo una misura si trovi nello stato \mathbf{v} , si deve calcolare il prodotto $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}$, dove \mathbf{v}^* è il complesso coniugato. Ciò premesso, il prodotto scalare si calcola a questo punto nel modo solito. Ad esempio, se si ha un fascio di particelle con spin *up* lungo l'asse x e si misura lo spin lungo l'asse y , qual è la probabilità che si trovi spin *up*? Il calcolo è il seguente:

$$\mathbf{u}_y^* \cdot \mathbf{u}_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_z - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{d}_z \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{d}_z \right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

e quindi

$$|\mathbf{u}_y^* \cdot \mathbf{u}_x|^2 = \left| \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Come altro esempio, consideriamo fasci di particelle nei seguenti stati (i coefficienti sono stati scelti opportunamente):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_z + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_z + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} i \right) \mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{3}{4} \mathbf{u}_z + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i \right) \mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i \right) \mathbf{d}_z.$$

Per ciascuno si può calcolare la probabilità di trovare spin *up* e *down*, se si misura lo spin lungo l'asse z , e verificare che la somma delle due probabilità è uno.

Un ulteriore esempio è il seguente. Si misura lo spin lungo l'asse z di un fascio di particelle che si trovava in uno stato ψ e si trova spin *up* con

probabilità $1/3$. Scrivere possibili espressioni dello stato ψ . Anzitutto se si ha

$$|\mathbf{u}_z^* \cdot \psi|^2 = \frac{1}{3}$$

dovrà essere

$$|\mathbf{d}_z^* \cdot \psi|^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e ψ potrà essere uno dei seguenti:³

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_z + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_z + \sqrt{\frac{2}{3}}i\mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{i}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_z + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{d}_z$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_z - \sqrt{\frac{2}{3}}i\mathbf{d}_z.$$

Un altro calcolo che si può svolgere, avendo a disposizione le (9.2) e (9.3), è quello che consente di ricavare, mediante sistema di equazioni, gli stati di spin lungo l'asse z in funzione dello spin lungo l'asse x o y . Si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{u}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_x \end{cases} \quad (9.4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_z = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_y + \frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{d}_y. \end{cases} \quad (9.5)$$

Ancora, si possono ricavare gli stati di spin lungo l'asse x in funzione dello spin lungo l'asse y e viceversa. Si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x = \frac{1-i}{2}\mathbf{u}_y + \frac{1+i}{2}\mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_x = \frac{1+i}{2}\mathbf{u}_y - \frac{1-i}{2}\mathbf{d}_y \end{cases} \quad (9.6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_y = \frac{1+i}{2}\mathbf{u}_x + \frac{1-i}{2}\mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_y = \frac{1-i}{2}\mathbf{u}_x + \frac{1+i}{2}\mathbf{d}_x. \end{cases} \quad (9.7)$$

³Si deve qui osservare che quelli di seguito indicati non sono i soli stati possibili, poiché gli stati quantistici sono definiti a meno di un fattore di fase globale del tipo $e^{i\delta}$, che comunque è ininfluenza ai fini del calcolo delle ampiezze.

Come ulteriore esercizio, a questo punto, si possono esprimere gli stati ψ , usati prima, in un'altra base, ad esempio in funzione dello spin lungo l'asse x , e richiedere qual è la probabilità di trovare spin *up* e *down*. Prima si passa da una base all'altra usando le (9.4) e poi si calcolano le probabilità. Anche qui si può verificare che la somma delle probabilità è uno.

9.3 LA FUNZIONE D'ONDA

Fino ad ora abbiamo trattato lo stato quantistico come elemento di uno spazio vettoriale, esaminando un caso di sistema a due stati, in cui è possibile estendere le proprietà dei vettori del piano cartesiano con l'introduzione delle ampiezze complesse. Un'altra possibile rappresentazione dello stato quantistico è la funzione d'onda. Vogliamo provare ora a delineare un'ipotesi di trasposizione didattica del concetto di funzione d'onda con un supporto matematico che, sebbene più articolato rispetto a quello necessario per i sistemi a due stati, potrebbe in certi contesti far parte del curriculum matematico del liceo scientifico. Si richiede, infatti, la competenza nel calcolo degli integrali che normalmente si trattano nella scuola secondaria, e, anzi, la presente trasposizione, potrebbe consentire un'ulteriore applicazione del calcolo integrale per gli studenti oltre a quelle tradizionalmente trattate (calcolo di aree e volumi).

9.3.1 Breve introduzione storica

Per affrontare il concetto di funzione d'onda in una trasposizione didattica, può essere d'aiuto riprendere il filo storico e esaminare i modelli interpretativi della luce del primo Novecento. I punti fondamentali possono essere facilmente seguiti dagli studenti: si può partire dal modello corpuscolare di Newton per passare alla conferma del modello corpuscolare mediante l'esperimento di Young. La tappa successiva, quella in cui da una conferma del modello ondulatorio si ritorna a speculazioni su un modello corpuscolare e quindi al concetto di quanto di energia, è più complessa da affrontare da un punto di vista storico. Troviamo le basi storiche della riflessione sul modello onda-corpuscolo nella comunicazione di Einstein [24] a Salisburgo, dove si dimostra che la radiazione ad alte frequenze ha un comportamento corpuscolare, e nell'articolo sempre di Einstein [23] sull'effetto fotoelettrico. Ma l'esame di questi due testi è difficile da affrontare a livello liceale. Lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck, come suggerito dalle Indicazioni Nazionali, pare pertanto complesso, e potrebbe portare a una caduta di interesse e attenzione da parte degli studenti, se si intende affrontare con loro il problema del corpo nero. "In un corso introduttivo

non è possibile raccontare la storia della radiazione di corpo nero in un modo intellettualmente onesto e significativo" [1, p. 310]. Invece la strada per una comprensione del concetto di quanto di energia può passare per l'effetto fotoelettrico.

L'effetto fotoelettrico consiste nell'emissione di elettroni da parte di una superficie metallica colpita da luce di lunghezza d'onda molto piccola. Questo fenomeno consente di mettere in evidenza, per gli studenti, aspetti che non si riuscivano a spiegare con teorie classiche: il fatto che gli elettroni sono emessi solo se la luce ha una frequenza superiore a una frequenza di soglia, qualunque sia l'intensità, e il fatto che l'energia degli elettroni emessi è direttamente proporzionale alla frequenza della luce incidente ma indipendente dall'intensità. Nel 1905 Einstein, con gli articoli citati, forniva un'interpretazione dell'effetto fotoelettrico: l'energia della luce non è distribuita uniformemente sul fronte d'onda (come si supposeva in fisica classica) ma è concentrata in pacchetti separati, ben definiti e proporzionali alla frequenza della luce, ovvero

$$E = h\nu.$$

L'energia di ogni unità elementare è stata chiamata *quanto* e in seguito fotone.

Ora, se il fotone ha energia $h\nu$, può avere una quantità di moto? Sappiamo che un corpo di massa m ha quantità di moto

$$p = mv.$$

Il fotone ha massa nulla, ma dalla teoria della relatività segue che se un corpo assorbe una quantità di energia E , questa si trasforma in massa $\Delta m = \frac{E}{c^2}$. La massa quindi è una forma di energia (concetto di *massa equivalente* formulato da Einstein nel 1905). Se alla massa del fotone si assegna quindi il valore relativistico E/c^2 , si ottiene per la quantità di moto

$$p = \frac{Ev}{c^2}.$$

Poiché il fotone ha la velocità della luce e energia $h\nu$, segue

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Ma $c = \nu\lambda$, quindi

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Quindi a un fotone con una certa energia si può associare una quantità di moto.

Tabella 9.1: Tappe storiche del dualismo onda-particella

Anno	Evento
1704	<i>Optiks</i> di Newton
1801	Esperimento di Young
1887	Hertz osserva l'effetto fotoelettrico
1905	Einstein interpreta l'effetto fotoelettrico
1923	Effetto Compton
1923	Ipotesi di de Broglie
1923	Esperimenti sulla diffrazione degli elettroni

Compton pensò che se un fotone ha quantità di moto, allora nell'urto con un atomo dovrebbe valere la legge di conservazione della quantità di moto. In base a tale legge Compton trovò che un fotone nell'urto con un atomo non perde energia (a causa delle grandi dimensioni dell'atomo) mentre nell'urto con un elettrone la perdita di energia del fotone non è trascurabile. Nel 1923 Compton dimostrò con un esperimento di diffusione di raggi X che una parte dei raggi passa con frequenza invariata e l'altra parte passa con frequenza leggermente inferiore. I primi sono quelli deviati dall'atomo nel suo complesso, i secondi sono quelli che hanno trasferito energia agli elettroni (effetto Compton).

Ciò dimostra che i fotoni si comportano come particelle: possiedono energia e quantità di moto e negli urti seguono il principio di conservazione della quantità di moto. D'altra parte in alcuni fenomeni la luce si comporta come onda. A questo doppio comportamento della luce si dà il nome di dualismo onda-particella. Nel 1923 de Broglie suggerì che il dualismo si potesse applicare anche alle particelle. Sviluppando la sua ipotesi trovò la lunghezza d'onda che l'elettrone avrebbe dovuto avere nel suo comportamento ondulatorio:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

L'elettrone, cioè, con quantità di moto p , si comporta come onda con lunghezza d'onda $\frac{h}{p}$. Ciò è stato verificato con l'esperimento di diffrazione degli elettroni (esperimenti di Davisson e Germer, iniziati nel 1923).

Le coordinate storiche da fissare per gli studenti sono riportate nella tabella 9.1.

9.3.2 Analogia con le onde

Per una trasposizione didattica del concetto di funzione d'onda, un'ipotesi di lavoro può essere quella di partire da un'analogia con le onde. Un'esperienza sulla diffrazione degli elettroni (cfr. paragrafo 7.9.1) può servire come punto di partenza. Si può iniziare ad affrontare il percorso sotto forma di problema su cui riflettere: se le particelle hanno un comportamento ondulatorio, è possibile rappresentarle con un'equazione abbastanza familiare come quella di un'onda sinusoidale? Questo quesito consente di riflettere su una forma semplificata di un principio di indeterminazione che dovrà poi essere esteso al caso quantistico. Consideriamo per semplicità, con gli studenti, la parte spaziale di un'onda armonica, che rappresenta, in un dato istante t , un'onda che si estende all'infinito. Tale onda ha il valore di k ben definito e quindi una lunghezza d'onda determinata. Possiamo dire, quindi, che l'incertezza su k è $\Delta k = 0$ perché conosciamo k esattamente, ma niente possiamo dire sulla posizione dell'onda, che quindi ha un'incertezza $\Delta x \rightarrow \infty$. Non possiamo quindi utilizzare, per le particelle che hanno un comportamento ondulatorio, l'equazione d'onda tradizionale, perché non consente di localizzare la particella.

La teoria delle funzioni goniometriche però ci viene in aiuto. Agli studenti si può ricordare anzitutto la maniera con cui si costruisce il pacchetto d'onde utilizzando formule goniometriche, per poi osservare cosa accade se si sommano più di due funzioni goniometriche. A questo proposito può venire in aiuto un qualsiasi software matematico (negli esempi che seguono è stato usato Geogebra), che consente di trattare alcuni esempi in maniera quantitativa dal punto di vista grafico senza dover sommare le funzioni in maniera analitica. Nell'esempio in questione, sono state anzitutto disegnate otto funzioni del tipo

$$y = c \sin kx$$

nelle quali il software consente di far variare sia c che k . Se si sommano le funzioni, si possono regolare a piacimento i valori di k e c per ottenere una funzione totale quanto più "localizzata" possibile. Si trova empiricamente che il risultato migliore si ottiene quando i valori di k sono abbastanza vicini. Regolando le ampiezze c si può fare in modo che le corrispondenti funzioni influiscano in misura maggiore o minore sulla somma. Se le ampiezze sono tutte fissate a uno, tutte le otto funzioni contribuiscono alla stessa maniera. Se qualche valore di c è fissato a zero, le corrispondenti funzioni non contribuiscono alla somma. Si vede che se si sommano sempre più funzioni, la funzione somma è sempre più localizzata, perché Δx (che assumiamo essere la larghezza del pacchetto) diminuisce. Che cosa succede,

Tabella 9.2: Indeterminazione nelle onde

	a	b	c	d	e
	46,9	46,9	46,9	46,9	46,9
	46,8	46,8	46,8	46,8	46,8
	46,7	46,7	46,7	46,7	46,7
	46,6	46,6	46,6	46,6	46,6
		46,5	46,5	46,5	46,5
			46,4	46,4	46,4
				46,3	46,3
					46,2
Δk	0,075	0,08	0,083	0,086	0,0875
Δx	31,44	25,3	21,2	17,94	15,7
$\Delta k \Delta x$	2,358	2,024	1,752	1,538	1,374

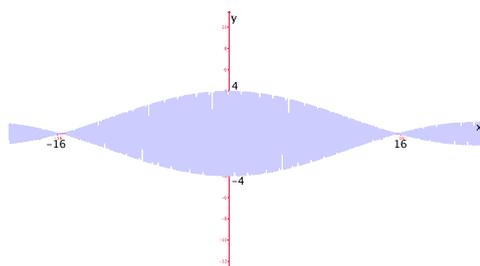
in corrispondenza, al valore di k ? Per poter disporre di un'incertezza su k , possiamo prendere in considerazione, in maniera del tutto approssimativa, ma giusto per fissare le idee, il semiscarto massimo. Consideriamo ad esempio la somma di quattro funzioni: i valori di k che contribuiscono alla somma sono riportati nella tabella 9.2, e perciò possiamo assumere $\Delta k = 0,075$. Come localizzazione del pacchetto prendiamo l'intervallo $\Delta x = 15,72$. Si ha $\Delta x \cdot \Delta k = 2,358$. Per la somma di otto funzioni abbiamo $\Delta x \cdot \Delta k = 1,374$. Si vede (cfr. tabella 9.2) che il valore $\Delta x \cdot \Delta k$ si avvicina sempre di più a uno. Effettivamente vale la relazione

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 1$$

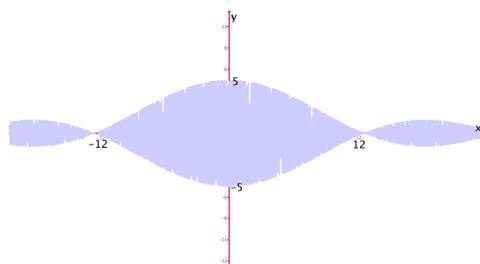
e il valore 1 è il limite inferiore che non sarà mai superato per quanto noi cerchiamo di localizzare il pacchetto.

Sembrirebbe quindi che per ottenere una funzione che rappresenti fisicamente una particella si debba sommare un numero molto grande di funzioni periodiche.

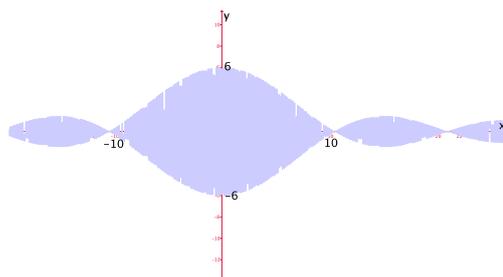
Qui occorre una precisazione molto importante, per evitare di generare negli studenti immagini non conformi ai concetti quantistici. Anche se stiamo cercando di associare a una particella una funzione d'onda per analogia col pacchetto d'onde, in meccanica quantistica la funzione d'onda rappresenta lo stato fisico della particella, ma l'informazione fisica che stiamo considerando in questo studio, cioè la localizzazione della particella, è contenuta in realtà nel modulo quadro della funzione d'onda, che è la probabilità che la particella si trovi in un certo stato. Non bisogna pensare



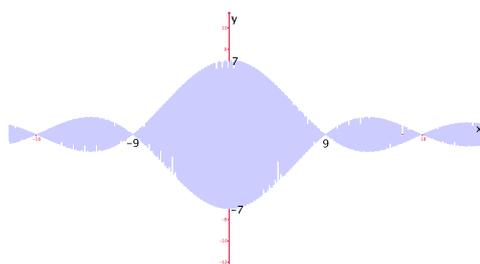
(a) *Somma di quattro funzioni*



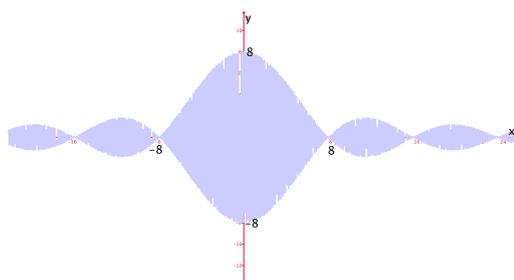
(b) *Somma di cinque funzioni*



(c) *Somma di sei funzioni*



(d) *Somma di sette funzioni*



(e) *Somma di otto funzioni*

Figura 9.1: Somma di più funzioni sinusoidali

alla funzione d'onda come un'onda che rappresenta fisicamente la particella, ma come uno strumento matematico che serve per rappresentare lo stato della particella, come nei sistemi a due stati si è fatto uso dei vettori. L'utilità di introdurre la funzione d'onda come metodo alternativo per la rappresentazione degli stati può essere quella di illustrare il principio di indeterminazione con analogie che si possono trarre dalla rappresentazione delle onde.

Supponiamo di conoscere la funzione d'onda per una certa particella in un certo istante, che possiamo assumere come istante iniziale. Si può presentare agli studenti il ruolo fondamentale dell'equazione di Schrödinger, un'equazione che, a partire dallo stato iniziale $\Psi(0, t)$ e dall'energia cinetica e potenziale della particella, consente di determinare l'evoluzione dello stato $\Psi(x, t)$. Nel caso della particella libera (cioè non soggetta a potenziali), le soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono funzioni periodiche che indichiamo con $\psi_k(x, t)$, dove $k = \frac{p}{\hbar}$ può assumere infiniti valori. Si è detto che le singole funzioni periodiche non possono rappresentare uno stato fisico e che occorre una somma di infinite funzioni periodiche. Uno strumento matematico che consente queste operazioni è la serie di Fourier: certe categorie di funzioni possono essere espresse come somma di infinite funzioni periodiche. Poiché tali funzioni hanno tutte frequenze infinitamente vicine tra loro, la somma è in realtà un integrale e si chiama antitrasformata di Fourier (8.1), dove $F(k)$ è il contributo in ampiezza di ogni componente, contributo che dipende da k . La (8.1) può essere invertita per ricavare la (8.2), che si chiama antitrasformata. Se trasportiamo questa procedura alle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per la particella libera, possiamo dire che una funzione che rappresenta tale stato può essere ottenuta da una sovrapposizione di infinite funzioni del tipo $\psi_k(x, t)$, che portano ciascuna un contributo in ampiezza pari a $\phi(k)$, contributo che dipende dalla quantità di moto. La funzione $\phi(k)$ quindi ci dice come è distribuita la quantità di moto della particella. In particolare la teoria ci dice che

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(k) \psi_k(x, t) dk. \quad (9.8)$$

Possiamo qui osservare che la funzione d'onda nella forma 9.8 è una generalizzazione di un sistema a due stati che abbiamo espresso, in questo studio, nella forma 9.1: le funzioni ψ_k corrispondono agli stati di base \mathbf{u} e \mathbf{d} , i coefficienti a_{\pm} diventano la funzione $\phi(k)$ e la somma diventa un integrale perché siamo passati dal discreto al continuo.

Ricordando che siamo partiti dall'ipotesi di conoscere lo stato iniziale

della particella, possiamo esprimerlo, ponendo $t = 0$ nella 9.8, come

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(k) e^{ikx} dk.$$

Questa formula può essere invertita per ricavare la distribuzione delle quantità di moto della particella:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx.$$

Prendiamo in particolare come funzione d'onda un pacchetto d'onde gaussiano all'istante $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = A e^{-ax^2}.$$

Per trovare il coefficiente A occorre normalizzare lo stato, cioè ricavare il valore di A tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx.$$

Per i dettagli del calcolo dell'integrale, cfr. appendice F. Dopo la normalizzazione si trova

$$\Psi(x, 0) = \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} e^{-ax^2}.$$

Possiamo ora ricavare la distribuzione delle quantità di moto:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} \int e^{-(ax^2 + ikx)} dx.$$

Per il calcolo dell'integrale, cfr. sempre appendice F. Si trova

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt[4]{2a\pi}} e^{-k^2/4a}.$$

Ora, ricordando le proprietà della gaussiana risulta

$$\Delta x = \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

e

$$\Delta p = \sigma_p = \sqrt{2a},$$

quindi

$$\Delta x \Delta p = 1,$$

perciò il pacchetto d'onde gaussiano è quello con indeterminazione minima.

In sintesi, quindi:

- la funzione $\Psi(x, 0)$ è una “fotografia” della funzione d’onda all’istante iniziale;
- tale funzione è un pacchetto d’onde, cioè una somma di infinite funzioni armoniche del tipo e^{ikx} , con $k = \frac{p}{\hbar}$, ciascuna delle quali porta un contributo in quantità di moto compreso fra p e $p + dp$;
- la funzione $\phi(k)$ è la distribuzione di queste quantità di moto;
- se cerchiamo di localizzare meglio la particella diminuendo Δx , perdiamo la precisione sulla quantità di moto, perché aumenta Δp , e viceversa;
- il pacchetto d’onda gaussiano è quello con indeterminazione migliore.

9.4 LA BUCA DI POTENZIALE INFINITA

Per trattare in maniera quantitativa qualche esempio di funzione d’onda, possiamo presentare agli studenti il caso di una particella che all’interno di una certa regione dello spazio è completamente libera di muoversi, ma agli estremi di tale regione è vincolata da una forza che le impedisce di uscire. Questo caso è chiamato in meccanica quantistica “buca di potenziale infinita”. Un esempio analogo tratto dalla fisica classica è quello di un carrello che scorre senza attrito su un binario, con respingenti perfettamente elastici che gli consentono di rimbalzare avanti e indietro all’infinito. Dalla fisica classica sappiamo che il carrello può occupare qualsiasi posizione durante il moto (entro gli estremi fissati) e possiede un’energia che varia con continuità. Il caso quantistico invece ha un comportamento ben differente. Dalla risoluzione dell’equazione di Schrödinger risulta che la particella non può avere qualsiasi energia, ma solo i valori

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Abbiamo quindi un altro esempio di quantizzazione, dopo il caso dello spin (ma in questo caso si tratta di uno spazio quantistico a dimensione infinita). Si trova inoltre che le soluzioni dell’equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo sono le funzioni del tipo

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, \dots, \infty.$$

Queste funzioni assomigliano alle onde stazionarie, ma bisogna sempre ricordare che la funzione d’onda non ha significato fisico. Per questo aspetto

dovremo invece calcolare il modulo al quadrato della funzione d'onda. Intanto si possono assegnare, o svolgere insieme, agli studenti, alcune esercitazioni a titolo di verifica delle proprietà più importanti delle suddette funzioni, per esempio il fatto che sono ortogonali o che costituiscono uno spazio vettoriale. Se si è in precedenza accennato al significato di sviluppo in serie di Fourier, si può parlare di un'altra proprietà importante: ogni funzione $f(x)$ può essere espressa come combinazione lineare delle suddette funzioni. Se si considera anche la dipendenza dal tempo dell'equazione di Schrödinger, l'insieme di soluzioni è

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad n = 1, \dots, \infty.$$

e quindi una generica soluzione sarà una combinazione lineare. Un aspetto importante da far osservare è che le funzioni $\Psi_n(x, t)$ sono stati stazionari, cioè stati la cui probabilità non dipende dal tempo. È facile verificare, anche per gli studenti, che calcolando il modulo al quadrato di questi stati la dipendenza dal tempo sparisce.

Come esempi di esercizi, oltre a verificare alcune proprietà delle funzioni $\psi_n(x)$, si possono costruire combinazioni lineari di questi stati e calcolare probabilità associate. Un calcolo un po' più difficile è quello in cui, assegnato uno stato iniziale, si chiede di normalizzarlo e determinare i coefficienti c_n . Un esempio (tratto da [38, p. 41] ma adattato) può essere quello che segue. Supponiamo che la particella si trovi in uno stato iniziale che è una combinazione lineare, con uguali probabilità, degli stati $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Tale stato quindi potrà essere scritto come

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)].$$

Come prima cosa bisogna determinare la costante A con la normalizzazione. Si trova

$$\begin{aligned} 1 &= |A|^2 \int_0^a (\psi_1^* + \psi_2^*)(\psi_1 + \psi_2) dx = \\ &= |A|^2 \int_0^a (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dx = \dots = |A|^2 \frac{2}{a} \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) \end{aligned}$$

da cui segue

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si ha quindi

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)$$

dove si vede che le ampiezze di probabilità sono $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi le probabilità che una misura sullo stato dia energia E_1 o E_2 sono uguali (e entrambe uguali a $\frac{1}{2}$), come si è detto nelle ipotesi di partenza.

Lo stato della particella in un generico istante successivo sarà

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

Ponendo $\omega = \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$, si ha $E_1 = \omega \hbar$ e quindi si può scrivere

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-4i\omega t}.$$

Con un po' di pazienza (non sono calcoli difficili) si ricava la probabilità

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos 3\omega t.$$

Si possono riproporre esercizi analoghi variando le probabilità con cui si combinano gli stati per costituire lo stato iniziale, ad esempio ponendo

$$\Psi(x, 0) = A[\psi_1(x) + \sqrt{3}\psi_2(x)].$$

oppure usando altri stati per costruire lo stato iniziale.

Parte III

Gli insegnanti e la meccanica quantistica

Un'esperienza di formazione insegnanti

10.1 INTRODUZIONE

Nell'ambito del progetto di ricerca sull'insegnamento della fisica moderna in età preuniversitaria, era prevista una fase di riflessione con gli insegnanti, per indagare su come questi percepiscono la necessità di insegnare argomenti di meccanica quantistica e le difficoltà che si presentano, nonché avere, sotto forma di loro opinioni, un primo riscontro, ancorché incompleto, dell'ipotesi di trasposizione didattica da me realizzata. Ho proposto pertanto agli insegnanti di matematica e fisica di un liceo scientifico un'attività, sotto forma di “incontri di formazione e aggiornamento”, accompagnando la proposta con la seguente dichiarazione:

Alla luce dei recenti cambiamenti nell'ordinamento della scuola secondaria, si vuole riflettere con gli insegnanti su un aspetto importante della didattica della scienza: l'insegnamento della fisica moderna. In particolare si esamineranno le difficoltà che si manifestano sia dal punto di vista dell'insegnante (scelta dei contenuti, metodologie più adatte, ecc.) sia dal punto di vista dello studente (lontananza dal senso comune di alcuni aspetti della fisica moderna, complessità matematica, ecc.). Obiettivo principale è fornire gli strumenti per inserire nelle programmazioni la fisica moderna non in via residuale, come in genere è stato fatto fino ad ora, ma come percorso effettivamente realizzato con gli studenti.

Prima di iniziare l'attività, oltre alla dichiarazione dell'obiettivo dell'attività, ho fornito il seguente programma.

1. Esame delle Indicazioni Nazionali: che cosa dice la normativa sull'insegnamento della fisica moderna.

2. Riflessioni introduttive: la relazione fra Insegnante-Allievo-Sapere; l'importanza della trasposizione didattica; il ruolo del pre-costruito nella didattica della matematica e della fisica.
3. Un approccio storico alla fisica moderna: vantaggi e problemi.
4. Esame delle difficoltà che si incontrano nell'insegnamento della fisica moderna e scelta dei contenuti per un possibile percorso didattico: l'effetto fotoelettrico; il principio di sovrapposizioni; i sistemi a due stati; l'atomo.
5. Gli strumenti matematici necessari per trattare argomenti di meccanica quantistica: i numeri complessi; gli spazi vettoriali; la probabilità.
6. Una proposta di trasposizione didattica: un percorso completo di meccanica quantistica con strumenti matematici semplificati ma rigorosi, con esercizi conclusivi.
7. Il laboratorio: sono possibili esperienze didattiche di fisica moderna?

Le attività si sono svolte nell'ambito di tre incontri da circa 2 ore ciascuno, nel mese di novembre del 2013. Agli incontri hanno partecipato: 4 insegnanti di matematica e fisica (su 6 titolari), 1 insegnante di matematica del primo biennio (su 2 titolari), 1 insegnante in pensione. Di questi insegnanti, 5 sono laureati in matematica e 1 in ingegneria; quanto alla formazione professionale, 4 hanno conseguito le abilitazioni all'insegnamento nel canale dei concorsi ordinari e/o riservati ante 2001 e 2 nel canale più recente della SSIS.

10.2 SVOLGIMENTO DELLE ATTIVITÀ

All'inizio del primo incontro ho somministrato una scheda con i seguenti sei quesiti, i primi cinque sull'esperienza personale di insegnamento della fisica moderna, l'ultimo sull'insegnamento di alcuni strumenti matematici.

1. Hai affrontato in classe argomenti di fisica moderna?
2. Se sì, quali?
3. Se no, perché?
4. Se sì, sono sorte difficoltà? Impressioni sull'esito.
5. È possibile, secondo te, nella scuola di oggi insegnare la fisica moderna?

6. In quale classe possono essere affrontati numeri complessi - probabilità - spazi vettoriali? Se ritieni che non possono essere affrontati, quali potrebbero essere le motivazioni?

Essendo la prima esperienza di formazione con adulti e per di più in una posizione allo stesso tempo esterna ma anche di parità, ho ritenuto opportuno non impartire lezioni, ma cercare di porre dei problemi su cui discutere, prima di carattere didattico (attraverso i quesiti suddetti) e poi sui contenuti specifici, anche se ho avuto l'impressione che le attese dei partecipanti fossero proprio quelle di una sorta di conferenza, poiché hanno dichiarato che non ricordavano certi argomenti e avevano piacere di rinfrescarli oppure non li avevano mai visti. In ogni caso ho cercato di sollecitare le loro opinioni, sia per quanto riguardava la chiarezza del filo logico del percorso didattico che si andava affrontando, sia per la fattibilità di alcune parti o dell'intero percorso. Le domande che mi sono state poste, infatti, riguardavano soprattutto aspetti fisico-matematici più che didattici. Un insegnante ad esempio chiedeva chiarimenti sugli spazi di funzioni di cui ricordava doversi fare uso in meccanica quantistica; un insegnante di matematica chiedeva se nella diffrazione degli elettroni il fatto che siano emessi più o meno rapidamente dalla sorgente può influenzare la probabilità successiva; un altro chiedeva se le relazioni di indeterminazione sono un principio o una conseguenza della teoria.

Per dare seguito a queste attività di formazione, ho proposto agli insegnanti una visita al laboratorio didattico dell'Università di Cagliari, allo scopo di esaminare con me alcune esperienze didattiche sulla fisica moderna. Si tratta di un laboratorio, di recente allestimento e inaugurazione (22 novembre 2014), a uso prevalentemente dei corsi universitari (per tutti i percorsi che contengono corsi di fisica sperimentale), ma tra le sue finalità rientra non solo quella didattica ma anche quella di formazione e orientamento, poiché ospita ad esempio iniziative per studenti delle scuole secondarie e per i loro insegnanti. Il laboratorio, inoltre, ospita attività divulgative per il grande pubblico. Per completare la mia attività con gli insegnanti ho scelto le due esperienze descritte nel paragrafo 7.9: la diffrazione degli elettroni e l'esperimento di Franck ed Hertz.

Alla visita (che si è tenuta nel mese di marzo 2014) hanno partecipato 4 insegnanti, uno dei quali non era presente agli incontri formativi. La visita è iniziata con un incontro nel quale ho somministrato un questionario, ho suscitato una discussione e abbiamo esaminato insieme i cenni teorici delle esperienze didattiche selezionate.

Ecco il questionario proposto:

1. Fai uso del laboratorio nell'attività didattica? Se sì, indica tre argomenti per cui hai realizzato attività in laboratorio. Quale è stata la risposta degli studenti?
2. Quale può essere il ruolo del laboratorio per un eventuale insegnamento della fisica moderna nella scuola e per gli studenti di oggi? Ad esempio influente, solo dimostrativo, anche quantitativo, solo virtuale, ...
3. Ti è capitato di proporre esperienze didattiche sulla fisica moderna, anche solo a carattere dimostrativo, con le apparecchiature presenti nelle nostre scuole? Se sì, quali esperienze? Per quale occasione? Ad esempio per l'ordinaria attività didattica o per "settimane della scienza" o per attività di orientamento ...
4. Le scuole in cui hai lavorato dispongono di un laboratorio con apparecchiature per la fisica moderna? Se sì, ne ricordi qualcuna?
5. Hai consultato, utilizzato o semplicemente conosciuto materiale multimediale riguardante esperienze di fisica moderna? Ad esempio filmati in rete, siti, materiale fornito con i libri di testo, ...

Per quanto riguarda la conversazione che si è sviluppata, essa ha toccato i seguenti problemi inerenti l'attività didattica in laboratorio (non solo per quanto riguarda la fisica moderna).

Il tecnico di laboratorio. Per mancanza di tempo, gli insegnanti hanno difficoltà a preparare le esperienze in anticipo, soprattutto se si tratta di attività mai svolte prima. Nelle scuole dovrebbe essere prevista la figura del tecnico di laboratorio, che spesso non c'è o, se c'è, come nel caso della scuola in esame, non ha le competenze adatte alla preparazione di esperienze didattiche e si limita a predisporre ciò che l'insegnante "ha lasciato pronto sul tavolo".

Il laboratorio dal punto di vista degli studenti. L'attività di laboratorio è percepita dagli studenti come una sinecura, un'attività di svago, un'ora diversa dalla solita lezione alla lavagna. Questo implica che gli studenti, mediamente, si recano in laboratorio per distrarsi e non traggono profitto dall'attività. Nel peggiore dei casi la conseguenza è una difficile gestione del gruppo in laboratorio, da parte dell'insegnante, a causa del comportamento poco corretto degli studenti, che implica la scarsa ricaduta didattica dell'attività.

La preparazione degli studenti. Uno degli insegnanti presenti sostiene che comunque il laboratorio deve essere preceduto da una solida preparazione teorica, che spesso manca per lo scarso studio degli allievi. Un altro insegnante sostiene invece che l'attività di laboratorio deve essere meramente pratica, un momento in cui gli allievi si rendono conto che la fisica è una disciplina che ha sostanzialmente applicazioni pratiche. Qui vi è una differenza di opinioni dovute alla particolare formazione degli insegnanti, rispettivamente per la superiorità della "teoria" o delle attività "sperimentali". Di conseguenza il ruolo del laboratorio cambia a seconda delle visioni.

Gli studenti "meritevoli". Un insegnante sostiene che le attività di laboratorio, come del resto altre attività "aggiuntive" indirizzate a studenti, devono essere destinate solo agli allievi meritevoli. Questo risolverebbe il problema dell'atteggiamento sbagliato degli studenti in laboratorio relativamente al comportamento, che è stato già evidenziato. Non si è chiarito però cosa si intende per "meritevoli". Dalla discussione è emerso che si intendono tali non tanto quelli che hanno un buon profitto scolastico e che si sono preparati a dovere sull'argomento, quanto quelli che mostrano un comportamento corretto e si rendono disponibili di buon grado ad apprendere, anche se hanno difficoltà. Spesso infatti le due categorie non coincidono. A supporto del fatto che è meglio riservare certe attività a studenti scelti, è stato citato dai presenti il caso della "Settimana della Scienza", un'attività in cui gli studenti espongono e dimostrano alcune esperienze di laboratorio precedentemente preparate. L'esposizione è rivolta sia alla scuola (altri studenti e insegnanti), sia al pubblico esterno. Ciò dimostra che certi studenti, quando sono nelle condizioni adatte e in particolari contesti, riescono a destreggiarsi in laboratorio e a esporre l'esperienza in maniera chiara a tutti, rispondendo anche a domande che il pubblico, incuriosito, rivolge loro.

Nuove tecnologie. Nella conversazione sono emersi spunti di discussione anche al di fuori dell'uso del laboratorio, in particolare sull'uso degli strumenti didattici come le LIM. Uno degli insegnanti presenti, ad esempio, trova molto utile il fatto di poter salvare le lezioni svolte in classe, ad esempio perché gli studenti possono prelevarle e portarle a casa, oppure perché si possono inviare agli studenti assenti.

Dopo la conversazione, ho chiesto ai presenti che cosa si aspettassero da questo incontro e che cosa desiderassero vedere in laboratorio. Un insegnante ha dichiarato che aveva accettato di partecipare di buon grado

sia ai precedenti incontri sia al presente, in quanto animato dalla curiosità: non avendo mai avuto occasione di studiare in maniera approfondita la meccanica quantistica, sperava che l'attività da me proposta fosse utile in vista della necessità di insegnare questi argomenti. Un altro insegnante ha espresso l'aspettativa di vedere in laboratorio l'esperienza sulla diffrazione degli elettroni.

Sono passato a presentare i cenni teorici delle esperienze, che avevo scelto senza comunicarlo loro precedentemente: la diffrazione degli elettroni e l'esperienza di Franck ed Hertz. Uno degli insegnanti ha osservato che, essendo argomenti molto astratti e complessi per gli studenti, occorrerebbe sempre presentare loro un risvolto pratico. Egli osserva infatti che la tipica domanda che pongono gli studenti, quando si affrontano argomenti che esulano dai fenomeni quotidiani, è: "Ma questo a che cosa ci serve?". Per quanto riguarda la diffrazione degli elettroni, l'insegnante stesso suggerisce di citare il microscopio elettronico.

Ho presentato poi, in laboratorio, le due esperienze agli insegnanti. Per quanto riguarda la diffrazione degli elettroni, riscuote sempre interesse vedere gli anelli di diffrazione. L'insegnante che si aspettava di vedere proprio questa esperienza, però, pone un quesito: in realtà, oltre che vedere le figure di diffrazione, si aspettava di vedere cosa accade anche quando non vi è la diffrazione. Ad esempio si aspettava di vedere il fenomeno analogo all'esperienza delle due fenditure, quando si osserva dove passa il fotone e si distrugge la figura di interferenza. Chiede ad esempio se, per l'esperienza in esame, esistano apparati dove si può in qualche modo estrarre o disattivare il cristallo di grafite che funge da reticolo. Nel descrivere l'esperienza ho illustrato una difficoltà che abbiamo incontrato nella preparazione. Nell'esperienza si deve, al variare della tensione anodica, calcolare la lunghezza d'onda e misurare il raggio degli anelli di diffrazione; dalla relazione fra lunghezza d'onda e raggio degli anelli, per regressione lineare, si calcola la distanza reticolare. Pur manifestandosi la relazione di linearità fra lunghezza d'onda e raggio, il valore calcolato della distanza reticolare non coincideva con quello teorico. Ciò faceva pensare a un'errata misura della tensione anodica. Presentando questo problema agli insegnanti, è stato interessante osservare come i due ingegneri siano stati attratti da questo aspetto "tecnico": riflettendo con loro siamo giunti alla conclusione che occorre inserire, nell'apparato sperimentale, un voltmetro per misurare la differenza di potenziale realmente fornita all'anodo, e comunque riesaminare il circuito che alimenta il dispositivo, che è abbastanza complesso.

Per quanto riguarda l'esperienza di Franck ed Hertz, uno degli insegnanti osserva che ciò che accade nel tubo potrebbe essere analogo a ciò che accade nei tubi al neon per l'illuminazione. L'esperienza ha generato un'animata

discussione sui principi fisici del fenomeno.

Al termine dell'attività in laboratorio, ho proposto un'ultima serie di domande:

1. un giudizio sulla visita in laboratorio, relativamente all'interesse personale;
2. un giudizio sulla visita in laboratorio relativamente all'utilità per l'insegnante (per i contenuti trattati, per la metodologia, ...);
3. un giudizio sulla visita in laboratorio relativamente a eventuali ricadute didattiche;
4. limiti delle esperienze proposte (tempo, organizzazione, tipo di materiale, montaggio, conoscenze necessarie, ...).

10.3 SPUNTI DI RIFLESSIONE

Dato il numero esiguo dei partecipanti, lo scopo delle domande poste non era quello di trarre informazioni statistiche ma di illustrare un caso in cui si può vedere come i docenti si pongono di fronte all'insegnamento della fisica moderna. Le risposte fornite ai quesiti posti, per completezza, sono riportate nell'appendice G.

Dell'attività svolta nel complesso con gli insegnanti, mediante le mie osservazioni e le risposte da essi fornite, si può riassumere quanto segue.

- Per quanto il campione non sia rappresentativo, nessuno degli insegnanti intervistati è laureato in fisica. Potrebbe esserci, dunque, alla base dell'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola secondaria un problema di formazione degli insegnanti, aspetto messo in evidenza anche da alcune risposte.
- Le esperienze di insegnamento di fisica moderna degli insegnanti sono poche e limitate agli aspetti tradizionalmente trattati nell'impostazione storica.
- Gli insegnanti ritengono che sia possibile trattare la fisica moderna, ma rilevano che la maggiore difficoltà è l'aspetto matematico.
- L'uso del laboratorio per la didattica della fisica moderna risulta per gli insegnanti molto problematico, per diversi motivi: la preparazione e il comportamento degli studenti, la scarsità di apparecchiature, la poca confidenza degli insegnanti con le esperienze didattiche sulla fisica moderna, l'assenza di un assistente di laboratorio.

- L'uso del laboratorio "virtuale" è limitato a pochi insegnanti.
- Le esperienze di fisica moderna, secondo alcuni pareri, non consentono la manualità tipica delle esperienze di fisica classica perché appaiono "preconfezionate".
- È stato molto apprezzato dagli insegnanti il momento di confronto che è sorto durante l'osservazione delle esperienze sull'interpretazione dei fenomeni: questo entusiasmo potrebbe essere un indice del fatto che spesso nella scuola gli insegnanti lavorano in maniera indipendente e non interagiscono fra loro al di fuori delle riunioni collegiali istituzionali.

Vedremo come alcune delle ipotesi formulate e delle impressioni ricavate potranno ricevere conferma dall'analisi di un'altra attività con insegnanti, sulla base di un campione più numeroso. Intanto, un problema che è emerso dall'esperienza appena descritta è quello della formazione degli insegnanti. Si è pertanto proceduto a un'indagine su un campione di insegnanti abilitati, per stabilire con quale tipo di formazione accedono all'insegnamento. I risultati sono descritti nel prossimo paragrafo.

10.4 ALCUNI DATI SULLA FORMAZIONE INSEGNANTI

Gli insegnanti attualmente in servizio a tempo indeterminato nella scuola italiana possono essere stati assunti attraverso due canali di reclutamento: il concorso per titoli ed esami, c.d. ordinario, e la chiamata da graduatorie di abilitati. Gran parte delle assunzioni sono state disposte a partire dall'anno 2000, sui vincitori del concorso ordinario bandito nel 1999 (D.D.G. 31/3/1999) e sugli aspiranti inseriti nelle graduatorie. Per matematica e fisica le graduatorie del concorso ordinario sono state esaurite quasi subito, perché a fronte di un gran numero di partecipanti al concorso, pochissimi sono stati i vincitori. Possiamo ritenere, pertanto, che a partire dal 2000 la quasi totalità del personale assunto a tempo indeterminato per l'insegnamento di matematica e fisica provenga dalle graduatorie degli abilitati. A loro volta, questi hanno potuto conseguire l'abilitazione secondo varie modalità, una delle quali è stata la SSIS, che ha operato dall'anno accademico 1999/2000 (prime abilitazioni conseguite nel 2001) all'anno accademico 2007/2008 (ultime abilitazioni conseguite nel 2009). Poiché gli abilitati SSIS costituiscono gran parte degli insegnanti attualmente in servizio, non solo a tempo indeterminato, sono stati scelti come campione su cui studiare il legame fra titolo di studio posseduto e abilitazione conseguita. In particolare per ogni abilitato SSIS presso l'università di Cagliari in matematica

e fisica (classe di concorso A049) è stato rilevato il tipo di laurea con cui hanno avuto accesso alla SSIS.¹

Gli abilitati SSIS nella classe di concorso A049 in questi dieci anni, risultanti agli atti dell'Università di Cagliari, sono in tutto 128. Nella figura 10.1 sono stati ripartiti in base al titolo di studio. Come si può vedere, i laureati in fisica non sono la maggior parte. Nella tabella 10.1, gli abilitati sono stati ripartiti anche per anno accademico, per evidenziare l'evoluzione storica del fenomeno. Gli stessi dati sono riportati nella figura 10.2.

Dalla serie storica si può vedere che prevalgono quasi sempre i laureati in matematica e che i laureati in ingegneria sono concentrati solo nei primi tre cicli della SSIS. Questo risultato è l'esito della corretta applicazione, col passare del tempo, della normativa vigente, che preclude ai laureati in ingegneria l'accesso alla classe di concorso A049. Probabilmente un'analoga analisi su abilitati con altre modalità (concorsi ordinari e riservati) mostrebbe una presenza ancora maggiore di laureati in ingegneria nella classe di concorso A049, per effetto di norme transitorie e contraddizioni nella normativa all'epoca vigente.²

I laureati in fisica sono quelli che nel loro percorso accademico hanno

¹I dati sono stati rilevati presso la Segreteria del Settore Post Lauream - Direzione per la Didattica e l'Orientamento dell'Università di Cagliari.

²Riportiamo in questa nota le vicende fondamentali che hanno consentito a diversi ingegneri di insegnare matematica e fisica. La norma principale è il DM 39/1998, che, come si è detto più volte, consente agli ingegneri l'accesso alle sole classi di concorso A038 e A047, peraltro con opportune condizioni. Nel D.M. 354/1998, che stabilisce i titoli per la partecipazione ai concorsi a cattedre, si legge però (allegato 1 del D.M. citato) che la laurea in ingegneria, purché conseguita entro l'anno accademico 2000/2001, consente di partecipare al concorso per l'intero ambito disciplinare 8, costituito dalle classi di concorso A038, A047, A049. Questa possibilità, però, vale (articolo 1 del citato D.M.) "ai soli fini dell'accesso ai ruoli, mediante concorso, per esami e titoli, del personale docente della scuola secondaria ed artistica, della mobilità e della utilizzazione del personale medesimo", quindi doveva valere solo per il concorso ordinario in oggetto (e per gli eventuali successivi). Effettivamente, nell'O.M. 153/1999, con cui sono stati indetti concorsi riservati, si fa riferimento, correttamente, al D.M. 39/1998 che quindi esclude gli ingegneri dai suddetti concorsi riservati. Ma in una circolare di chiarimento (C.M. 266/1999) si precisa che, a parziale rettifica di quanto già comunicato, "l'accesso alla sola classe 49/A - Matematica e fisica, precluso ai laureati in ingegneria da una rigorosa applicazione della norma, contenuta nella O.M. n. 153/99, possa essere consentito, in ragione di una prossima revisione delle classi di concorso per il riordino dei cicli scolastici e anche al fine di venire incontro alle segnalate difficoltà organizzative di taluni Provveditorati, che hanno già iniziato i corsi abilitanti". Pertanto, in virtù di questa circolare di rettifica, diversi ingegneri hanno potuto conseguire l'abilitazione nella classe di concorso A049, ed essere poi assunti a tempo indeterminato dalle graduatorie degli abilitati. Per dovere di cronaca è opportuno sottolineare che "la revisione delle classi di concorso per il riordino dei cicli scolastici" non è ancora giunta a compimento.

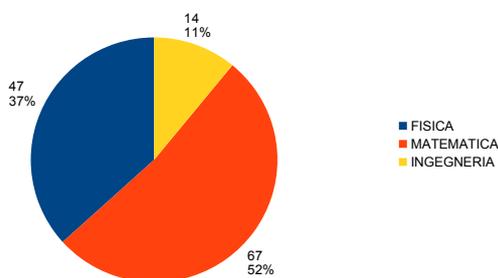


Figura 10.1: I 128 abilitati SSIS nella classe di concorso A049 per tutti gli anni accademici, ripartiti per titolo di accesso

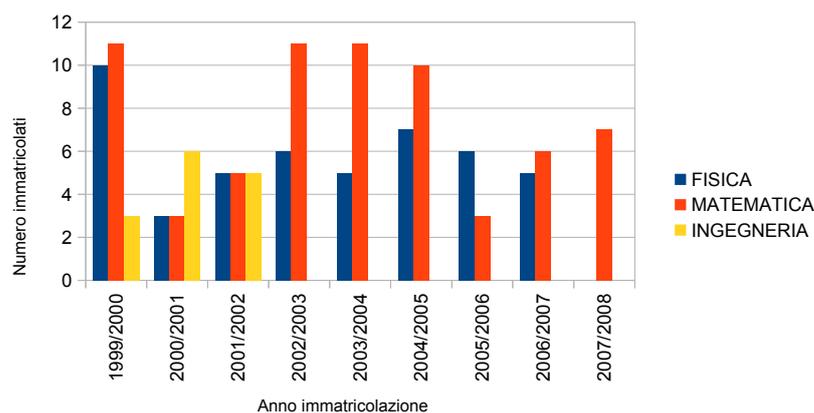


Figura 10.2: Abilitati SSIS A049, ripartiti per anno accademico di immatricolazione e per titolo di accesso

ricevuto una formazione in fisica moderna e in particolare in meccanica quantistica. Di questi è stato rilevato anche l'anno di laurea.³ Dai dati risulta che tutti hanno conseguito la laurea in fisica ai sensi della normativa anteriore al D.M. 509/1999. Dalla figura 10.3 si evince che la maggior parte dei laureati in fisica che poi si sono abilitati presso la SSIS hanno conseguito la laurea tra il 1998 e il 2002.

³I dati sono stati rilevati presso la Segreteria della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali - Direzione per la Didattica e l'Orientamento dell'Università di Cagliari.

10.4. Alcuni dati sulla formazione insegnanti

Tabella 10.1: Abilitati SSIS A049, ripartiti per anno accademico di immatricolazione e per titolo di accesso

Anno accademico	Laurea di accesso		
	Fisica	Matematica	Ingegneria
1999/2000	10	11	3
2000/2001	3	3	6
2001/2002	5	5	5
2002/2003	6	11	0
2003/2004	5	11	0
2004/2005	7	10	0
2005/2006	6	3	0
2006/2007	5	6	0
2007/2008	0	7	0
Totale	47	67	14

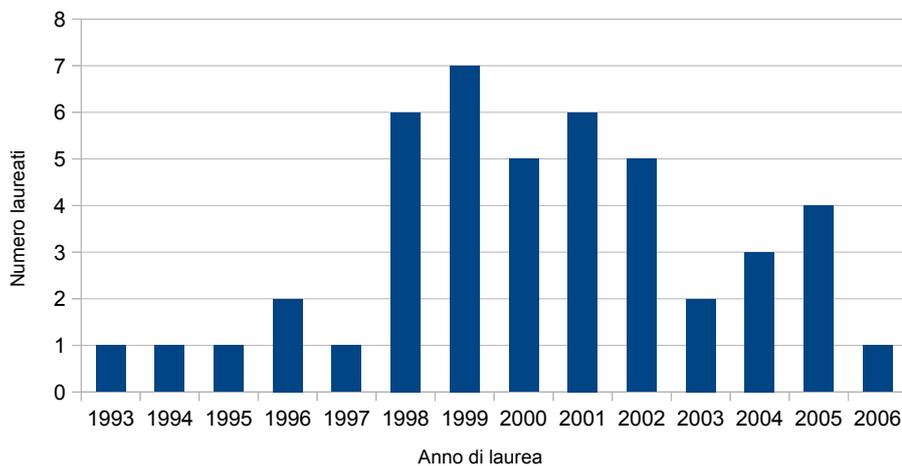


Figura 10.3: Laureati in fisica che hanno conseguito l'abilitazione alla SSIS ripartiti per anno di laurea

Una Scuola Nazionale di fisica moderna

11.1 INTRODUZIONE

Una delle ipotesi formulate all'inizio di questo lavoro di ricerca è il fatto che gli insegnanti stessi, chiamati a declinare le Indicazioni Nazionali in una programmazione didattica, manifestino difficoltà nell'inserire o nel trattare argomenti di meccanica quantistica. Per verificare tale ipotesi, è stata condotta un'indagine su alcuni campioni di insegnanti della scuola secondaria superiore. È opportuno precisare che gli insegnanti coinvolti nell'indagine erano fortemente interessati al problema di un'efficace didattica della meccanica quantistica, e motivati a impegnarsi per risolverlo (ciò risulta dai motivi che esporremo più avanti). Escludiamo pertanto in partenza, dalle motivazioni delle difficoltà nell'insegnamento della meccanica quantistica, il mero disinteresse dell'insegnante.

Come campione su cui condurre l'indagine, è stato individuato l'insieme degli insegnanti che hanno partecipato a un'importante attività di formazione, la Scuola Nazionale di Fisica Moderna per Insegnanti, nell'ambito del progetto *Innovazione Didattica In Fisica e Orientamento* (IDIFO5) del Piano Lauree Scientifiche. La Scuola è stata organizzata dalla Sezione di Fisica e Matematica del Dipartimento di Chimica, Fisica e Ambiente e dal Centro Interdipartimentale di Ricerca Didattica dell'Università di Udine, in collaborazione col Ministero dell'Istruzione e vari enti di ricerca nazionali e internazionali. Alla Scuola (tenutasi presso il suddetto Dipartimento dell'Università di Udine nel periodo 08-12 settembre 2014) hanno partecipato sessanta insegnanti della scuola secondaria superiore, selezionati sulla base del loro curriculum. Le attività consistevano in conferenze e seminari tenuti dai docenti delle Università e degli enti di ricerca coinvolti nell'organizzazione della scuola, in percorsi concettuali e didattici su temi di fisica moderna, in laboratori di didattica e sperimentali, in simulazioni e modellizzazioni. I percorsi didattici riguardavano fenomenologia elettromagnetica, fenome-

nologia della superconduttività, massa e energia in prospettiva classica e relativistica, meccanica quantistica a partire dalla polarizzazione ottica e dallo spin, tecniche di analisi nella fisica dei materiali. Le attività sperimentali hanno esplorato fenomeni attinenti alla fisica moderna: diffrazione, polarizzazione, misura della velocità della luce, misura della resistività in funzione della temperatura di superconduttori, metalli e semiconduttori, effetto Hall, esperimento di Franck ed Hertz, misura del rapporto fra carica e massa dell'elettrone.

Per quanto riguarda, più in particolare, i percorsi concettuali e didattici sulla meccanica quantistica, i corsisti hanno familiarizzato con l'approccio del gruppo di ricerca in Didattica della Fisica dell'Università di Udine, qui descritto nel capitolo apposito, ma è stata anche fornita loro l'opportunità di riflettere, pure in maniera molto sintetica, sugli altri principali approcci didattici alla meccanica quantistica attualmente oggetto di studio da parte di altri gruppi di ricerca in Italia. Essendo stato a me assegnato l'incarico di illustrare ai corsisti gli altri approcci, ho presentato loro una sintesi di quanto da me descritto nel capitolo apposito di questa tesi.

A conclusione della mia attività con i corsisti, ritenendo che, dopo i percorsi didattici e concettuali della Scuola e dopo la mia sintesi sui diversi approcci, avessero un quadro di riferimento sufficientemente articolato sulle proposte didattiche per la meccanica quantistica accreditate presso la ricerca didattica, ho somministrato loro un questionario, per indagare sui seguenti aspetti:

1. Gli insegnanti di fronte ai concetti fondanti della meccanica quantistica.
2. Aspetti importanti dell'insegnamento della meccanica quantistica eventualmente tralasciati dai vari approcci.
3. I vari approcci e le difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento della meccanica quantistica.
4. Percezione della coerenza dei vari approcci con le Indicazioni Nazionali.
5. Eventuale esperienza pregressa dei corsisti nell'insegnamento della meccanica quantistica.
6. Sulla base della partecipazione alla scuola, osservazioni e proposte dei corsisti per la didattica della meccanica quantistica.

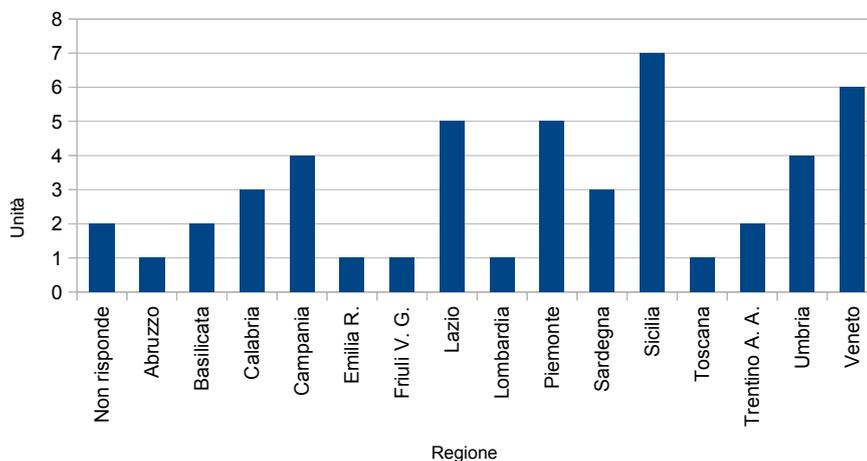


Figura 11.1: Regione di provenienza dei corsisti

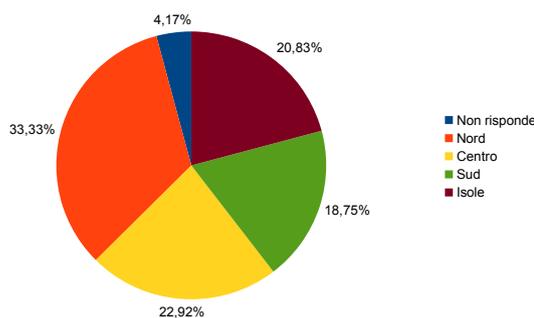


Figura 11.2: Area di provenienza dei corsisti

7. Sulla base della partecipazione alla scuola, osservazioni e proposte dei corsisti per la formazione degli insegnanti relativamente alla meccanica quantistica e al suo insegnamento.

Per i dettagli del questionario, cfr. appendice H.

Hanno restituito il questionario compilato 48 corsisti. Poichè gli insegnanti sono stati selezionati con appositi criteri, il campione su cui è stata fatta la presente indagine non è un campione casuale, perciò non è possibile trarre inferenze statistiche. È stato comunque possibile compiere un'analisi quantitativa dei dati ottenuti, mediante alcune tecniche di statistica descrittiva.

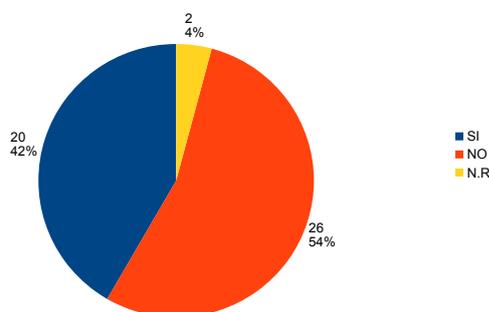


Figura 11.3: Percentuale di corsisti che hanno o meno già insegnato fisica moderna

11.2 ANALISI DEI DATI

Per quanto riguarda le modalità di analisi dati [11], si è proceduto anzitutto a una ricognizione e a un raggruppamento in categorie significative di tutte le risposte fornite dagli insegnanti (cfr. appendice H). È stato così possibile organizzare i dati in una matrice, dove per ogni “unità” (cioè per ogni insegnante) è stata registrata la presenza/assenza di una certa caratteristica (ad esempio avere già insegnato meccanica quantistica) o di una certa risposta. A partire dalla matrice di dati sono state ricavate “tabelle di frequenza”, con frequenze assolute e relative delle risposte, e “tabelle di contingenza”, con frequenze di associazione fra le modalità di due caratteristiche, scelte opportunamente per la verifica delle ipotesi di ricerca.¹

Uno dei criteri di selezione dei corsisti era la regione di residenza, per assicurarne la migliore distribuzione possibile. Nella figura 11.1 è rappresentata la distribuzione dei corsisti per regione di provenienza, e nella figura 11.2 la distribuzione per area geografica. Un altro dato importante, ai fini dell’analisi del questionario, è l’esperienza pregressa degli insegnanti, cioè l’aver già insegnato o meno meccanica quantistica (figura 11.3). Si deve precisare, a questo punto, che, sebbene le nuove Indicazioni Nazionali abbiano ratificato la possibilità di insegnare la fisica moderna nel liceo scientifico, non è escluso che già da prima la si potesse trattare. Nei corsi sperimentali “scientifico Brocca”, ad esempio, la seconda prova dell’esame di stato era, ad anni alterni, di matematica e di fisica e nella prova di fisica uno dei due temi in cui il candidato, a scelta, si doveva cimentare, era di fisica moderna.²

¹I dati sono stati trattati col programma *IBM SPSS Statistics*.

²Per i programmi Brocca cfr. [57, 59, 58].

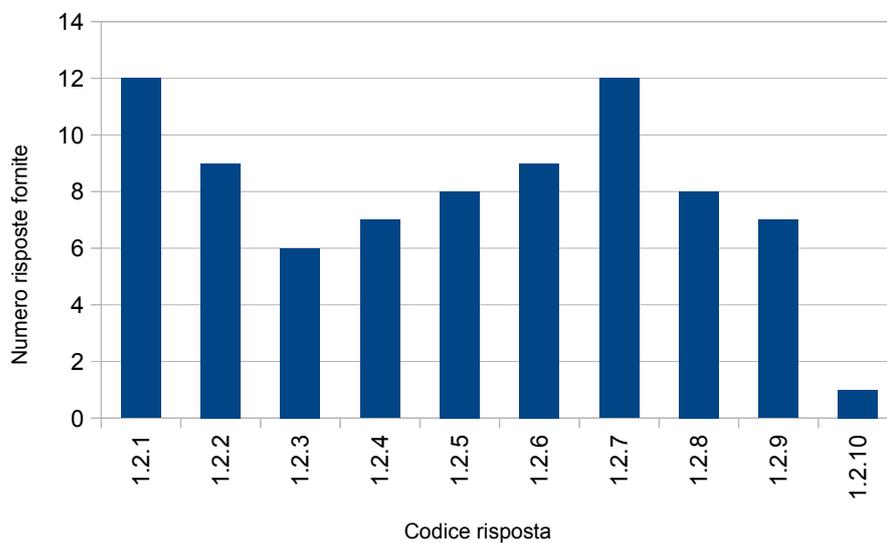


Figura 11.4: Risposte relative ad aspetti che caratterizzano il comportamento quantistico

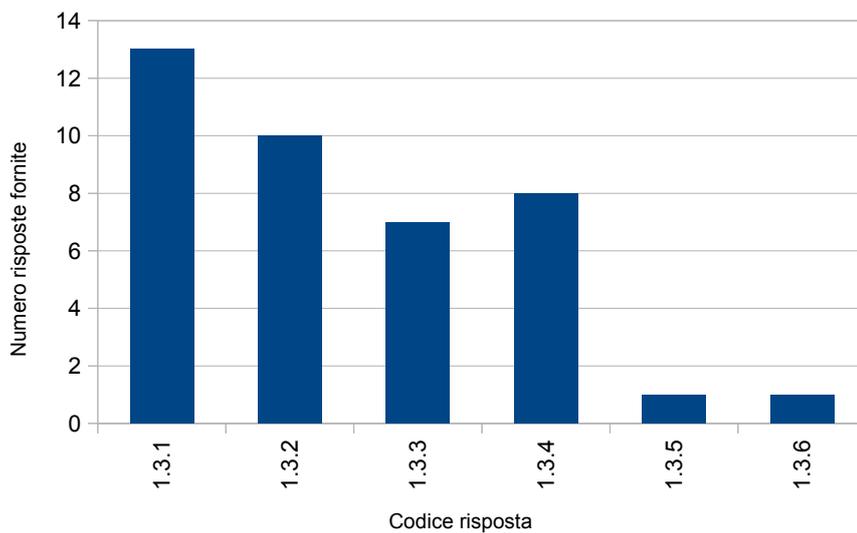


Figura 11.5: Risposte relative ad altri aspetti ritenuti importanti

11. UNA SCUOLA NAZIONALE DI FISICA MODERNA

Tabella 11.1: Tra i concetti fondanti affrontati nella Scuola, quali ritieni siano indispensabili o molto importanti?

Risposte fornite		Casi	Percentuale
1.2.	Aspetti che caratterizzano il comportamento quantistico		
1.2.1.	Principio di sovrapposizione	12	15,2%
1.2.2.	Misura e sue caratteristiche	9	11,4%
1.2.3.	Funzione d'onda	6	7,6%
1.2.4.	Probabilità e indeterminismo	7	8,9%
1.2.5.	Stato, osservabile, proprietà	8	10,1%
1.2.6.	Dualismo onda-particella	9	11,4%
1.2.7.	Principio di indeterminazione	12	15,2%
1.2.8.	Non commutatività, incompatibilità	8	10,1%
1.2.9.	Entanglement, linearità	7	8,9%
1.2.10.	Spin	1	1,3%
Totale		79	100,0%
1.3.	Altri aspetti ritenuti importanti		
1.3.1.	Aspetto storico	13	32,5%
1.3.2.	Esperimenti critici	10	25,0%
1.3.3.	Esperimenti che evidenziano concetti fondanti	7	17,5%
1.3.4.	Strumenti matematici, formalismo	8	20,0%
1.3.5.	No dualismo onda-particella	1	2,5%
1.3.6.	Aspetto concettuale	1	2,5%
Totale		40	100,0%

Venendo ora più in particolare ai quesiti che entrano nel merito della meccanica quantistica e del suo insegnamento, è stato chiesto ai corsisti quali concetti fondanti ritenessero indispensabili o molto importanti tra quelli affrontati nelle varie attività della Scuola. In fase di analisi dati ho ripartito le risposte in due categorie: quelle che si riferiscono ad aspetti che effettivamente sono legati a “concetti fondanti” della meccanica quantistica e quelle relative ad altri aspetti che per gli insegnanti evidentemente sono importanti ma che non sono direttamente connessi a “concetti fondanti”. Nella tabella 11.1 e nelle figure 11.4 e 11.5 sono riportate le risposte fornite. Il totale dei “casi” è superiore al numero dei partecipanti perchè si poteva fornire più di una risposta. Dalla figura 11.6 si vede che 8 corsisti non hanno fornito alcuna risposta (codice 1.1), che un numero pressoché uguale

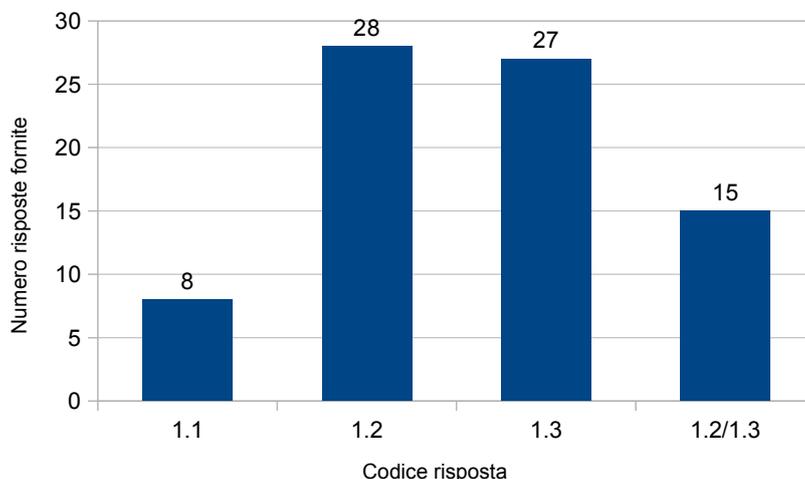


Figura 11.6: Tra i concetti fondanti affrontati nella Scuola, quali ritieni siano indispensabili o molto importanti?

ha fornito risposte di uno dei due tipi (1.2 o 1.3) e 15 hanno fornito risposte di entrambi i tipi. Si deve rilevare inoltre che gli intervistati non hanno dato peso alla distinzione fra concetti “indispensabili” e “molto importanti”, perciò non compare questo tipo di classificazione. Tra i “concetti fondanti” riconosciuti come importanti troviamo il principio di sovrapposizione e il principio di indeterminazione; tra gli aspetti che non sono strettamente legati a “concetti fondanti”, gli insegnanti assegnano una certa importanza a tutto ciò che riguarda il passaggio dalla fisica classica alla fisica moderna.

Dalle risposte, si possono trarre due osservazioni. Anzitutto sembra che, per gli insegnanti, non sia ben chiara la caratteristica di “concetto fondante” della meccanica quantistica. Si potrebbe comunque pensare che gli insegnanti abbiano interpretato il “concetto fondante” come un generico “aspetto” per loro importante della meccanica quantistica. La seconda osservazione, pertanto, è che gli insegnanti sono molto legati all’aspetto del passaggio dalla fisica classica alla fisica moderna, forse perché è quello con cui pensano di avere più familiarità.

Nel secondo quesito è stato chiesto ai corsisti quali siano, a loro parere, eventuali aspetti importanti tralasciati dai vari approcci di insegnamento della meccanica quantistica (tabella 11.2 e figura 11.7). Anche qui, gli intervistati potevano fornire più di una risposta. In questo quesito si rileva un più consistente numero di casi che non hanno fornito risposta, ma questo può

Tabella 11.2: Quali aspetti importanti ti sembra che le varie proposte di insegnamento della meccanica quantistica eventualmente tralascino?

Risposte fornite	Casi	Percentuale
2.1. Non risponde	16	30,2%
2.2. Aspetto storico, filosofico, ...	26	49,1%
2.3. Certezza del tempo	1	1,9%
2.4. Quantizzazione dello spazio	1	1,9%
2.5. Applicazioni tecnologiche	1	1,9%
2.6. Formalizzazione matematica	3	5,7%
2.7. Spiegare fenomeni senza laboratorio	1	1,9%
2.8. Correlazione fenomeni-formalismo	1	1,9%
2.9. Generalizzazione ad altri contesti	1	1,9%
2.10. Concetto di teoria	1	1,9%
2.11. Altra fenomenologia	1	1,9%
Totale	53	100,0%

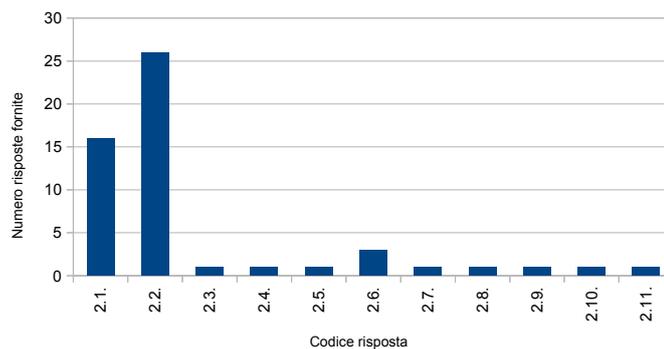


Figura 11.7: Quali aspetti importanti ti sembra che le varie proposte di insegnamento della meccanica quantistica eventualmente tralascino?

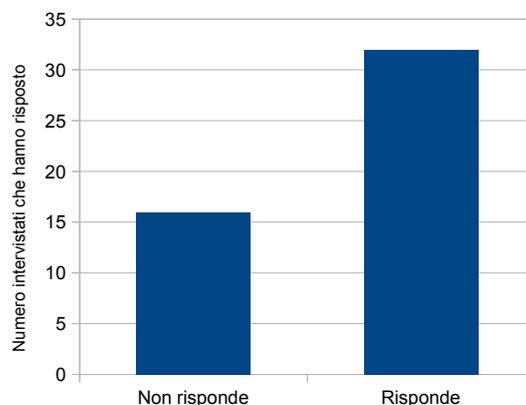


Figura 11.8: Intervistati che hanno risposto al quesito 3, sulle difficoltà di insegnamento relative ai diversi approcci presentati

essere dovuto al fatto che quegli insegnanti ritengono i vari approcci abbastanza esaustivi. Tra le risposte, la categoria che ha raccolto più preferenze è stata l'aspetto storico-filosofico-epistemologico. In sostanza, gli insegnanti ritengono, per la maggior parte, che i vari approcci non tengono conto a sufficienza del quadro di riferimento culturale nel quale si è sviluppata la fisica moderna. Ciò è coerente con le risposte al quesito precedente, dove si vedeva che per gli insegnanti gli aspetti molto importanti della meccanica quantistica sono proprio quelli dei limiti della fisica classica e dei concetti che impongono l'introduzione della MQ, del cambio di paradigma culturale di riferimento, della contestualizzazione storica, dei famosi esperimenti che non possono essere spiegati classicamente.

Un elemento molto importante per il presente lavoro di ricerca, in particolare per l'indagine sull'insegnabilità della meccanica quantistica, è la maniera in cui gli insegnanti percepiscono le difficoltà nell'insegnamento. Nel terzo quesito, per l'appunto, è stato chiesto ai corsisti quali difficoltà possono sorgere, a loro parere, dall'applicazione delle varie proposte illustrate nella Scuola. Per guidarli nell'esprimere un parere, è stata loro fornita una traccia: si richiedevano le difficoltà che si possono presentare dal punto di vista dei concetti e della formazione dell'insegnante, dal punto di vista degli strumenti matematici, dal punto di vista dell'inserimento nel curriculum. Il numero consistente di casi che non hanno fornito risposta (16 su 48, vedi figura 11.8) può essere giustificato dal fatto che le difficoltà, effettivamente, si possono meglio comprendere nel momento in cui le varie proposte

Tabella 11.3: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista dei concetti e della formazione docenti

	Risposte fornite	Casi	Percentuale
3.2.1.	Nessuna	3	12,0%
3.2.2.	Passaggio dal quadro deterministico a quello probabilistico	2	8,0%
3.2.3.	Preparazione insegnanti	14	56,0%
3.2.4.	Interpretazione di concetti	2	8,0%
3.2.5.	Stabilire un percorso coerente	2	8,0%
3.2.6.	Trovare esercizi	1	4,0%
3.2.7.	Aspetti logici e formali non consueti	1	4,0%
Totale		25	100,0%

sono messe in pratica. Si deve rilevare inoltre che spesso gli intervistati hanno elencato le difficoltà senza distinguerle in base ai criteri suggeriti. Questo potrebbe anche far supporre che la difficoltà degli “aspetti logici e formali non comuni” della meccanica quantistica, ad esempio, oltre che fra le difficoltà relative agli aspetti matematici potrebbero rientrare anche fra le difficoltà concettuali, come in effetti uno degli intervistati ha dichiarato. Dall’esame delle risposte fornite, comunque, risulta che le maggiori difficoltà si riscontrano in un’ammissione della necessità di una migliore conoscenza o approfondimento della meccanica quantistica da parte degli insegnanti (tabella 11.3 e figura 11.9). Per quanto riguarda le difficoltà dal punto di vista degli strumenti matematici (tabella 11.4 e figura 11.10), gli insegnanti non sono stati in grado di indicare difficoltà ben precise, ma parlano di generiche difficoltà dovute al fatto che secondo loro gli strumenti matematici non sono adatti all’età degli studenti. Per quanto riguarda l’inserimento nel curriculum (tabella 11.5 e figura 11.11), l’ostacolo maggiore sembra essere il tempo non adeguato a sviluppare uno qualsiasi degli approcci studiati.

Le Indicazioni Nazionali, come si è detto più volte, anche se sono solo una traccia per le programmazioni delle scuole e degli insegnanti, sono la fonte normativa in cui si inquadra l’insegnamento della meccanica quantistica oggi. Abbiamo chiesto agli insegnanti se le varie proposte di insegnamento viste nella Scuola sono secondo loro rispondenti alle Indicazioni Nazionali, di cui, ad ogni buon fine, è stato fornito un estratto prima della somministrazione del questionario. Le risposte (tabella 11.6 e figura 11.12) sono state abbastanza contraddittorie. Vi è una, al solito, non trascurabile percentuale di intervistati che non risponde, ma solo tre persone ammettono di

Tabella 11.4: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista degli strumenti matematici

Risposte fornite	Casi	Percentuale
3.3.1. Nessuna - Difficoltà superabili	5	16,7%
3.3.2. Strumenti troppo complessi per gli studenti	19	63,3%
3.3.3. Strumenti non coordinati con la fisica	6	20,0%
Totale	30	100,0%

Tabella 11.5: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista dell'inserimento nel curriculum

Risposte fornite	Casi	Percentuale
3.4.1. Nessuna	4	19,0%
3.4.2. Tempo a disposizione	7	33,3%
3.4.3. Continuità didattica	1	4,8%
3.4.4. Materie non coordinate	5	23,8%
3.4.5. Distribuzione programma di fisica	3	14,3%
3.4.6. Coerenza col nuovo esame di stato	1	4,8%
Totale	21	100,0%

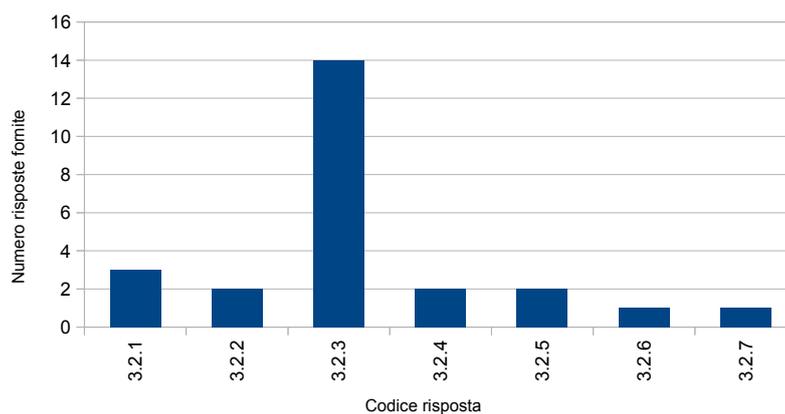


Figura 11.9: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista dei concetti e della formazione docenti

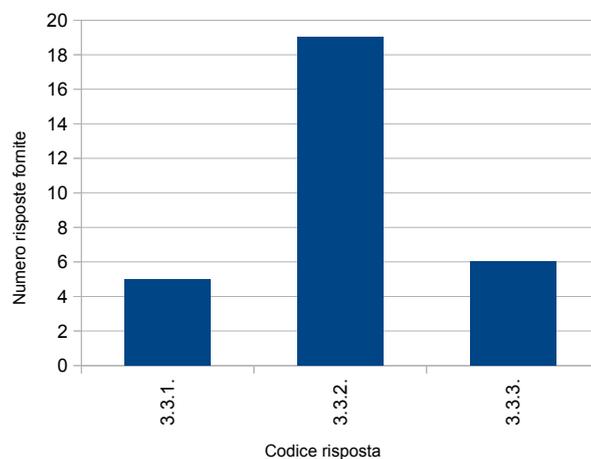


Figura 11.10: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista degli strumenti matematici

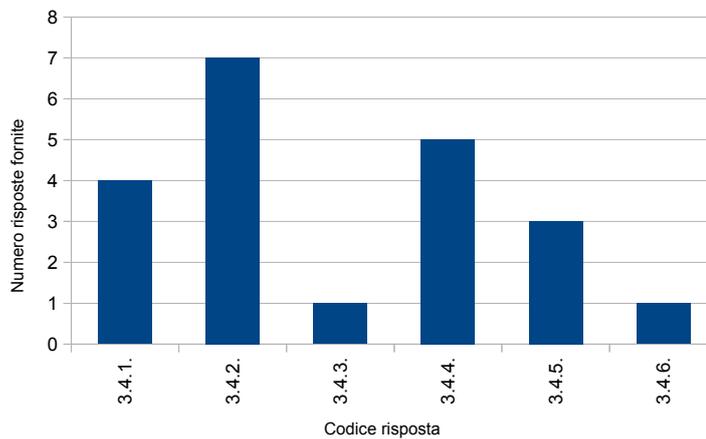


Figura 11.11: Difficoltà che si possono presentare nell'insegnamento, percepite dagli insegnanti, dal punto di vista dell'inserimento nel curriculum

Tabella 11.6: Gli approcci illustrati sono coerenti con le Indicazioni Nazionali?

Risposte fornite	Casi	Percentuale
4.1. Non risponde	11	22,9%
4.2. Non ho letto le IN	3	6,3%
4.3. Sì, perché le IN sono generiche	12	25,0%
4.4. No, gli approcci sono teorici	3	6,3%
4.5. No, le IN propongono approccio storico	11	22,9%
4.6. No, le IN non prevedono formalismo	2	4,2%
4.7. No, le IN propongono approccio culturale	6	12,5%
Totale	48	100,0%

non aver letto le Indicazioni. Il fatto che le Indicazioni Nazionali siano generiche, quando si chiede se gli approcci sono coerenti con le Indicazioni, porta alcuni intervistati a propendere per il sì e altri per il no. Quelli che ritengono che le proposte didattiche non siano coerenti con quanto proposto dalle Indicazioni, vedono il motivo della non aderenza o nel rigore degli approcci o nel carattere storico-culturale, e comunque tendente alla semplificazione, delle Indicazioni. Dalle risposte potrebbe emergere una visione poco chiara del ruolo delle Indicazioni Nazionali. Forse negli insegnanti permane l'idea dei vecchi "programmi ministeriali" che, per loro natura, erano effettivamente prescrittivi e, proprio per questo, più dettagliati. L'evoluzione della politica scolastica verso una maggiore autonomia degli istituti, ha cancellato il concetto di "programma ministeriale" e lo ha sostituito con "indicazioni". Queste, secondo il principio dell'autonomia scolastica, andrebbero calate in una programmazione di istituto, di classe e del singolo insegnante, che quindi può, in effetti, muoversi abbastanza liberamente all'interno delle Indicazioni stesse. Tale libertà non deve essere intesa come scelta di trattare o non trattare certi argomenti: le Indicazioni fissano gli obiettivi che si vorrebbe gli studenti raggiungessero, l'insegnante può decidere liberamente come raggiungerli. Se quindi pensiamo alle Indicazioni non come un elenco di argomenti da affrontare ma come una serie di traguardi da raggiungere, si potrebbe attribuire una fondatezza a quanto hanno espresso gli intervistati che ritengono che gli approcci sono coerenti con le Indicazioni Nazionali.

Il fatto che le Indicazioni siano (volutamente) generiche, comunque, è un'ulteriore fonte di difficoltà per gli insegnanti: essi, come si è visto dalle risposte ai quesiti precedenti, propendono in genere per un percorso storico e

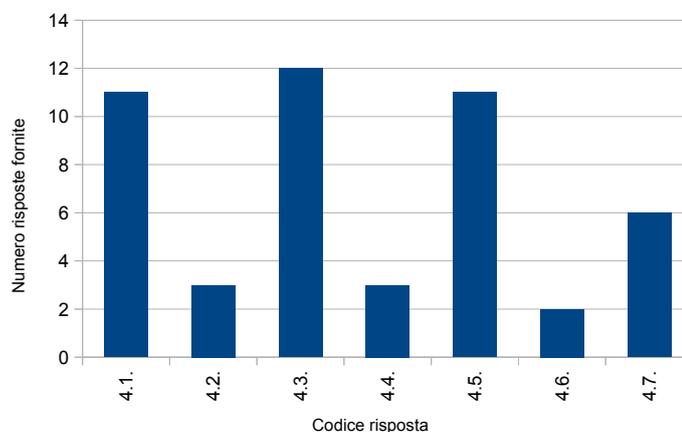


Figura 11.12: Coerenza dei vari approcci con le Indicazioni Nazionali

Tabella 11.7: Esplicitare i concetti fondanti contenuti nelle Indicazioni Nazionali (risposte dei corsisti raggruppate in categorie significative)

	Risposte fornite	Casi	Percentuale
5.2.	Aspetti storici	14	15,7%
5.3.	Aspetti relativi alla teoria dei quanti	25	28,1%
5.4.	Aspetti relativi alla fisica atomica	16	18,0%
5.5.	Organizzatori concettuali	19	21,3 %
5.6.	Aspetti legati alla relatività	9	10,1%
5.7.	Aspetti legati ad altri ambiti della fisica	2	2,2 %
5.8.	Altri aspetti	2	3,4%
5.9.	Non evidenziano i nodi concettuali	1	1,1%
Totale		89	100,0%

non riescono, per il momento, a trovare altre strade più efficaci per giungere agli obiettivi fissati dalle Indicazioni. Una difficoltà con cui, inoltre, si potranno scontrare in futuro è l'eventuale prova scritta di fisica all'Esame di Stato (come accade peraltro già ora con la prova di matematica): se le Indicazioni sono generiche, come sarà possibile preparare gli studenti ad affrontare una prova scritta su argomenti specifici di fisica moderna?

A questo proposito, è stato chiesto agli insegnanti, all'interno del questionario, di riassumere i concetti fondanti della meccanica quantistica contenute nelle Indicazioni Nazionali. Nella tabelle 11.7, 11.8 e nelle figure

Tabella 11.8: Esplicitare i concetti fondanti contenuti nelle Indicazioni Nazionali (risposte in dettaglio)

Risposte fornite		Casi	Percentuale
5.2.	Aspetti storici	14	10,3%
5.3.	Aspetti relativi alla teoria dei quanti		
5.3.1.	Modello di quanto di luce	11	8,1%
5.3.2.	Natura ondulatoria della materia	14	10,3%
5.3.3.	Effetto fotoelettrico, fotone	14	10,3%
5.3.4.	Effetto Compton	3	2,2%
5.3.5.	Radiazione corpo nero	4	2,9%
5.3.6.	Teoria dei quanti	2	1,5%
5.3.7.	Natura probabilistica	1	0,7%
5.3.8.	Ipotesi di Planck	7	5,1%
5.3.9.	Esperimenti	10	7,4%
5.4.	Aspetti relativi alla fisica atomica		
5.4.1.	Modelli atomici	8	5,9%
5.4.2.	Livelli discreti	7	5,1%
5.4.3.	Spettri di emissione-assorbimento	1	0,7%
5.5.	Organizzatori concettuali		
5.5.1.	Principio di indeterminazione	10	7,4%
5.5.2.	No dualismo onda-particella	10	7,4%
5.6.	Aspetti legati alla relatività		
5.6.1.	Relatività	3	2,2%
5.6.2.	Spazio, tempo, massa, energia	5	3,7%
5.6.3.	Equivalenza massa-energia	4	2,9%
5.7.	Aspetti legati ad altri ambiti della fisica		
5.7.1.	Quantizzazione o. elettromagnetica	1	0,7%
5.7.2.	Fisica classica	1	0,7%
5.8.	Altri aspetti		
5.8.1.	Nesso cultura scientifica-umanistica	1	0,7%
5.8.2.	Dimensione tecnico-applicativa	1	0,7%
5.8.3.	Competenze per seguire lo sviluppo scientifico	1	0,7%
5.8.4.	Fornire strumenti e metodi per la comprensione della realtà	1	0,7%
5.8.5.	Richiesta di un formalismo accessibile agli studenti	1	0,7%
5.9.	Non evidenziano i nodi concettuali	1	0,7%
Totale		136	100,0%

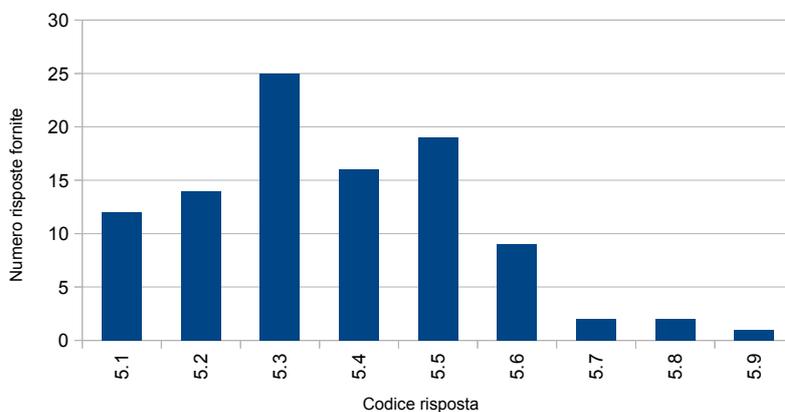


Figura 11.13: Esplicitare i concetti fondanti contenuti nelle Indicazioni Nazionali (risposte dei corsisti raggruppate in categorie significative)

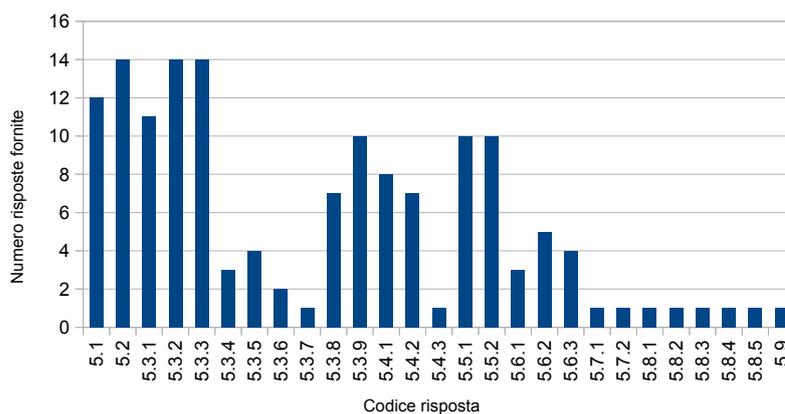


Figura 11.14: Esplicitare i concetti fondanti contenuti nelle Indicazioni Nazionali (risposte in dettaglio)

11.13, 11.14 sono indicate le risposte fornite. Per costruire la tabella 11.7, in particolare, le singole risposte sono state raggruppate nelle categorie indicate e su queste è stato eseguito il conteggio, tenendo presente che ogni intervistato poteva dare risposte afferenti a diverse categorie. La tabella 11.8, invece, riporta le singole risposte, sempre tenendo presente che ogni intervistato poteva dare più di una risposta.

Per riflettere sulle risposte degli insegnanti, ricordiamo ancora che le Indicazioni Nazionali, come ampiamente illustrato nel capitolo 1, non forniscono un elenco prescrittivo di contenuti da trattare, come il vecchio “programma ministeriale”, ma costituiscono un quadro di riferimento entro cui l’insegnante deve costruire la propria programmazione didattica.

Riassumiamo brevemente le linee tracciate dalle Indicazioni per quanto riguarda la fisica moderna, prevista nel quinto anno del liceo scientifico (D.M. 211/2010):

1. conoscenze sviluppate nel XX secolo relative al microcosmo e al macrocosmo;
2. problematiche che storicamente hanno portato ai nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia;
3. simultaneità degli eventi, dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze;
4. equivalenza massa-energia e interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione);
5. affermarsi del modello del quanto di luce attraverso lo studio della radiazione termica e dell’ipotesi di Planck;
6. effetto fotoelettrico e sua interpretazione da parte di Einstein;
7. discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell’atomo;
8. evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, e il principio di indeterminazione.

Come si vede, dunque, le Indicazioni non propongono un elenco di “concetti fondanti”; peraltro suggeriscono di «utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti». Questi, dunque, sono stati estrapolati dagli insegnanti secondo le risultanze sopra riportate. È singolare anzitutto osservare che solo un intervistato rileva che le Indicazioni «non evidenziano i nodi concettuali».

Tabella 11.9: Se non hai mai insegnato MQ, perché?

	Risposte fornite	Casi	Percentuale
6.2.1.	Perché non ho avuto classi in cui era previsto	22	73,3%
6.2.2.	Perché non era previsto	2	6,7%
6.2.3.	Perché il contesto non lo consentiva	6	20,0%
Totale		30	100,0%

Tra le risposte fornite solo 19 mettono in evidenza organizzatori concettuali importanti come il principio di sovrapposizione e il principio di indeterminazione. La maggior parte delle risposte (25) vertono invece su vari aspetti della teoria dei quanti evidenziati dalle Indicazioni: modello del quanto di luce, radiazione termica, natura ondulatoria della materia, ipotesi di Planck, effetto fotoelettrico. Un certo numero di risposte (14) si sofferma sul versante storico delle Indicazioni, citando tra l'altro aspetti sperimentali e storici della meccanica quantistica, analisi dei problemi in una prospettiva storica, conoscenze sviluppate nel XX secolo su macrocosmo e microcosmo. Alcune risposte (14) indicano aspetti relativi alla fisica atomica. Un numero più esiguo di risposte evidenzia aspetti legati alla relatività e ad altri ambiti della fisica nonché aspetti generici. Tutto ciò è coerente con quanto è stato rilevato nell'esame delle risposte relative al quesito sui concetti fondanti che si ritengono importanti: sarebbe importante, in attività di formazione degli insegnanti sulla didattica della meccanica quantistica, una riflessione approfondita sui concetti fondanti della disciplina e sul loro ruolo nell'insegnamento.

Per quanto riguarda l'esperienza pregressa degli insegnanti, la tabella 11.9 e la figura 11.15 riportano le motivazioni per le quali non è stata mai insegnata la meccanica quantistica. Il numero di risposte coincide col numero degli intervistati che hanno risposto NO nella figura 11.3. La domanda e le risposte possono sembrare banali, ma hanno lo scopo di evidenziare un aspetto importante ai fini del presente lavoro di ricerca: anche se fino ad ora non era strettamente obbligatorio insegnare la meccanica quantistica, poteva essere comunque fatto; se non è stato fatto, vi sono state alla base di questa scelta degli insegnanti una serie di motivazioni e difficoltà; ora che l'insegnamento della meccanica quantistica non si può più eludere, diventa importante studiarne le difficoltà. Le risposte al quesito potrebbero dirci che fino ad ora gli insegnanti hanno eluso il problema, celandosi dietro al fatto che l'insegnamento della fisica moderna non era, secondo loro, fino ad

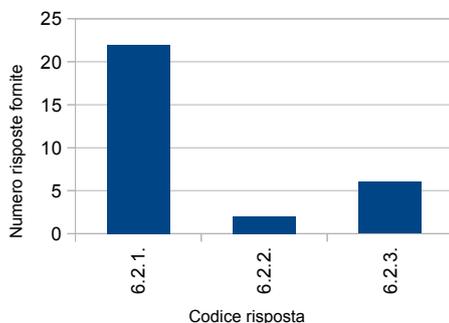


Figura 11.15: Se non hai mai insegnato MQ, perché?

ora obbligatorio. Il fatto stesso, comunque, di aver partecipato alla Scuola, mostra la loro volontà di rimuovere gli ostacoli.

A quelli che hanno avuto già esperienza nell'insegnamento della meccanica quantistica, è stato chiesto di esprimere una sintetica descrizione e una sintetica autovalutazione del loro operato. La tabella 11.10 e la figura 11.16 mostrano una sintesi degli argomenti che gli insegnanti dichiarano di aver trattato nella loro attività didattica. Si osserva che la maggior parte delle risposte è inerente a un approccio storico, con o senza il supporto dei libri di testo. I risultati sono coerenti con quelli dei quesiti precedenti e mostrano che gli insegnanti sono sempre rimasti legati a un percorso storico. Le motivazioni di questa scelta didattica potrebbero essere diverse: o perché è l'approccio su cui si sono formati, o perché è quello che ritengono più praticabile con gli studenti, o perché anche i libri di testo, in genere, ne fanno uso.³

Pochi si soffermano a riflettere sui punti di forza e di debolezza della loro esperienza. Tra i punti di forza risalta soprattutto la "semplicità" del percorso seguito, intesa come il fare ricorso il meno possibile a un apparato matematico, anche se non è detto che tale semplicità poi si concretizzi in una efficacia dell'esperienza didattica. E in effetti tra i punti di debolezza risaltano soprattutto la mancanza di un supporto quantitativo e di esperienze di laboratorio, segno che, dopotutto, un approccio "discorsivo" e culturale

³Nella tabella 11.10, il "percorso ispirato a Ghirardi" si intende riferito al testo di Gian Carlo Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*. Il "percorso ispirato a Fabri" si intende riferito all'articolo di Elio Fabri *Come introdurre la fisica quantistica nella scuola secondaria superiore*, la Fisica nella Scuola, XXIX, 1 sup., pp. 63-80.

Tabella 11.10: Se hai già insegnato MQ, quali argomenti hai trattato?

	Risposte fornite	Casi	Percentuale
6.3.1.	Passaggio da FC a MQ	6	23,1%
6.3.2.	Approccio storico libri di testo	4	15,4%
6.3.3.	Approccio storico interdisciplinare	3	11,5%
6.3.4.	Principio di indeterminazione	3	11,5%
6.3.5.	Interferenza elettroni	1	3,8%
6.3.6.	Approccio teorico senza laboratorio	1	3,8%
6.3.7.	Preparazione esame ex corso Brocca	2	7,7%
6.3.8.	Analisi qualitativa equazione di Schrödinger	1	3,8%
6.3.9.	Vari argomenti fisica moderna	2	7,7%
6.3.10.	Teoria dei quanti precedenti programmi	1	3,8%
6.3.11.	Percorso ispirato a Ghirardi	1	3,8%
6.3.12.	Percorso ispirato a Fabri	1	3,8%
Totale		26	100,0%

Tabella 11.11: Se hai già insegnato MQ, quali i punti di forza della tua esperienza?

	Risposte fornite	Casi	Percentuale
6.4.1.	Aver trattato la fisica moderna	2	28,6%
6.4.2.	Completamento formazione degli studenti	1	14,3%
6.4.3.	Nuovo modo di pensare per gli studenti	1	14,3%
6.4.4.	Semplicità e interdisciplinarietà	3	42,9%
Totale		7	100,0%

alla meccanica quantistica può essere, sì, utile in fase introduttiva, ma deve poi essere completato, secondo gli insegnanti stessi, con una trattazione più solida.

Trattiamo insieme i due ultimi quesiti. Nel sesto (tabella 11.13 e figura 11.19) si chiedevano eventuali osservazioni e proposte a carattere didattico sulla base delle attività svolte durante la Scuola; nel settimo invece (tabella 11.14 e figura 11.20) osservazioni e proposte in merito alla formazione degli insegnanti sulla didattica della meccanica quantistica, sempre sulla

Tabella 11.12: Se hai già insegnato MQ, quali i punti di debolezza della tua esperienza?

Risposte fornite	Casi	Percentuale
6.5.1. Non poter disporre di laboratorio	5	41,7%
6.5.2. Non poter disporre di esercizi	1	8,3%
6.5.3. Approccio solo qualitativo	2	16,7%
6.5.4. Libri di testo con solo approccio storico	1	8,3%
6.5.5. Le simulazioni non sostituiscono il laboratorio	1	8,3%
6.5.6. Approccio solo introduttivo	1	8,3%
6.5.7. Eccessivo grado di astrazione	1	8,3%
Totale	12	100,0%

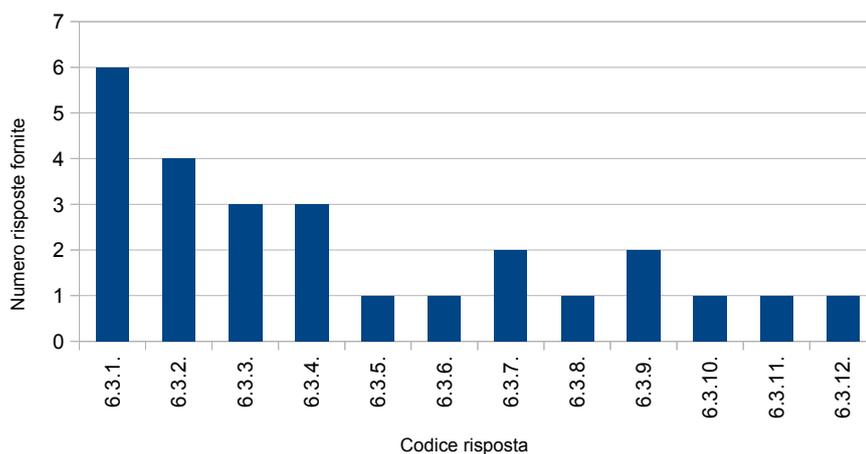


Figura 11.16: Se hai già insegnato MQ, quali argomenti hai trattato?

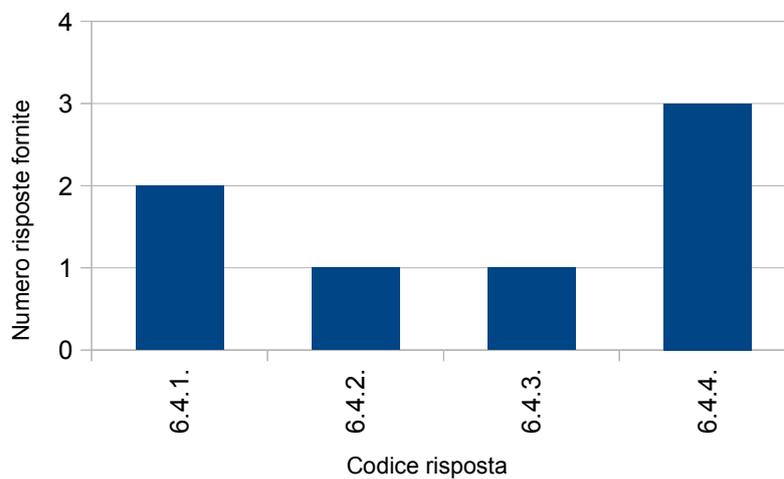


Figura 11.17: Se hai già insegnato MQ, quali i punti di forza della tua esperienza?

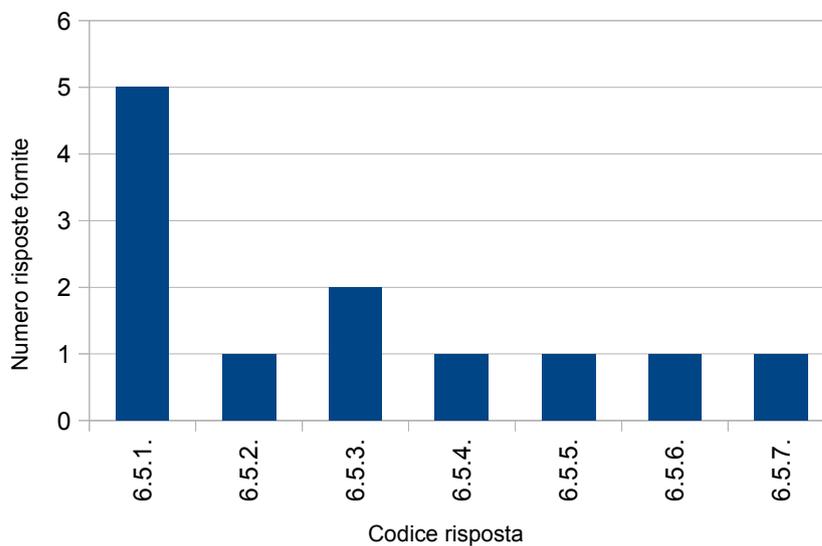


Figura 11.18: Se hai già insegnato MQ, quali i punti di debolezza della tua esperienza?

base di eventuali riflessioni maturate durante la Scuola. Le risposte fornite sono state per lo più generiche. I quesiti in effetti fornivano ampia libertà di risposta, vi è comunque nelle risposte un indice del fatto che l'esperienza della Scuola è stata molto formativa ma è necessario ora, per gli insegnanti, un periodo di rielaborazione delle attività svolte. Un numero consistente di intervistati non ha risposto o non è stato in grado di fornire osservazioni e proposte per la didattica della meccanica quantistica. Quelli che hanno fornito una risposta specifica, si sono richiamati esclusivamente alla proposta didattica che più è stata sviluppata nella Scuola, cioè quella del gruppo di Udine. Quelli che hanno fornito una risposta generica, si sono richiamati all'esigenza di disporre di materiale didattico migliore (principalmente libri di testo, esercitazioni quantitative e laboratori) e di possibilità di condivisione di "buone pratiche" tra insegnanti. Per quanto riguarda le proposte per la formazione insegnanti, è massiccia la richiesta di formazione in varie modalità, anche (e soprattutto) sui contenuti e non solo sulle metodologie. Ciò è coerente con una delle difficoltà maggiori già evidenziate: la preparazione di base degli insegnanti sulla meccanica quantistica. Ritorna inoltre fra le risposte l'esigenza di materiale didattico migliore. Degna di interesse è la "richiesta di valutazione e valorizzazione della professione", in varie modalità, tra cui anche un "esame periodico degli insegnanti su contenuti, didattica, comunicazione e aspetti relazionali, legato anche alla progressione di carriera". A parte il carattere insolito e stranamente autosanzionatorio della proposta, possiamo comunque leggere in questa risposta una legittima richiesta: la sfida dell'insegnamento della meccanica quantistica è difficile e faticosa, ed è giusto che l'insegnante che si impegna in questa sfida sia adeguatamente sostenuto e incentivato. Anche il solo fatto di aver partecipato alla Scuola Nazionale di Fisica Moderna, visto l'intenso programma e la profondità dei contenuti, è stato di per sé meritorio.

11.3 ALCUNE RELAZIONI TRA LE VARIABILI ESAMINATE

Le risposte fornite sono state poste in relazione, a livello descrittivo, con alcune informazioni sui corsisti. Tale valutazione è stata effettuata mediante la costruzione di apposite tabelle di contingenza miranti ad evidenziare le frequenze congiunte di alcune variabili strutturali con le specifiche risposte ai quesiti concettuali proposti.

Nella tabella 11.15 e nella figura 11.21 osserviamo le risposte sui concetti fondanti della meccanica quantistica (quesito 1 del questionario), distribuite in base all'area geografica di provenienza dei corsisti. Si osserva che le risposte relative ai veri "concetti fondanti" sono state individuate in prevalenza dagli insegnanti del nord, ma che sono stati indicati aspetti che

Tabella 11.13: Osservazioni e proposte per la didattica della MQ

Risposte fornite		Casi	Percentuale
7.1	Non risponde - Ho bisogno di tempo	24	47,1%
Risposte effettivamente inerenti proposte didattiche			
7.2.1.	Farò uso dell'approccio di Udine	6	11,8%
7.2.2.	Definire meglio tempi approccio Udine	1	2,0%
7.2.3.	Proposta basata su sistemi a due stati	1	2,0%
Risposte generiche			
7.3.1.	Tener conto del contesto	1	2,0%
7.3.2.	Formulare Indicazioni Nazionali più dettagliate	2	3,9%
7.3.3.	Condividere esperienze fra insegnanti	5	9,8%
7.3.4.	Produrre materiale didattico migliore	6	11,8%
7.3.5.	Conservare approccio storico	1	2,0%
7.3.6.	Impostazione più sperimentale	2	3,9%
7.3.7.	Collegamenti con storia e filosofia	1	2,0%
7.3.8.	Integrare meglio matematica e fisica	1	2,0%
Totale		51	100,0%

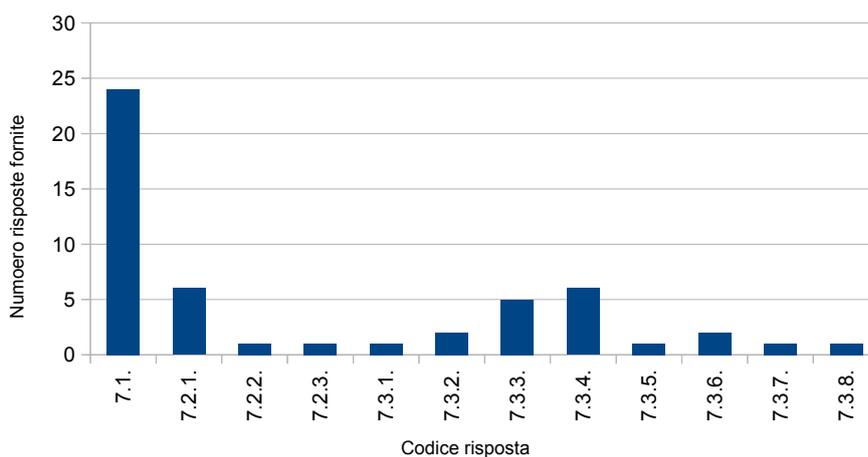


Figura 11.19: Osservazioni e proposte per la didattica della MQ

11.3. Alcune relazioni tra le variabili esaminate

Tabella 11.14: Osservazioni e proposte per la formazione insegnanti

Risposte fornite	Casi	Percentuale
8.1. Non risponde	12	21,8%
8.2. Richieste di formazione in varie modalità	28	50,9%
8.3. Richieste di valutazione in varie modalità	4	7,3%
8.4. Richieste di vari materiali didattici	7	12,7%
8.5. Richieste collaborazione scuola-ricerca	4	7,3%
Totale	55	100,0%

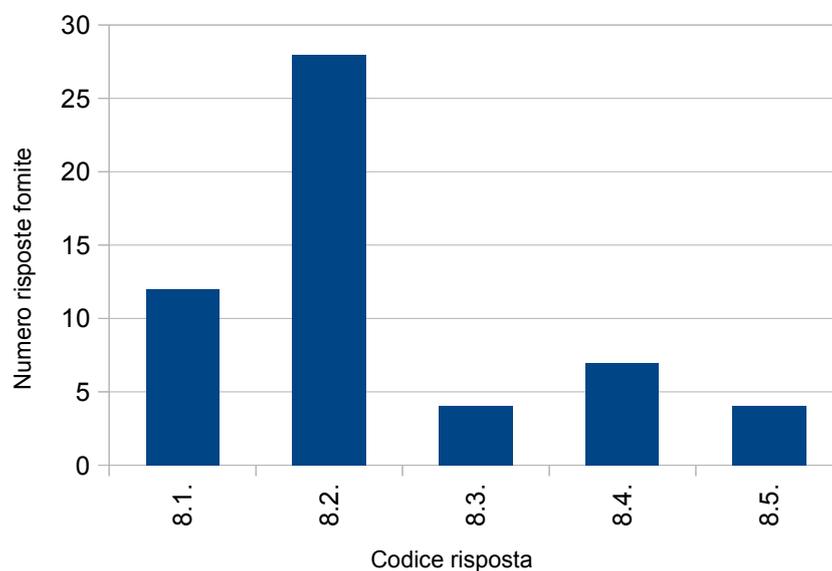


Figura 11.20: Osservazioni e proposte per la formazione degli insegnanti

Tabella 11.15: Risposte al quesito 1, sui concetti fondanti, in relazione all'area geografica di provenienza

Risposte fornite	Area geografica				
	N.P.	Nord	Centro	Sud	Isole
1.1. Non risponde	0	3	3	1	1
1.2. Aspetti che caratterizzano il comportamento quantistico	2	9	3	5	9
1.3. Altri aspetti	1	6	6	8	6

non sono concetti fondanti in generale da insegnanti provenienti da tutte le aree geografiche. Le stesse risposte sui concetti fondanti sono state ripartite in base all'aver già insegnato o meno meccanica quantistica (tabella 11.16 e figura 11.22). Come ci si aspetterebbe, il numero di coloro che non rispondono è superiore tra quelli che non hanno mai insegnato meccanica quantistica. Invece è inaspettato il fatto che il numero di coloro che individuano come importanti veri concetti fondanti è maggiore tra coloro che non hanno mai insegnato meccanica quantistica. Sembrerebbe quasi che gli insegnanti che hanno già esperienza didattica rimangano ancorati agli aspetti che, pur essendo importanti, sono quelli dell'insegnamento tradizionale della meccanica quantistica ma non ne sono i veri concetti fondanti.

Le risposte sugli aspetti eventualmente tralasciati dai vari approcci, poste in relazione con l'aver già insegnato o meno meccanica quantistica (tabella 11.17 e figura 11.23), non sorprendono, come sopra, nel numero di coloro che non rispondono, che è sensibilmente maggiore tra quelli che non hanno avuto esperienza didattica. L'altra categoria rilevante di risposte è quella che individua come principale aspetto tralasciato dai vari approcci quello storico-filosofico-epistemologico, ma non mostra sensibili differenze fra quelli che hanno già insegnato meccanica quantistica e quelli che non l'hanno mai insegnata. Anche in questo caso si potrebbe pertanto rilevare che gli insegnanti in genere sono molto legati alla tradizionale impostazione storica dell'insegnamento della fisica moderna.

Al quesito sulle difficoltà eventualmente poste dai vari approcci di insegnamento, non rispondono per la maggior parte coloro che non hanno mai insegnato meccanica quantistica (tabella 11.18 e figura 11.24). Ciò si potrebbe spiegare col fatto che, come si è già detto, le difficoltà nell'insegnamento possono essere meglio individuate con l'esperienza. I due maggiori ostacoli, la preparazione degli insegnanti talvolta non adeguata e il tempo insufficiente a sviluppare uno qualsiasi degli approcci presentati, sono

11.3. Alcune relazioni tra le variabili esaminate

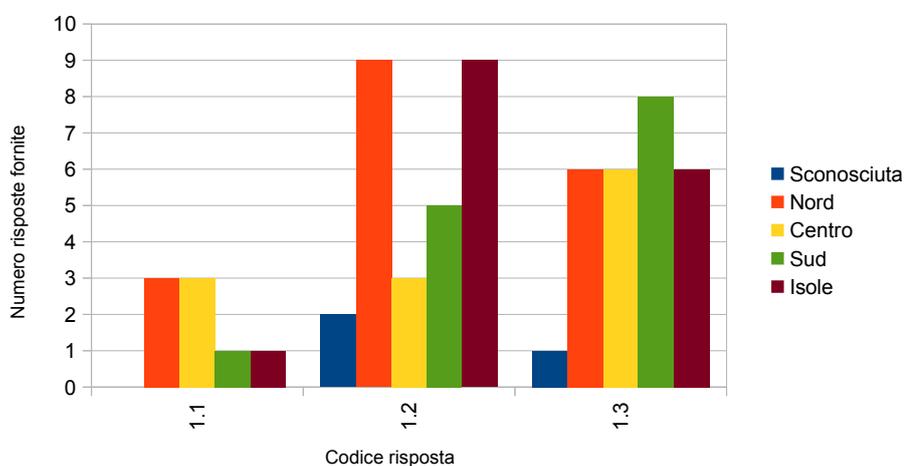


Figura 11.21: Risposte al quesito 1, sui concetti fondanti, in relazione all'area geografica di provenienza

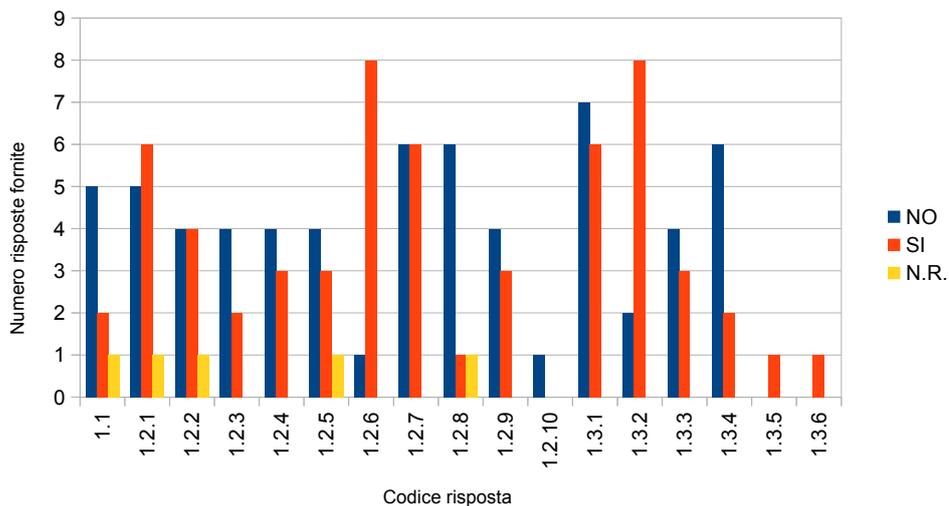


Figura 11.22: Risposte al quesito 1, sui concetti fondanti, in relazione all'aver già insegnato MQ

Tabella 11.16: Risposte al quesito 1, sui concetti fondanti, in relazione all'aver già insegnato MQ

Risposte fornite	Hai già insegnato MQ?			Totale
	NO	SI	N.R.	
1.1. Non risponde	5	2	1	8
Aspetti che caratterizzano il comportamento quantistico				
1.2.1. Principio di sovrapposizione	5	6	1	12
1.2.2. Misura e sue caratteristiche	4	4	1	9
1.2.3. Funzione d'onda	4	2	0	6
1.2.4. Probabilità e indeterminismo	4	3	0	7
1.2.5. Stato, osservabile, proprietà	4	3	1	8
1.2.6. Dualismo onda-particella	1	8	0	9
1.2.7. Principio di indeterminazione	6	6	0	12
1.2.8. Non commutatività, incompatibilità	6	1	1	8
1.2.9. Entanglement, linearità	4	3	0	7
1.2.10. Spin	1	0	0	1
Altri aspetti ritenuti importanti				
1.3.1. Aspetto storico	7	6	0	13
1.3.2. Esperimenti critici	2	8	0	10
1.3.3. Esperimenti che evidenziano concetti fondanti	4	3	0	7
1.3.4. Strumenti matematici, formalismo	6	2	0	8
1.3.5. No dualismo onda-particella	0	1	0	1
1.3.6. Aspetto concettuale	0	1	0	1

stati rilevati come tali per la maggior parte da coloro che non hanno mai insegnato meccanica quantistica.

11.4 CONCLUSIONI

Sintetizziamo alcuni aspetti, che riteniamo importanti ai fini del presente lavoro di ricerca, emersi dall'analisi dei dati. Osserviamo comunque che il gruppo organizzatore della Scuola ha avviato un'ulteriore analisi dei dati qui analizzati, secondo una prospettiva complementare a quella adottata ai fini di questa tesi di dottorato.

Tabella 11.17: Risposte al quesito 2, sugli aspetti eventualmente tralasciati dai vari approcci, in relazione all'aver già insegnato MQ

Risposte fornite	Hai già insegnato MQ?			Totale
	NO	SI	N.R.	
2.1. Non risponde	10	5	1	16
2.2. Aspetto storico, filosofico, ...	12	13	1	26
2.3. Certezza del tempo	0	1	0	1
2.4. Quantizzazione dello spazio	0	1	0	1
2.5. Applicazioni tecnologiche	1	0	0	1
2.6. Formalizzazione matematica	2	1	0	3
2.7. Spiegare fenomeni senza laboratorio	1	0	0	1
2.8. Correlazione fenomeni-formalismo	1	0	0	1
2.9. Generalizzazione ad altri contesti	1	0	0	1
2.10. Concetto di teoria	1	0	0	1
2.11. Altra fenomenologia	0	1	0	1

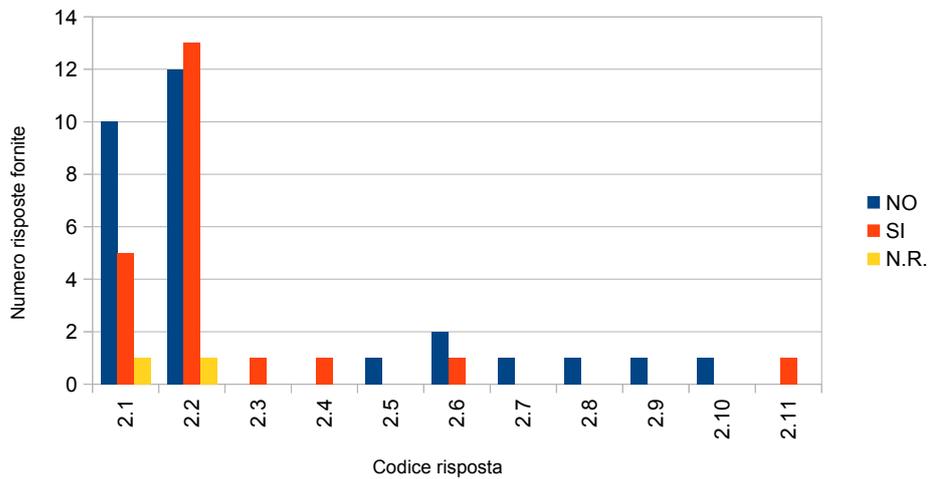


Figura 11.23: Risposte al quesito 2, sugli aspetti eventualmente tralasciati dai vari approcci, in relazione all'aver già insegnato MQ

Tabella 11.18: Risposte al quesito 3, sulle difficoltà nell'insegnamento, in relazione all'aver già insegnato MQ

Risposte fornite	Hai già insegnato MQ?			Totale
	NO	SI	N.R.	
3.1. Non risponde	11	3	2	16
Dal punto di vista dei concetti e della formazione insegnanti				
3.2.1. Nessuna	0	3	0	3
3.2.2. Passaggio dal quadro deterministico ...	0	2	0	2
3.2.3. Preparazione insegnanti	9	5	0	14
3.2.4. Interpretazione di concetti	2	0	0	2
3.2.5. Stabilire un percorso coerente	1	1	0	2
3.2.6. Trovare esercizi	0	1	0	1
3.2.6. Aspetti logici e formali non consueti	1	0	0	1
Dal punto di vista degli strumenti matematici				
3.3.1. Nessuna - Difficoltà superabili	2	3	0	5
3.3.2. Strumenti troppo complessi per gli studenti	8	11	0	19
3.3.3. Strumenti non coordinati con la fisica	4	2	0	6
Dal punto di vista dell'inserimento nel curriculum				
3.4.1. Nessuna	0	4	0	4
3.4.2. Tempo a disposizione	5	2	0	7
3.4.3. Continuità didattica	1	0	0	1
3.4.4. Materie non coordinate	3	2	0	5
3.4.5. Distribuzione programma di fisica	2	1	0	3
3.4.6. Coerenza col nuovo esame di stato	0	1	0	1

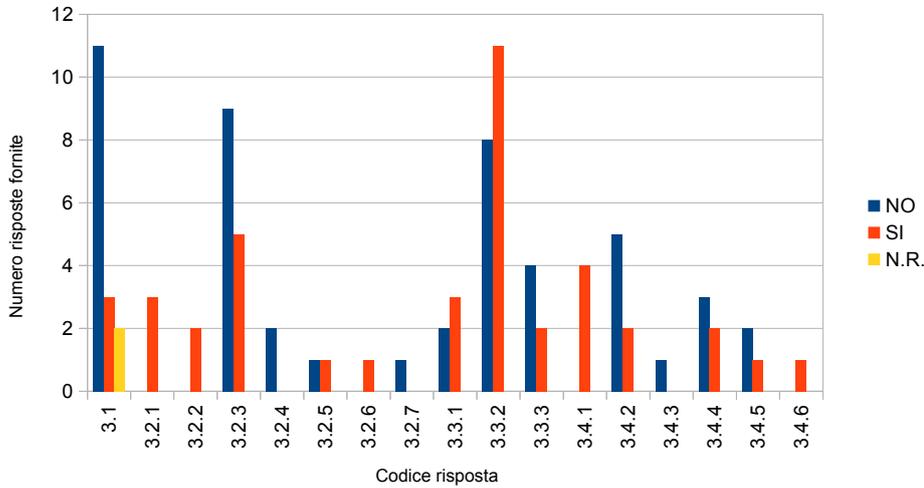


Figura 11.24: Risposte al quesito 3, sulle difficoltà nell’insegnamento, in relazione all’aver già insegnato MQ

- È interessante la posizione degli insegnanti rispetto ai “concetti fondanti” della meccanica quantistica. Si è visto che a indicare aspetti che non sono in realtà concetti fondanti sono insegnanti di tutte le aree geografiche di provenienza, ma in maggioranza sono quelli che hanno già insegnato meccanica quantistica, forse influenzati dal tradizionale approccio storico dei libri di testo, che attirano l’attenzione soprattutto sul passaggio dalla fisica classica alla fisica moderna.
- Gli insegnanti sono per l’appunto, in genere, legati all’approccio storico: oltre a citare in gran numero fra i concetti fondanti della meccanica quantistica tutto ciò che riguarda il passaggio dalla fisica classica alla fisica moderna, ritengono che i vari approcci alla meccanica quantistica elaborati dai gruppi di ricerca manchino proprio dell’aspetto storico. Questo può significare che i docenti si sono formati all’insegnamento della meccanica quantistica prevalentemente sui libri di testo per gli studenti.
- Uno dei problemi molto importanti per l’insegnamento della meccanica quantistica risulta essere la preparazione degli insegnanti. Questo conferma che la formazione degli insegnanti è un ostacolo molto importante, come si era ipotizzato all’inizio di questo lavoro di ricerca.

- Gli insegnanti sono preoccupati anche dal troppo tempo e dagli strumenti matematici complessi che le varie proposte didattiche presentate richiederebbero. Effettivamente il contesto in cui si cala l'insegnamento della meccanica quantistica, cioè la scuola secondaria superiore, contiene variabili che influenzano la didattica come il contesto sociale, la preparazione di base degli studenti, la motivazione, le strutture di cui è dotata la scuola. Le proposte didattiche elaborate dai gruppi di ricerca non tengono conto di queste variabili.
- Vi è tra gli insegnanti un diffuso desiderio di formazione, non solo sulle metodologie, ma, per quanto riguarda la meccanica quantistica, proprio sui contenuti. Questo conferma un'altra ipotesi che abbiamo formulato nel presente lavoro di ricerca e cioè che per una disciplina come la fisica le "competenze" non possono prescindere dai contenuti: se questi vengono a mancare gli insegnanti stessi si trovano in difficoltà su "come" insegnare.

Riflessioni conclusive e problemi aperti

12.1 UNO SGUARDO ALL'ESPERIENZA PROFESSIONALE

Come si è visto, il problema dell'insegnamento della meccanica quantistica è trattato da diversi gruppi di ricerca, in Italia e all'estero. Ma, come si è ricordato più volte, questo lavoro di tesi è nato anche da osservazioni empiriche, cui si voleva dare fondamento mediante un supporto di studi e di osservazioni sistematiche. Prima di trarre le conclusioni più significative sul lavoro svolto, vorrei riassumere brevemente le osservazioni, basate sull'esperienza professionale, che hanno dato un impulso iniziale alla mia attività di ricerca.

La meccanica quantistica è una parte della fisica molto affascinante: consente di spiegare il funzionamento del mondo microscopico, si intreccia con la storia, con la filosofia e con la letteratura, ha risvolti "misteriosi". Circola una famosa frase di Feynman: «[...] credo di poter dire con sicurezza che nessuno ancora comprende la meccanica quantistica» [26]. Eppure vi è un grande interesse per questo settore della fisica. Perché limitare questo sapere a pochi specialisti in ambito accademico e non provare ad affrontarne con gli studenti della scuola superiore almeno i fondamenti? L'ordinamento scolastico lo prevede ed esistono lavori di ricerca che si occupano di didattica della meccanica quantistica in età preuniversitaria. Queste sono, in sintesi, le riflessioni che mi hanno spinto a intraprendere il lavoro di ricerca.

Le varie fasi del lavoro (gli studi preliminari, l'approfondimento delle proposte didattiche già esistenti, l'esame degli strumenti matematici necessari, l'indagine su campioni di insegnanti) si sono continuamente intersecate con considerazioni tratte dalla mia esperienza, cui darò qui di seguito un cenno, prima di trarre le conclusioni.

12.1.1 La visione della scienza

«Tu fai troppe supposizioni! — dice un personaggio del *Dialogo sul metodo* di Feyerabend [25, p. 18] al suo interlocutore — Prima di tutto supponi che le opinioni del mondo medico [...] siano sempre uniformi. In secondo luogo presupponi che siano sempre buone, [...]. Terzo, tu presumi che la loro messa in pratica migliori sempre il generale stato di salute. Nessuna di queste supposizioni è vera.» Questo personaggio del dialogo incarna una visione anticonformista e provocatoria della scienza, che si contrappone a quella rappresentata dal suo interlocutore, che è invece una visione intrisa di pregiudizi, quella di una scienza che si considera depositaria del metodo infallibile e che rifiuta tutto ciò che non comprende solo perchè non lo conosce, ricadendo, paradossalmente, in un autoritarismo antiscientifico.

Evidentemente Feyerabend riassumeva e criticava una visione della scienza abbastanza diffusa, che, per esperienza personale almeno nell'ambito dell'educazione scientifica, permane ancora oggi: la scienza è vista in un'ottica di stampo positivista, di carattere assoluto rispetto all'uomo e dotata di una certa utilità: la scienza esiste in quanto tale, l'uomo (nella fattispecie lo studente) deve cercare di capirla, e non sempre ci riesce, e usarla a suo vantaggio e a vantaggio dell'umanità; è gestita dagli scienziati, visti come sacerdoti che parlano un linguaggio oscuro ai più, che si servono di insegnanti per rendere un po' meno oscuro ai profani, e non sempre ci riescono, qualche elemento del loro sapere. Questa visione influisce negativamente sulla didattica delle scienze: gli studenti, spesso, mostrano di fronte alle scienze un atteggiamento rinunciatario dovuto alla presunta consapevolezza di "non capire". Essi fanno propria, inconsapevolmente, l'affermazione di Heidegger: «la scienza non pensa» [39]. Non pensa perché, in conseguenza del suo modo di procedere e dei suoi strumenti, essa non può pensare. Ma mentre per Heidegger il fatto che la scienza non sia in grado di pensare è un vantaggio, perché solo in virtù di questo la scienza può dedicarsi alla ricerca nei singoli ambiti e stabilirsi in essa, per la didattica delle scienze è un difetto. Possiamo però ritenere che quando la scienza si rende disponibile a interpretare, in quel momento pensa. E del resto oggi la scienza pensa (basti riflettere sul fruttuoso dibattito che ha generato l'interpretazione della meccanica quantistica) e deve essere considerata come uno degli strumenti che si hanno a disposizione per orientarsi nel mondo. Il ruolo della scienza come interpretazione è meglio precisato da Gadamer [29] nel saggio *Che cosa è la prassi*, dove egli si chiede: se la prassi è per la coscienza comune un'applicazione della scienza, che cosa è allora la scienza? La scienza, dice Gadamer, non è più «il culmine del conoscere o la sfera di ciò che è degno di essere conosciuto», ma è una via (una fra le tante, possiamo leggere tra le

righe), che consente di penetrare e progredire in ambiti inesplorati e perciò non ancora soggetti a un dominio.

Far crescere negli studenti la visione della scienza come interpretazione del mondo costringerebbe a ripensare il nostro sistema educativo a tutti i livelli. Si potrebbe così superare l'annosa separazione tra cultura umanistica e cultura scientifica. «Letterati a un polo e scienziati all'altro», come dice Snow [64], e «tra i due gruppi un abisso di reciproca incomprendimento.» Perché questa separazione è un problema? Snow risponde che i danni dell'incomunicabilità fra scienziati e letterati sono «impoverimento culturale» per gli uni e «mancanza di occasioni creative per gli altri». È lecito etichettare i saperi scientifici da un lato e umanistici dall'altro come “cultura”? Secondo Snow, lo è. Non solo in senso intellettuale ma anche in senso antropologico: tutte le persone che si ritrovano in una delle due categorie hanno una sorta di comunanza che si manifesta in un sottofondo di linguaggi e obiettivi comuni. Ecco perché per una ricomposizione delle due culture, sostiene, occorrerebbe un ripensamento del sistema educativo.

12.1.2 *A che cosa serve la scuola?*

Per quanto l'insegnamento della meccanica quantistica sia esplicitamente previsto solo nel quinto anno del liceo scientifico, una riflessione sul suo ruolo nella scuola di oggi porta a riflessioni di carattere più ampio. Un tale insegnamento, infatti, anche se come si è visto può essere motivato anche dalle svariate applicazioni tecnologiche della meccanica quantistica, può apparire poco “utile” ai cosiddetti “utenti” del servizio scolastico. La scuola italiana, infatti, è criticata perché non prepara per il mondo del lavoro. Tra le «anomalie più serie del sistema formativo italiano rispetto al contesto internazionale» Confindustria¹ cita «lo storico distacco tra scuola e mondo del lavoro: persino gli Istituti Tecnici e Professionali hanno perso i contatti e le collaborazioni (ricche fino agli anni '70) con il territorio e il mondo delle imprese. È in corso un processo di “licealizzazione” e di preoccupante riduzione d'iscrizioni agli istituti tecnici (specie nel Sud)». Esiste in effetti un segmento molto importante della scuola italiana che è l'istruzione tecnica e professionale, che purtroppo, almeno in certe realtà socio-culturali, è scelto dagli studenti e dalle loro famiglie in un'ottica distorta, ritenendo che sia un percorso in cui “si studia di meno” e quindi più adatto a ragazzi ai quali “non piace studiare”, con ciò alimentando l'errata convinzione che in certe scuole non bisogna studiare o, peggio, che per “lavorare” non bisogna

¹Nel rapporto *Prima giornata dell'Education, l'Education per la crescita, le 100 proposte di Confindustria*, Roma, 7 ottobre 2014.

avere una formazione culturale, oltre che pratica, per essere inseriti a pieno titolo in una società in cui, da cittadini, si devono esercitare i propri diritti e adempiere i propri doveri. E con ciò anche snaturando la qualità degli stessi percorsi di istruzione tecnica e professionale, in un circolo vizioso, perché gli studenti, non cogliendo appieno (o non cogliendo per niente) il fatto che la scuola non deve solo fornire competenze pratiche ma anche una preparazione culturale, non sfruttano a dovere le potenzialità che il corso di studi offre.

Quindi se da un lato, come si è visto, si riscontrano nell'istruzione tecnica e professionale derive di "licealizzazione" che portano a snaturare tali percorsi, dall'altro lato, però, anche nel mondo dei licei si tende a criticare insegnamenti che al giorno d'oggi sembrano molto distanti dal mondo del lavoro, come ad esempio l'insegnamento delle lingue e delle culture classiche e della matematica e delle scienze pure non finalizzate ad applicazioni pratiche e alla "modellizzazione" della realtà. In quest'ultima categoria potrebbe rientrare anche la meccanica quantistica.

Tutti coloro che operano nel mondo della scuola (e intorno ad esso) dovrebbero invece contribuire a diffondere il messaggio che in una società complessa come quella contemporanea la cosa più importante per uno studente è quella di avere un forte bagaglio culturale che gli consenta di orientarsi nell'immane quantità di stimoli e informazioni in cui oggi ci troviamo immersi. Questa, forse, è la cosa migliore che può fare la scuola per "preparare per il mondo del lavoro". È essenziale, come dice Tagliagambe in *Più colta e meno gentile. Una scuola di massa e di qualità* [68], la capacità di «orientarsi all'interno dell'intricato labirinto costituito da un corpus di informazioni e conoscenze che si espande sempre di più e in modo sempre più rapido e all'interno del quale si infittiscono in maniera impressionante le interrelazioni tra le diverse componenti e tra i differenti contenuti» [68, p. 28]. Fa fatica a farsi strada l'idea che uno studente debba avere una base culturale che gli insegni a pensare, qualunque percorso decida di seguire. La parola, dice Ricoeur [61] nel suo saggio *Work and Word*, ha una funzione di fondazione di tutte le attività pragmatiche dell'uomo e non avviene civilizzazione se l'uomo non si ritaglia uno spazio di speculazione disinteressata, che non abbia un mero e immediato riscontro utilitaristico.

Una motivazione di fondo che ha animato questo lavoro è la convinzione dell'importanza di conoscere alcuni aspetti del sapere umano, come la meccanica quantistica, non solo perché utili per applicazioni tecnologiche, ma perché rappresentano un'importante conquista della mente umana.

12.1.3 *Contenuti e competenze*

Per l'insegnamento della meccanica quantistica, come si è visto anche nell'esame delle proposte didattiche elaborate da gruppi di ricerca, è importante individuarne i contenuti fondamentali. Nel paragrafo 2.3, relativo alle modalità di apprendimento, sono state esaminate le posizioni di vari autori e si è concluso che è opportuno puntare a un certo numero di conoscenze e a una loro struttura (non quindi a un'accumulazione delle conoscenze da parte dello studente, retaggio dell'insegnamento di tipo trasmissivo). La scelta dei "concetti fondanti" è guidata da un'analisi epistemologica. È importante, quindi, che l'insegnante, nel proporre la meccanica quantistica agli studenti, rivolga la sua attenzione alla centralità dei contenuti, che in tempi recenti sono stati ritenuti meno importanti delle "competenze": anche dall'esame dei lavori di ricerca già esistenti si desume che una proposta didattica fondata da un punto di vista epistemologico non può prescindere da un'accurata scelta dei contenuti. I "concetti fondanti" non sono un mero strumento per sviluppare competenze, e quindi indifferentemente intercambiabili con altri contenuti: viceversa, sono le competenze che devono essere sviluppate a partire dai concetti fondanti. Nella scuola di oggi l'importanza assegnata al "saper fare" ha spesso messo in secondo piano il "sapere": dal mio lavoro di ricerca sull'insegnamento della meccanica quantistica vorrei che emergesse che il conoscere certi contenuti fondamentali è importante almeno quanto il saperli utilizzare.

È difficile "insegnare le competenze", ma è possibile acquisirle: possono essere il risultato di un paziente lavoro sui concetti fondamentali e sulla costruzione di una struttura di concetti. Talvolta, a sostegno del fatto che la scuola italiana non insegna il "saper fare", si mostrano all'opinione pubblica i risultati di apprendimento di sistemi scolastici di altri paesi, tralasciando di specificare che i sistemi educativi non sono formule che si applicano indistintamente in qualsiasi contesto e che un sistema scolastico che funziona bene in un contesto sociale può avere esiti molto diversi in un altro. Talvolta invece quotidiani e altre fonti di informazione elogiano metodi educativi di paesi "nordici" per far risaltare le pecche del nostro sistema scolastico, anche qui omettendo di consultare e propagandare fonti ufficiali che forniscono informazioni sugli effettivi risultati di quei sistemi. È interessante invece, ad esempio, studiare gli articoli delle riviste di didattica che trattano un'analisi dell'efficacia dei sistemi scolastici stranieri. Si può leggere ad esempio [45] come in Finlandia (che nell'immaginario collettivo è uno dei paesi dove la scuola fornisce i risultati migliori) metodi considerati innovativi per l'insegnamento della matematica abbiano prodotto risultati fallimentari. Il metodo sotto accusa è proprio il *problem solving*. In Fin-

landia questo metodo si basava sul fatto che si consideravano importanti le applicazioni della matematica ma non la matematica in sé. In particolare si riteneva non necessario far imparare quelle abilità che possono essere esercitate da un calcolatore. L'articolo citato descrive alcuni deleteri effetti di questa metodologia: la matematica scolastica è diventata descrittiva (si trascurano cioè le definizioni esatte e le dimostrazioni); è caduta in disuso la geometria; i calcoli sono svolti solo con calcolatori e numericamente (si trascura del tutto, cioè, l'aspetto algebrico). Dal punto di vista dei risultati dell'apprendimento (che si chiamino conoscenze, abilità o competenze), basti un esempio: alla domanda *Perché la somma degli angoli interni in un triangolo è 180 gradi?*, nessuno o quasi risponde, nonostante la spiegazione sia presente in molti libri di testo. Questo mostra come l'insegnamento dei principi della matematica sia ridotto a una lista di fatti senza una base di ragionamento: per quanto riguarda il quesito citato, ad esempio, gli insegnanti si limitano a mostrare la proprietà con forbici e carta. Il quesito fa parte di un esame (*examination matriculation*) che si tiene in Finlandia a 18 anni, al termine della scuola superiore.

12.1.4 Esercizi nella didattica delle scienze

Che tipo di esercizi dare agli studenti, per consolidare l'apprendimento di una disciplina scientifica? Questo aspetto è strettamente legato al problema delle competenze. A questo proposito agli insegnanti si propongono ad esempio, anche a livello istituzionale, alcuni metodi ritenuti molto efficaci, perché adottati in altri sistemi scolastici, come il *problem solving*.² Implicitamente, perciò, si sminuiscono i tradizionali esercizi che si assegnano agli studenti (come risolvere un'equazione o scomporre un polinomio) perché non esercitano la creatività dello studente. Sarebbe bello che lo studente riuscisse, dopo una nostra lezione, a risolvere un vero problema "aperto" in senso scientifico, a trovare una soluzione creativa e ad argomentarla con proprietà di linguaggio specifico e con logica rigorosa. Ma l'esperienza mostra che questa capacità, se pure può essere raggiunta, ha bisogno dei tradizionali esercizi, che servono per apprendere i contenuti imprescindibili di

²Il MIUR, ad esempio, ha promosso il progetto *Problem Posing&Solving*, per «concretizzare il cambiamento prospettato a livello normativo con il passaggio dai "programmi ministeriali d'insegnamento" alle Indicazioni Nazionali» (nota MIURAOODGOS/3420 del 1 giugno 2012). Tale progetto è stato previsto e realizzato per il secondo biennio dei licei e per l'anno scolastico 2012/2013, in cui il secondo biennio previsto dalla revisione dei licei prendeva avvio per la prima volta. Il MIUR inoltre, fra le "iniziative di valorizzazione delle eccellenze", propone ogni anno le *Olimpiadi di Problem Solving*, su "informatica e pensiero algoritmico nella scuola dell'obbligo".

una disciplina. Tuttavia, dice Arons [1, p. 1], sarebbe illusorio pensare di colmare diverse lacune nella preparazione di base degli studenti «con pochi esercizi veloci, sviluppati in contesti artificiali all’inizio del corso. La maggior parte degli studenti può essere aiutata a colmare queste lacune, ma ciò richiede la *ripetizione* di esercizi che siano distribuiti nel tempo e che siano pertinenti con gli argomenti del corso stesso». Tale affermazione, prosegue Arons, riflette esperienze di lavoro documentate dalla ricerca in didattica della fisica. È importante dunque la *ripetizione* (e talvolta anche la *ripetitività*) degli esercizi: solo dopo che uno studente si è esercitato a dovere, riesce a trovare la scomposizione di un polinomio senza che nessuno gli dica quale metodo applicare; solo dopo che si è esercitato su tante funzioni, potrà completare uno studio di funzione senza seguire ciecamente i passaggi che gli sono stati insegnati ma decidendo quali applicare e quali non applicare; solo dopo che conoscerà a fondo le leggi della cinematica e il concetto di energia potrà decidere di risolvere un problema di fisica applicando le leggi della cinematica o considerazioni energetiche.

12.2 UNA PROPOSTA DI TRASPOSIZIONE DIDATTICA

Una delle ipotesi di questo lavoro è stata quella di studiare la possibilità di proporre un percorso didattico organico e completo, per studenti della scuola superiore, su alcuni argomenti di meccanica quantistica. Per chiarire cosa si intende per “organico e completo”, si tenga presente il concetto di “testualizzazione” di Chevallard: un percorso didattico, a differenza del sapere scientifico, che è costituito da una rete di problemi smisurata, deve avere un *inizio* e una *fine*. Nel riflettere su un possibile percorso didattico, quindi, sono stati tenuti presenti alcuni principi di base, sostenuti dalla ricerca didattica:

- L’approccio storico, inteso non come storia dei personaggi ma dei concetti, può essere molto utile, per introdurre ad esempio alcuni argomenti di meccanica quantistica. Ma se si vuole utilizzarlo per costruire un percorso completo, la ricerca didattica ha mostrato che è difficile per gli studenti cogliere appieno l’evoluzione storica dei concetti della meccanica quantistica. Si tratta infatti di un percorso anche molto affascinante ma per niente lineare, nonché complesso dal punto di vista matematico. Si ricordi ad esempio che alcuni strumenti matematici sono nati per la meccanica quantistica o hanno trovato pieno significato nella meccanica quantistica. Un percorso didattico costruito col solo approccio storico potrebbe ridursi pertanto a una serie di racconti o aneddoti, e non sarebbe organico e completo nel senso già illustrato.

- È importante scegliere una base fenomenologica per il percorso didattico che si vuole elaborare: la meccanica quantistica, oltre a non essere un racconto storico, non è nemmeno un insieme di fatti “strani”, ma una teoria che spiega fenomeni. Spesso non si tratta di fenomeni di cui abbiamo esperienza diretta, ma anche se sono difficili da riprodurre, è possibile e necessario sceglierne alcuni come supporto di una proposta didattica.
- Dell’importanza dei concetti fondanti si è detto in più punti di questo lavoro. Un aspetto collegato è quello quantitativo: una proposta didattica, oltre che un nucleo di concetti fondanti, deve avere anche una solida base quantitativa. Ecco perché sono stati studiati gli strumenti matematici necessari per lo sviluppo di alcuni argomenti di meccanica quantistica e trattati (o trattabili) nella scuola. Con una base quantitativa, è possibile mettere in atto la *testualizzazione* nel senso di Chevallard, strutturando ad esempio un certo numero di esercizi che completano e concludono la proposta didattica.

Partendo da questi principi e dalle proposte didattiche già esistenti, è stata elaborata un’ipotesi di trasposizione didattica di due argomenti di meccanica quantistica: i sistemi a due stati e l’atomo. Per trattare tali argomenti sono stati individuati come strumenti matematici necessari i numeri complessi, la probabilità e il calcolo vettoriale. Sulla base di un esame di alcuni libri di testo, delle indicazioni nazionali e del riscontro degli insegnanti, si è potuto stabilire che tali strumenti sono insegnati o comunque insegnabili nel liceo scientifico. Anzi, l’uso di questi strumenti, finalizzati allo studio della meccanica quantistica, ne possono agevolare l’inserimento nel curriculum. Come base fenomenologica per lo studio dei sistemi a due stati si è deciso di partire dallo spin delle particelle, anche con esperimenti virtuali (in maniera analoga si potrebbe partire da esperimenti sulla polarizzazione, come nella proposta del gruppo di Udine) e di completare la trasposizione didattica con un’esperienza di diffrazione degli elettroni. Per quanto riguarda lo studio dell’atomo, una base fenomenologica potrebbe essere l’esperienza di Franck ed Hertz, che consente di prendere visione dei livelli energetici di un atomo. Sia la diffrazione degli elettroni che l’esperimento di Franck ed Hertz consentono eventualmente di effettuare misure di grandezze fisiche, e quindi completano l’aspetto quantitativo del percorso didattico.

La trasposizione didattica dei sistemi a due stati si basa sull’analogia fra questi e i vettori nel piano cartesiano. Lo spin dei fermioni, infatti, può essere scritto come combinazione lineare di due stati di base, come un

vettore del piano cartesiano può essere scritto come somma di due componenti. La proiezione di un vettore su un dato asse corrisponde, nel caso quantistico, all'operazione di misura. Le componenti dello stato quantistico sono numeri complessi e sono ampiezze di probabilità, pertanto il loro modulo quadro consente di determinare la probabilità che la misura su uno stato fornisca un certo risultato. I concetti introdotti sono affrontati con gli strumenti matematici descritti e sono corredati di un certo numero di esercizi che completano il percorso.

Per quanto riguarda l'atomo, la proposta è un po' più elaborata dal punto di vista matematico, perché richiede, per la sua completezza, la conoscenza delle proprietà delle funzioni goniometriche e il calcolo integrale. La trasposizione parte dal riconoscere il ruolo dell'equazione di Schrödinger come equazione fondamentale della meccanica quantistica, ruolo analogo a quello posseduto dalla seconda legge di Newton. Una base fenomenologica può essere l'esame dell'effetto fotoelettrico, che consente di riflettere sul concetto di fotone. Un fenomeno come la diffrazione degli elettroni può portare a considerare la natura ondulatoria della materia e il fatto che a ogni particella si può associare una funzione d'onda, che è una soluzione dell'equazione di Schrödinger. La trasposizione non prevede la risoluzione dell'equazione, ma un esame delle analogie tra funzione d'onda e equazione di un'onda armonica. La funzione d'onda contiene informazioni sulla posizione e sulla quantità di moto della particella: a seconda che sia espressa nello spazio delle posizioni o in quello degli impulsi, il modulo quadro della funzione d'onda consente di valutare la probabilità che la posizione o la quantità di moto della particella siano in un certo intervallo. Con le proprietà delle funzioni goniometriche, si può vedere come una funzione d'onda può essere localizzata, e quindi determinare con una certa precisione la posizione di una particella, ma si può vedere anche come riducendo l'indeterminazione sulla posizione si aumenta quella sulla quantità di moto e viceversa. La trasposizione didattica proposta, dunque, si propone di giungere a una forma semplice del principio di indeterminazione mediante gli strumenti matematici offerti dalle funzioni periodiche. Come ulteriore sviluppo si può riflettere sul fatto che una funzione d'onda costituita da un pacchetto d'onde gaussiano è quella con indeterminazione minima. Sempre con le proprietà delle funzioni goniometriche si può affrontare il caso della buca di potenziale infinita, che consente di vedere un caso particolare di funzione d'onda e che può costituire un modello semplificato di atomo. Si parte dalla considerazione (che fa parte di quell'inevitabile sapere *precostruito* di cui si è già parlato) che nel caso della buca di potenziale infinita, le energie del sistema possono assumere solo determinati valori e le soluzioni dell'equazione di Schrödinger sono una famiglia di funzioni periodiche. Un

generico stato del sistema sarà una combinazione di tali funzioni, come una combinazione di vettori, ma a più di due dimensioni. Anche in questo caso i coefficienti della combinazione sono numeri complessi, sono ampiezze di probabilità e consentono di determinare la probabilità che il sistema assuma un certo stato di energia. Come nello studio dei sistemi a due stati, la trasposizione illustrata si conclude con esempi quantitativi.

Le proposte qui descritte sono state illustrate ad alcuni gruppi di insegnanti. Uno dei possibili sviluppi di questo lavoro potrebbe essere lo studio della realizzazione delle trasposizioni didattiche elaborate con classi o gruppi di studenti, progetto che richiederebbe tempi più ampi dell'arco di un anno scolastico.

12.3 IL PROBLEMA DELLA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Una delle ipotesi formulata all'inizio di questo lavoro, sui problemi che ostacolano l'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola superiore, era la difficoltà che gli insegnanti stessi possono trovare nella loro attività. Tale ipotesi si basava sull'esame delle carenze dell'attuale e pregresso sistema di formazione degli insegnanti e sulle osservazioni e esperienze personali. Per verificare tale ipotesi, si è operato con indagini su campioni di insegnanti. Mediante interviste, questionari e raccolte di dati è stata studiata la posizione dei docenti di fronte all'insegnamento della meccanica quantistica.

Un primo gruppo di insegnanti intervistati appartiene a un liceo di medie dimensioni di una città della nostra regione. L'indagine è stata inserita in un'attività di formazione avente come contenuti alcuni aspetti trattati in questo lavoro (cfr. capitolo 10), svolta tra dicembre 2013 e marzo 2014. In particolare, le domande poste vertevano sui seguenti aspetti:

- esperienza nell'insegnamento della meccanica quantistica;
- motivazioni che eventualmente hanno portato a non insegnare meccanica quantistica;
- difficoltà incontrate;
- insegnamento degli strumenti matematici necessari;
- esperienza nel laboratorio di fisica moderna.

Un'indagine più ampia è stata condotta su un campione di sessanta insegnanti che hanno partecipato, nel mese di settembre 2014, alla Scuola

Nazionale di Fisica Moderna per Insegnanti organizzata dal Gruppo di ricerca in didattica della fisica dell'Università di Udine (cfr. capitolo 11) . Nella Scuola gli insegnanti hanno avuto modo di familiarizzare soprattutto con la proposta elaborata dal gruppo organizzatore, ma è stata loro fornita anche una panoramica sulle altre principali proposte a livello nazionale. Al termine della sintesi delle proposte, da me presentata, è stato somministrato un questionario, per indagare, tra l'altro, sui seguenti aspetti:

- gli insegnanti e i concetti fondanti della meccanica quantistica;
- aspetti importanti dell'insegnamento della meccanica quantistica eventualmente trascurati dai vari approcci;
- difficoltà che i vari approcci possono presentare;
- coerenza delle proposte con le indicazioni nazionali;
- esperienza pregressa nell'insegnamento della meccanica quantistica.

È stato anche esaminato l'insieme degli abilitati in matematica e fisica mediante la Scuola di Specializzazione per la Formazione Insegnanti Scuola Secondaria dell'Università di Cagliari (cfr. paragrafo 10.4), che ha operato dall'anno accademico 1999/2000 al 2007/2008 (gli ultimi abilitati hanno conseguito il titolo nel 2009). In particolare è stato rilevato, per ogni abilitato, il titolo di studio di accesso alla SSIS. Dai dati risulta che gli abilitati SSIS in matematica e fisica sono così distribuiti: 52% sono laureati in matematica, 37% in fisica e 11% in ingegneria. Si può ipotizzare che la percentuale di laureati in fisica sarebbe ancora inferiore, se si esaminasse campioni di insegnanti abilitati con altre modalità, poiché la normativa anteriore al 1999 consentiva in misura maggiore l'accesso all'insegnamento di matematica e fisica agli ingegneri.

Dalle osservazioni raccolte e dai dati esaminati si può concludere che effettivamente sussiste, per quanto riguarda la didattica della fisica moderna, un problema di formazione insegnanti. Pur con tutte le esperienze positive che emergono dall'indagine (esiste un congruo numero di insegnanti motivati, che si sono messi in discussione e mediante autoformazione hanno cercato di risolvere il problema), si tratta di casi singoli o di iniziative di formazione che, seppure valide, non riescono a raggiungere tutta la potenziale platea di interessati. Emerge inoltre la presa di coscienza del problema da parte degli insegnanti stessi e la volontà di risolverlo. Non si può non rilevare, a questo punto del lavoro di ricerca, che esistono, nell'attuale sistema di formazione insegnanti, vistose lacune nella didattica della fisica moderna. Si auspica che il presente lavoro fornisca anche spunti a chi si occupa del

problema a livello istituzionale. Si dovrebbe anzitutto completare la preparazione degli insegnanti a livello universitario: le lauree magistrali abilitanti all'insegnamento, previste dalla normativa e mai realizzate, potrebbero senz'altro contenere insegnamenti di fisica moderna per chi consegue una laurea triennale in matematica, fisica o ingegneria e aspira a diventare insegnante di fisica. Nell'attesa che sia riformato il settore della formazione insegnanti, il TFA potrebbe sopperire alle carenze della preparazione degli aspiranti insegnanti introducendo moduli di didattica della fisica moderna. A livello istituzionale inoltre si dovrebbero sostenere valide attività di formazione in servizio, ma anche incoraggiare gli insegnanti a parteciparvi o per lo meno rendere loro possibile farlo.

12.4 L'INSEGNAMENTO DELLA MECCANICA QUANTISTICA: UNA SFIDA

In questo lavoro di ricerca siamo partiti dalle indicazioni della normativa scolastica e dalle motivazioni scientifiche e culturali in genere per cui è importante l'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola superiore; abbiamo studiato le modalità di apprendimento degli studenti, per stabilire se è possibile che in età preuniversitaria essi possano trarre profitto da insegnamenti di meccanica quantistica; abbiamo ripercorso le formulazioni e l'interpretazione della meccanica quantistica per poter decidere *che cosa* insegnare; ci siamo posti il problema della *trasposizione didattica*, per capire come passare dal *sapere* al *sapere insegnato*; abbiamo provato a elaborare, sulla base di autorevoli proposte, un percorso lineare e coerente, completo anche dal punto di vista matematico, cercando di dividerlo, oltre che col mondo accademico, anche con gli insegnanti. In tutto questo non possiamo dimenticare che qualsiasi progetto didattico si dovrà poi calare in un contesto reale. Evitare che la scuola sia «un ospedale che cura i sani e respinge i malati»: ³ questa è la sfida dell'insegnamento della meccanica quantistica, e dell'insegnamento in generale.

³Parole di don Milani in *Lettera a una professoressa* [8].

Allegati

— A —

Riferimenti normativi

Tabella A.1: Riferimenti normativi citati nel testo

Abbreviazione	Contenuto del dispositivo
L. 1859/1962	L. 31 dicembre 1962, n. 1859, in materia di “Istituzione e ordinamento della scuola media statale”
L. 477/1973	L. 30 luglio 1973, n. 477, in materia di “Delega al Governo per l’emanazione di norme sullo stato giuridico del personale direttivo, ispettivo, docente e non docente della scuola materna, elementare, secondaria e artistica dello Stato”
D.P.R. 416/1974	D.P.R. 31 maggio 1974, n. 416, in materia di “Istituzione e riordinamento di organi collegiali della scuola materna, elementare, secondaria ed artistica”
D.P.R. 417/1974	D.P.R. 31 maggio 1974, n. 417, in materia di “Norme sullo stato giuridico del personale docente, direttivo ed ispettivo della scuola materna, elementare, secondaria ed artistica dello Stato”
D.P.R. 418/1974	D.P.R. 31 maggio 1974, n. 418, in materia di “Corresponsione di un compenso per lavoro straordinario al personale ispettivo e direttivo della scuola materna, elementare, secondaria ed artistica”

Continua nella pagina successiva

A. RIFERIMENTI NORMATIVI

Continua dalla pagina precedente

Abbreviazione	Contenuto del dispositivo
D.P.R. 419/1974	D.P.R. 31 maggio 1974, n. 419, in materia di “Sperimentazione e ricerca educativa, aggiornamento culturale e professionale ed istituzione dei relativi istituti”
D.P.R. 420/1974	D.P.R. 31 maggio 1974, n. 420, in materia di “Norme sullo stato giuridico del personale non insegnante statale delle scuole materne, elementari, secondarie ed artistiche”
D.P.R. 104/1985	D.P.R. 12 febbraio 1985, n. 104, in materia di “Approvazione dei nuovi programmi didattici per la scuola primaria”
C.M. 109/1990	C.M. 19 aprile 1990, n. 109, in materia di “Sperimentazione dei programmi proposti dalla Commissione Ministeriale costituita per la revisione delle discipline comuni ai primi due anni dell’istruzione superiore ed artistica”
L. 341/1990	L. 19 novembre 1990, n. 341, in materia di “Riforma degli ordinamenti didattici universitari”
D.Lgs. 297/1994	D.Lgs. 16 aprile 1994, n. 297, in materia di “Approvazione del testo unico delle disposizioni legislative vigenti in materia di istruzione, relative alle scuole di ogni ordine e grado”
D.M. 39/1998	D.M. 30 gennaio 1998, n. 39, in materia di “Testo coordinato delle disposizioni impartite in materia di ordinamento delle classi di concorso a cattedre e a posti di insegnamento tecnico-pratico e di arte applicata nelle scuole ed istituti di istruzione secondaria e artistica”
D.M. 354/1998	D.M. 10 agosto 1998, n. 354, in materia di “Costituzione di <i>Ambiti Disciplinari</i> per aggregazione di classi di concorso finalizzata allo snellimento delle procedure concorsuali ed altre procedure connesse”

Continua nella pagina successiva

Continua dalla pagina precedente

Abbreviazione	Contenuto del dispositivo
D.M. 460/1998	D.M. 24 novembre 1998, n. 460, in materia di “Norme transitorie per il passaggio al sistema universitario di abilitazione all’insegnamento nelle scuole e istituti di istruzione secondaria”
D.P.R. 275/1999	D.P.R. 8 marzo 1999, n. 275, in materia di “Regolamento recante norme in materia di autonomia delle istituzioni scolastiche, ai sensi dell’art. 21 della legge 15 marzo 1997, n. 59”
D.D.G. 31/3/1999	Decreto del Direttore Generale del personale e degli affari generali e amministrativi, 31 marzo 1999, in materia di “Concorsi a cattedre e per il conseguimento dell’abilitazione all’insegnamento per classi di concorso comprese negli ambiti disciplinari dal n. 1 al n. 9, costituiti con D.M. n. 354 del 10 agosto 1998”
L. 124/1999	L. 3 maggio 1999, n. 124, in materia di “Disposizioni urgenti in materia di personale scolastico”
O.M. 153/1999	O.M. 15 giugno 1999, n. 153, in materia di “Indizione, ai sensi dell’art. 2, comma 4, della legge 3 maggio 1999, n. 124, di una sessione riservata di esami, preceduta dalla frequenza di un corso, finalizzata, rispettivamente, al conseguimento dell’abilitazione all’insegnamento nella scuola materna o nelle scuole e istituti di istruzione secondaria e artistica, ovvero dell’idoneità per gli insegnanti di scuola elementare, gli insegnanti tecnico pratici, gli insegnanti di arte applicata e per il personale educativo delle istituzioni educative”
D.M. 509/1999	D.M. 3 novembre 1999 n. 509, in materia di “Regolamento recante norme concernenti l’autonomia didattica degli atenei”

Continua nella pagina successiva

A. RIFERIMENTI NORMATIVI

Continua dalla pagina precedente

Abbreviazione	Contenuto del dispositivo
L. 53/2003	L. 28 marzo 2003, n. 53, in materia di “Delega al Governo per la definizione delle norme generali sull’istruzione e dei livelli essenziali delle prestazioni in materia di istruzione e formazione professionale”
D.Lgs. 59/2004	D.Lgs. 19 febbraio 2004, in materia di “Definizione delle norme generali relative alla scuola dell’infanzia e al primo ciclo dell’istruzione, a norma dell’articolo 1 della legge 28 marzo 2003, n. 53”
D.M. 22/2005	D.M. 9 febbraio 2005, n. 22, in materia di “Integrazione D.M. n. 39 del 30 gennaio 1998 - Lauree specialistiche”
L. 296/2006	L. 27 dicembre 2006, n. 296, in materia di “Disposizioni per la formazione del bilancio annuale e pluriennale dello Stato (legge finanziaria 2007)”
D.M. 139/2007	D.M. 22 agosto 2007, n. 139, in materia di “Regolamento recante norme in materia di adempimento dell’obbligo di istruzione, ai sensi dell’articolo 1, comma 622, della legge 27 dicembre 2006, n. 296”
D.P.R. 122/2009	D.P.R. 22 giugno 2009, n. 122, in materia di “Regolamento recante coordinamento delle norme vigenti per la valutazione degli alunni e ulteriori modalità applicative in materia, ai sensi degli articoli 2 e 3 del decreto-legge 1° settembre 2008, n. 137, convertito, con modificazioni, dalla legge 30 ottobre 2008, n. 169”
D.M. 9/7/2009	D.M. 9 luglio 2009, in materia di “Equiparazioni tra diplomi di lauree di vecchio ordinamento, lauree specialistiche (LS) ex decreto n. 509/1999 e lauree magistrali (LM) ex decreto n. 270/2004, ai fini della partecipazione ai pubblici concorsi”

Continua nella pagina successiva

Continua dalla pagina precedente

Abbreviazione	Contenuto del dispositivo
D.M. 9/2010	D.M. 27 gennaio 2010, n. 9, in materia di “Certificazione delle competenze relative all’assolvimento dell’obbligo di istruzione nella scuola secondaria superiore”
D.P.R. 89/2010	D.P.R. 15 marzo 2010, n. 89, in materia di “Regolamento recante revisione dell’assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell’art. 64, comma 4, del decreto-legge del 25 giugno 2008 n. 112, convertito, con modificazioni, dalla legge del 6 agosto 2008, n. 133”
D.M. 211/2010	D.M. 7 ottobre 2010, n. 211, in materia di “Regolamento recante indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all’articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all’articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento”
D.M. 249/2010	D.M. 10 settembre 2010, n. 249, in materia di “Regolamento concernente: «Definizione della disciplina dei requisiti e delle modalità della formazione iniziale degli insegnanti della scuola dell’infanzia, della scuola primaria e della scuola secondaria di primo e secondo grado, ai sensi dell’articolo 2, comma 416, della legge 24 dicembre 2007, n. 244»”
D.D.G. 82/2012	Decreto del Direttore Generale per il personale scolastico, 24 settembre 2012, n. 82, in materia di “Indizione dei concorsi a posti e cattedre, per titoli ed esami, finalizzati al reclutamento del personale docente nelle scuole dell’infanzia, primaria, secondaria di I e II grado”

Si conclude dalla pagina precedente

L'equazione di Schrödinger e le sue soluzioni

L'equazione di Schrödinger, equazione fondamentale della meccanica quantistica, consente di conoscere l'evoluzione temporale di una particella di massa m noto il potenziale in cui essa si trova. È un'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi. \quad (\text{B.1})$$

Nell'ipotesi di un potenziale che non dipende dal tempo e dell'esistenza di soluzioni dette separabili, del tipo

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t), \quad (\text{B.2})$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \psi \frac{df}{dt} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \psi}{dx^2} f \end{aligned}$$

e sostituendo nella (B.1) si ottiene

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V.$$

Deve essere perciò

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = E$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V = E$$

dove E è una costante. Dalla prima delle due equazioni differenziali si ottiene

$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}.$$

La seconda si scrive nella forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi, \quad (\text{B.3})$$

ed è l'equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo.

La costante E è l'energia del sistema. Per vederlo si deve anzitutto ricordare che la quantità di moto può essere espressa come operatore in funzione della posizione (cfr. [38, p. 15]) $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ e quindi anche l'energia cinetica può essere espressa come operatore $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Si può introdurre quindi l'operatore detto hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

che rappresenta l'energia meccanica del sistema e quindi scrivere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo come

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Equazioni di Eulero-Lagrange

Riassumiamo qui alcune caratteristiche del formalismo lagrangiano, di cui si fa uso nella teoria quantistica dei campi. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni del moto di un sistema fisico, in opportune condizioni, e possono essere ricavate da un principio differenziale (il principio di d'Alembert) oppure da un principio integrale (il principio di Hamilton). Per i dettagli cfr. ad esempio [36].

C.1 IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Dato un sistema costituito da N particelle, su cui agiscono forze esterne $\mathbf{F}_i^{(e)}$ e forze interne, esercitate su ogni particella da tutte le altre, vale il secondo principio della dinamica, che può essere scritto nella forma

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

dove \mathbf{F}_{ji} è la forza interna sulla particella i esercitata dalla particella j e \mathbf{p}_i è la quantità di moto della particella i .

Si ottiene quindi il sistema di $3N$ equazioni differenziali (perché un sistema di N particelle ha $3N$ gradi di libertà)

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i,$$

da cui, in linea di principio, se sono note le forze esterne che agiscono sul sistema, e tenuto conto che per il terzo principio della dinamica le forze interne si annullano, si possono ricavare le funzioni incognite $\mathbf{r}_i(t)$, cioè $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. In un sistema, però, possono essere presenti anche vincoli. Consideriamo un tipo di vincoli detti olonomi, cioè vincoli tali per cui le coordinate delle particelle sono legate da equazioni del tipo

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Il corpo rigido, ad esempio, è un caso in cui i vincoli sono olonomi, perché si ha

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Se i vincoli sono olonomi, saranno espressi da k equazioni del tipo (C.1), che possono essere usate per eliminare k delle $3N$ coordinate. Si possono allora introdurre $3N - k$ nuove coordinate indipendenti, mediante trasformazioni del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ \dots \\ \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{cases}$$

che contengono implicitamente i vincoli.

Quando sono presenti vincoli, però, ci sono forze che non sono direttamente specificabili ma che sono note solo per gli effetti che producono. Si tratta di ulteriori incognite nelle equazioni del moto. Per superare questa difficoltà, occorrerebbe esprimere le leggi della meccanica senza che vi compaiano forze vincolari. Si procede come segue.

Si introduce lo spostamento virtuale infinitesimo, che è un'arbitraria variazione infinitesima $\delta\mathbf{r}_i$ delle coordinate, compatibile con le forze e i vincoli imposti al sistema al tempo dato t . Lo spostamento virtuale si distingue da quello reale, che avviene in un tempo dt , durante il quale le forze e i vincoli possono subire cambiamenti. Supponiamo che il sistema sia in equilibrio. La forza totale \mathbf{F}_i su ogni particella è nulla:

$$\mathbf{F}_i = 0$$

quindi

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Poiché ogni forza \mathbf{F}_i è composta da una forza attiva $\mathbf{F}_i^{(a)}$ e una reazione vincolare \mathbf{f}_i , si può scrivere

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Consideriamo sistemi per cui il lavoro virtuale delle forze vincolari è nullo. Questa condizione è verificata per i corpi rigidi ed è valida per tanti altri

vincoli. La condizione di equilibrio diventa

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

ovvero il lavoro virtuale delle forze attive deve essere nullo (principio dei lavori virtuali).

Gli spostamenti virtuali $\delta \mathbf{r}_i$ non sono indipendenti (sono legati dai vincoli), quindi i coefficienti $\mathbf{F}_i^{(a)}$ in generale non sono nulli. Occorre far comparire le coordinate generalizzate q_i , che sono indipendenti. Il principio dei lavori virtuali, però, è valido solo nel caso statico. Per estenderlo al caso dinamico ricordiamo che

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

quindi

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0.$$

Si può scrivere allora

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Se consideriamo sempre sistemi per cui il lavoro virtuale delle forze vincolari è nullo, si ottiene il principio di d'Alembert

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Ora possiamo introdurre le coordinate generalizzate. Si può dimostrare che il principio di d'Alembert diventa

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

dove

$$Q_j = \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

sono dette forze generalizzate.

Ora, poiché gli spostamenti virtuali δq_j sono indipendenti, deve essere

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j.$$

Se poi le forze sono derivabili da un'energia potenziale $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, si ha

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U$$

$$Q_j = -\sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (K - U)}{\partial q_j} = 0.$$

Poiché l'energia potenziale dipende solo dalla posizione e non dalla velocità, si può includere un termine $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (K - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (K - U)}{\partial q_j} = 0.$$

Introducendo la funzione lagrangiana

$$L = K - U,$$

si ottengono le equazioni, dette di Eulero-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

C.2 IL PRINCIPIO DI HAMILTON

Le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere ricavate anche da un principio variazionale, il principio di Hamilton, secondo cui il moto di un sistema conservativo, fra gli istanti t_1 e t_2 , è tale che l'integrale di linea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

assume un valore estremo in corrispondenza della traiettoria del moto. Se si introducono n coordinate generalizzate, che variano nel cosiddetto spazio delle configurazioni, il principio di Hamilton equivale alla condizione

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

Si può dimostrare che dal principio di Hamilton seguono le equazioni di Eulero-Lagrange. Questo consente di costruire la meccanica dei sistemi

conservativi assumendo come postulato il principio di Hamilton anziché le leggi di Newton. In questo modo la formulazione della teoria non dipende dal sistema di coordinate scelto per esprimere la lagrangiana. Inoltre tale formulazione consente di descrivere “col formalismo della meccanica classica, sistemi apparentemente non meccanici, come nella teoria dei campi” [36, p. 32].

Il problema di trovare la curva in corrispondenza della quale un dato integrale di linea assume il valore estremo è un problema di calcolo delle variazioni. Sia ad esempio $y = y(x)$ una curva, nell'intervallo compreso fra x_1 e x_2 , tale che l'integrale

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx$$

assuma un massimo o un minimo.

Se si scrivono tutte le possibili curve (x) nella forma

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x),$$

dove $\eta(x)$ è una funzione arbitraria tale che $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, si ha

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx$$

e si possono applicare, per trovare gli estremi della funzione $J(\alpha)$ i metodi del calcolo differenziale ordinario. La condizione di estremo quindi è data da

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0.$$

Tale condizione, dopo lunghi e laboriosi calcoli, diventa

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Tutto questo può essere esteso al caso in cui f è una funzione di più variabili indipendenti y_i e delle loro derivate $f(y_i, \dot{y}_i, x)$. Se quindi come funzione f si prende la lagrangiana $f(q_i, \dot{q}_i, t)$, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange.

L'importanza di ricavare una teoria da un principio variazionale sta nel fatto che tutte le teorie ricavate da un principio variazionale mostrano analogie strutturali, che possono guidare negli eventuali cambiamenti da apportare a una teoria. Ad esempio, quando si è storicamente presentata la necessità di quantizzare il campo di radiazione, i metodi di quantizzazione erano stati sviluppati per la meccanica delle particelle, partendo dalla formulazione lagrangiana della meccanica classica; descrivendo il campo

elettromagnetico mediante una lagrangiana e il corrispondente principio variazionale di Hamilton, è possibile trasferire i metodi di quantizzazione delle particelle alla costruzione di una elettrodinamica quantistica.

C.3 PRINCIPI DI CONSERVAZIONE

Non sempre le equazioni del moto sono integrabili in termini di funzioni note. Spesso, però, è possibile ottenere i cosiddetti integrali primi del moto, cioè equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0, \quad (\text{C.2})$$

che esprimono proprietà importanti del sistema fisico in esame.

Consideriamo ad esempio un sistema di masse puntiformi soggette a forze derivabili da potenziali dipendenti solo dalla posizione. Si trova che la derivata della lagrangiana rispetto a \dot{x}_j è uguale alla componente della quantità di moto p_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Si può definire allora un momento generalizzato

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

detto anche momento canonico o coniugato.

Supponiamo ora che la lagrangiana non dipenda da una certa coordinata q_j (che, in tal caso, si dice ciclica o ignorabile). Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0,$$

da cui segue

$$\frac{dp_j}{dt} = 0$$

e quindi

$$p_j = \text{costante}. \quad (\text{C.4})$$

Vale quindi un teorema generale di conservazione: il momento generalizzato coniugato a una coordinata ciclica si conserva. La (C.4) è del tipo (C.2), quindi è un integrale primo del moto.

I principi di conservazione noti sono casi particolari del teorema generale relativo alle coordinate cicliche. Se ad esempio si considera una traslazione del sistema lungo una certa direzione, ad esempio relativamente alla coordinata q_j , l'energia cinetica non dipende da q_j , perché la velocità non varia per traslazioni, e se q_j è ciclica si ritrova il principio di conservazione della quantità di moto. Questo è un risultato importante: quando il sistema è invariante per una certa trasformazione, vi è una quantità conservata. I teoremi di conservazioni sono quindi legati a proprietà di simmetria del sistema.

Proposta di Udine

Per seguire la proposta, potrebbe essere utile ricordare brevemente alcuni concetti.

Polarizzazione del fotone. Si intende lo stato di polarizzazione dell'onda associata.

Birifrangenza. Esistono alcuni materiali in cui l'indice di rifrazione è diverso a seconda della direzione in cui la luce li attraversa. Per uno dei due raggi vale la legge di rifrazione ed è per questo detto ordinario. Per l'altro non vale la legge di rifrazione ed è detto straordinario. I due raggi, cioè le rispettive onde o i rispettivi fotoni, risultano polarizzati linearmente e ortogonalmente l'uno rispetto all'altro, indipendentemente dalla polarizzazione del raggio incidente.

Polaroid. È un dispositivo usato come polarizzatore, cioè per bloccare la luce a seconda del suo stato di polarizzazione.

Cristallo di calcite. È un cristallo in cui si manifesta la birifrangenza. Negli esperimenti descritti più sotto, è utilizzato in maniera tale che la luce incidente polarizzata verticalmente segue il raggio ordinario, mentre la luce incidente polarizzata orizzontalmente segue il raggio straordinario.

D.1 BASE TEORICA

La proposta didattica in esame [50, 49] parte dalla fenomenologia dell'interazione di fotoni polarizzati linearmente con cristalli birifrangenti e polaroid. La legge di Malus dell'ottica classica ci dice che

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

dove I_0 è l'intensità incidente, I l'intensità trasmessa e θ l'angolo tra la direzione di polarizzazione in ingresso e quella in uscita. Se il vettore unitario \mathbf{u} rappresenta la direzione di polarizzazione del fotone incidente e il vettore unitario \mathbf{v} la direzione di un polaroid, la probabilità che il fotone iniziale attraversi indisturbato il polaroid è data da

$$\cos^2 \theta = P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

Per ogni direzione \mathbf{v} , il comportamento del fotone incidente dipende statisticamente da \mathbf{u} , quindi si può dire che lo stato di un fotone polarizzato linearmente è descritto da un vettore bidimensionale. Il vettore \mathbf{v} , inoltre, può essere usato per rappresentare lo stato del fotone dopo il polaroid. Quindi quando si rivela il fotone si può dire che la misura ha indotto una transizione dallo stato \mathbf{u} allo stato \mathbf{v} .

Lo stato \mathbf{u} , essendo un vettore in uno spazio a due dimensioni, può essere a sua volta scritto come combinazione lineare di due vettori unitari ortogonali \mathbf{H} e \mathbf{V} :

$$\mathbf{u} = \psi_1 \mathbf{H} + \psi_2 \mathbf{V} \quad (\text{D.1})$$

dove le due componenti, che possiamo chiamare ampiezze, sono tali che

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$$

con ovvio significato statistico. I vettori \mathbf{H} e \mathbf{V} , per quanto detto, rappresentano anche due possibili stati di fotoni polarizzati linearmente, proprietà fisiche mutuamente esclusive. Si usano per l'appunto \mathbf{H} e \mathbf{V} perché possiamo fissare tali proprietà mutuamente esclusive come polarizzazione "orizzontale" e "verticale". Dunque la relazione (D.1) può essere considerata la realizzazione quantitativa del principio di sovrapposizione per stati di polarizzazione di un fotone. Per lo stato \mathbf{v} si può scrivere

$$\mathbf{v} = \psi'_1 \mathbf{H} + \psi'_2 \mathbf{V} \quad (\text{D.2})$$

e quindi

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \psi'_1 \psi_1 + \psi_2 \psi'_2.$$

Si vede quindi che lo stato di un fotone anziché da vettori può essere descritto da ampiezze.

Per generalizzare, a questo punto, gli autori introducono il concetto di ortogonalità fra stati fisici: due stati sono ortogonali se sono caratterizzati da proprietà fisiche mutuamente esclusive. Gli stati \mathbf{H} , \mathbf{V} sono un esempio di stati ortogonali: se un fotone ha la proprietà di sopravvivere a un polaroid orientato in direzione orizzontale, si può escludere che possa attraversare un polaroid orientato verticalmente.

Segue che un processo di misura può essere visto come una costruzione di stati ortogonali, poiché diversi valori della stessa osservabile corrispondono a diverse proprietà che non possono coesistere. Il formalismo della meccanica quantistica può essere ottenuto combinando insieme il concetto di ampiezza e la definizione di stati fisicamente ortogonali. Il caso si può estendere facilmente [*op. cit.*] a N dimensioni.

Gli autori si propongono poi di rendere quanto più naturale possibile il legame fra osservabile fisica e operatore lineare hermitiano. Per introdurre gli operatori lineari, suggeriscono, si può iniziare ad esempio con un oggetto del tipo $\mathbf{ab}\cdot$ (due vettori seguiti dal simbolo di prodotto scalare). Se \mathbf{c} è un altro vettore, dall'operazione $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$ risulta che, essendo $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ un numero, l'oggetto $\mathbf{ab}\cdot$ prende vettori e li trasforma in altri vettori proporzionali ad \mathbf{a} .

Dopo un'esperienza di questo tipo, si può introdurre una combinazione lineare del tipo

$$\hat{O} = \lambda_1 \mathbf{aa}\cdot + \lambda_2 \mathbf{bb}\cdot$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due vettori ortogonali unitari. L'azione di questo operatore può essere compresa vedendo come agisce su un vettore \mathbf{c} :

$$\hat{O}\mathbf{c} = \dots = \lambda_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} + \lambda_2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$$

L'interpretazione geometrica di questo risultato si trova nel fatto che l'operatore proietta \mathbf{c} lungo le direzioni ortogonali \mathbf{a} e \mathbf{b} , moltiplica tali proiezioni per λ_1 e λ_2 , le somma per produrre il vettore in uscita. Se si applica l'operatore ai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} si vede che

$$\hat{O}\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}$$

$$\hat{O}\mathbf{b} = \lambda_2 \mathbf{b}$$

Si dice che \mathbf{a} e \mathbf{b} sono autovettori dell'operatore con rispettivi autovalori λ_1 e λ_2 . Nel caso in esame, le osservabili sono le polarizzazioni dei fotoni: si può solo verificare se un fotone è polarizzato lungo un'arbitraria direzione \mathbf{v} o no. Un apparato di misura è composto da un cristallo birifrangente che separa un fascio di fotoni in una coppia di fasci secondari con polarizzazioni lungo due direzioni ortogonali v_1 e v_2 cui seguono due rivelatori di fotoni e un indice con due posizioni λ_1 e λ_2 a seconda che scatti il rivelatore 1 o 2. Quindi l'esito della misura può assumere solo due valori.

Prendendo l'operatore

$$\hat{O}_\lambda = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 \cdot + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \cdot \quad (\text{D.3})$$

si può dimostrare facilmente [*op. cit.*] che

$$\langle \lambda \rangle = u \cdot \hat{O}_\lambda u$$

quindi l'operatore \hat{O}_λ è una descrizione completa e compatta dell'apparato di misura: fornisce il valor medio e i suoi autovettori sono i possibili stati nei quali si può trovare il fotone dopo la misura.

Gli autori si chiedono a questo punto come è possibile trovare i possibili valori di un'osservabile fisica e inoltre, se tali valori sono sconosciuti, come definire i corrispondenti operatori lineari. Il problema che si pongono, cioè, è fare in modo che il concetto di operatore lineare non sia uno stratagemma introdotto a posteriori ma che risalti il suo ruolo fondamentale in meccanica quantistica. La chiave, ribadiscono, è nella (D.3) e nel fatto che i valori medi di osservabili fisiche obbediscono alla fisica classica. Quindi il ruolo fondamentale delle osservabili deriva dal fatto che rappresentano uno strumento efficiente per quantizzare un sistema, cioè per compiere il passaggio dalla meccanica classica alla meccanica quantistica.

D.2 REALIZZAZIONE DIDATTICA DELLA PROPOSTA

Si rimanda, per i dettagli tecnici, agli articoli [32, 66, 49, 47]. I prerequisiti necessari per gli studenti sono: il calcolo vettoriale nello spazio ordinario; le proprietà di polarizzazione lineare della luce; il modello corpuscolare della luce.

D.2.1 *Esperimenti con polarizzatori*

Facendo passare la luce, emessa da una sorgente ordinaria, attraverso un solo polarizzatore, si vede che tale luce è trasmessa con intensità invariata qualunque sia l'orientazione del polarizzatore. Con l'uso di due polarizzatori si vede che l'intensità della luce trasmessa dipende dall'orientazione relativa dei polarizzatori stessi, variando fra un massimo e un minimo che si ha quando le due orientazioni sono a 90° . Si possono trarre quindi le prime conclusioni:

- la luce ha una proprietà, detta polarizzazione;
- la luce emessa da sorgenti ordinarie non è polarizzata;
- un primo polarizzatore funge da filtro, selezionando un certo stato di polarizzazione, mentre un secondo polarizzatore funge da analizzatore della polarizzazione selezionata dal primo.

Ragionando in termini di fotoni singoli, se un fotone attraversa un polarizzatore orientato verticalmente, la probabilità che sia trasmesso da un secondo polarizzatore orientato anch'esso verticalmente è unitaria. Lo stesso vale se il fotone attraversa il primo polarizzatore orientato orizzontalmente e poi il secondo polarizzatore anch'esso orientato orizzontalmente. In generale un fotone che proviene da un polarizzatore con direzione θ rispetto alla verticale, sarà trasmesso da un secondo polarizzatore orientato nella stessa direzione. Si può osservare che le proprietà di polarizzazione orizzontale e verticale sono mutuamente esclusive perché un fotone polarizzato orizzontalmente è assorbito da un polarizzatore orientato verticalmente e viceversa.

Tutto ciò premesso, si rivolge l'attenzione a un fotone polarizzato a 45° che incide su un polarizzatore orientato verticalmente (o orizzontalmente), e si osserva che esso ha probabilità $1/2$ di essere trasmesso (ricordiamo che la probabilità di trasmissione è il rapporto tra intensità incidente e intensità trasmessa). A questo punto si presenta agli studenti l'ipotesi (o si portano gli studenti a formulare l'ipotesi) che per comodità chiamiamo *ipotesi A*: *un fascio di fotoni polarizzato a 45° è costituito per metà da fotoni polarizzati orizzontalmente e per metà verticalmente*. Questa prima ipotesi spiegherebbe il fenomeno descritto, ma non spiega altri fenomeni. Se ad esempio si manda un fascio polarizzato a 45° attraverso un altro polarizzatore orientato a 45° , il fascio passa indisturbato, ma se fosse costituito per metà da fotoni polarizzati verticalmente e per metà orizzontalmente, la sua intensità sarebbe dimezzata, perché dobbiamo ricordare che il fotone polarizzato orizzontalmente o verticalmente ha probabilità $1/2$ di essere trasmesso attraverso un polarizzatore a 45° . Ciò dimostra che le varie proprietà di polarizzazione sono incompatibili tra di loro e questo, secondo gli autori, illustra il principio di indeterminazione quantistico: non si possono attribuire simultaneamente a un sistema (in questo caso il fotone) proprietà che corrispondono a osservabili incompatibili.

Secondo gli autori della proposta, la fenomenologia illustrata consente di spiegare anche l'indeterminismo quantistico. Si osserva infatti che fotoni, aventi ciascuno la polarizzazione a 45° , si comportano diversamente, se interagiscono tutti con uno stesso polarizzatore orizzontale: la metà passa, la metà è assorbita. Si vede perciò che è impossibile attribuire a priori, separatamente da una misura, proprietà precise a sistemi fisici.

D.2.2 *Esperimenti con cristalli di calcite*

In un cristallo di calcite, l'intensità relativa e la polarizzazione dei fasci ordinario e straordinario dipendono dalla direzione di polarizzazione del fascio

incidente. Ad esempio, se la luce incidente è polarizzata verticalmente, per come è disposto il cristallo (vedi sopra) il fascio passa indisturbato, così pure se la luce incidente è polarizzata orizzontalmente, ma in questo caso il fascio è deviato; se invece la luce incidente è polarizzata a 45° , si ottengono il raggio ordinario e quello straordinario ciascuno con intensità dimezzata. Per quanto riguarda lo stato di polarizzazione dei due fasci, si osserva che questi sono sempre polarizzati a 90° l'uno rispetto all'altro. Per comodità si decide di chiamare verticale la polarizzazione del fascio ordinario e orizzontale quella del raggio straordinario. In un secondo esperimento si è fatto uso di due cristalli di calcite, con assi ottici antiparalleli, disposti cioè in maniera tale che il secondo compensa la deflessione del raggio straordinario generata dal primo cristallo. Se un fascio polarizzato a 45° attraversa questo dispositivo, si ottiene un unico fascio trasmesso con polarizzazione uguale a quella della luce incidente. Se fra i due cristalli se ne inserisce un terzo, che impedisce ad esempio la trasmissione del raggio straordinario, la luce trasmessa dall'altro cristallo ha la polarizzazione del raggio ordinario. Se inoltre sul primo cristallo incide un raggio polarizzato verticalmente, dal secondo cristallo emerge solo il fascio ordinario, mentre se il fascio incidente è polarizzato orizzontalmente, emerge dal secondo solo il fascio straordinario.

Ciò premesso, si vuole riflettere su ciò che accade se si manda sul primo cristallo un fascio polarizzato a 45° . Ragionando in termini di fotoni singoli, se un fotone polarizzato a 45° attraversa il primo cristallo, quale traiettoria segue? Non è possibile assegnarne una. Non può seguire infatti la traiettoria del solo raggio ordinario o straordinario perché in tal caso emergerebbe dal secondo fotone polarizzato verticalmente o orizzontalmente. Non è possibile nemmeno affermare che le segue entrambe, perché se si determina la traiettoria del fotone, si rivela un fotone o nessun fotone lungo uno dei due cammini e polarizzazione orizzontale o verticale del fascio trasmesso. Questo esperimento, secondo gli autori, mette in evidenza l'indeterminismo quantistico e la non località nei processi quantistici (alterare uno dei due fasci comporta un'influenza anche sull'altro). L'interpretazione cui si vuole che gli studenti giungano è che lo stato di polarizzazione a 45° è una sovrapposizione degli stati di polarizzazione orizzontale e verticale, e la determinazione del percorso seguito dal fotone fa rivelare il fotone stesso in uno dei due stati componenti.

Per quanto riguarda l'interazione con gli studenti, la suddetta *ipotesi A* è stata da essi scartata quasi subito. È rimasta però in piedi un'*ipotesi*, che per comodità chiamiamo *ipotesi B*, in cui un fascio polarizzato a 45° è comunque composto da due fasci con proprietà distinte. Appurato, infatti, che metà di un fascio polarizzato a 45° passa attraverso un polarizzatore verticale, gli studenti possono ipotizzare che il fascio iniziale sia compo-

sto per metà da fotoni con polarizzazione a 45° e orizzontale, e per metà da fotoni con polarizzazione a 45° e verticale. Ma se i fotoni polarizzati a 45° sono mandati su un polarizzatore a 45° , si osserva che essi sono tutti trasmessi, cosa che non accadrebbe se nell'insieme iniziale di fotoni ve ne fossero anche polarizzati orizzontalmente o verticalmente. Se inoltre si mandano i fotoni iniziali, polarizzati a 45° , verso un polarizzatore verticale e poi un altro a 45° , la successione di polarizzatori trasmette un fascio di intensità pari a un quarto dell'intensità del fascio incidente, e non metà, come risulterebbe dall'ipotesi. In particolare, infatti, almeno la metà dei fotoni polarizzati a 45° , che avrebbero, secondo l'ipotesi, anche la polarizzazione verticale (o orizzontale), non passa, contro l'ipotesi stessa. Questa *ipotesi B*, però, sembra rimanere radicata in molti studenti. Sono state proposte anche due ipotesi, in cui si suppone che il fotone nell'attraversare il polarizzatore ne sia influenzato e quindi acquisti una proprietà che prima non aveva. In particolare, in un'*ipotesi C* il fotone nell'attraversare un polarizzatore mantiene la proprietà che aveva ma ne acquista un'altra che dipende dalla direzione di trasmissione del polarizzatore; in un'*ipotesi D* il fotone acquista la nuova proprietà perdendo la precedente. Di queste due, la prima è smentita dagli esperimenti con i cristalli, che evidenziano che la scomposizione e ricombinazione dei fasci avviene senza l'intervento di polarizzatori e quindi che la sovrapposizione si può trattare senza riguardo alle modalità di interazione fotone-polaroid; la seconda è quella che avvia alla comprensione del concetto di stato quantico del fotone.

Serie di Fourier e trasformata di Fourier

Per approfondimenti su questi argomenti, cfr. ad esempio [16].

Una funzione può essere espressa come sovrapposizione di onde sinusoidali: è la serie di Fourier

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Le funzioni f che si possono così sviluppare in serie costituiscono uno spazio vettoriale: ogni f si può esprimere come combinazione lineare infinita nella base

$$\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}.$$

Introducendo il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-L}^{+L} f^*(x)g(x)dx \quad (\text{E.1})$$

si può ottenere la base ortonormale

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}. \quad (\text{E.2})$$

Non abbiamo ancora detto come deve essere la f : deve essere continua in $[-L, +L]$ con derivata prima generalmente continua e tale che $f(-L) = f(+L)$. In generale la serie potrà essere scritta come

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

dove la successione $\{c_n\}$ riunisce i coefficienti della combinazione lineare nella base scelta.

Mentre in uno spazio a dimensione finita a ogni n-pla corrisponde un vettore e viceversa, in uno spazio a dimensione infinita non possiamo essere

sicuri che a ogni successione $\{c_n\}$ corrisponda un elemento dello spazio. Se ad esempio si prende $\{c_n\} = 1$, si ottiene una serie non convergente, mentre se si prende $\{c_n\} = \frac{1}{n}$, si ottiene una serie che non converge in ogni punto, ad esempio $x = 0$. Si può pensare di porre la condizione $\sum |c_n| < +\infty$: in tal caso la serie di Fourier è totalmente convergente, quindi anche uniformemente e ha come somma una funzione continua. Ma è una condizione troppo restrittiva.

Insomma, da un punto di vista teorico (matematico) bisogna individuare un opportuno spazio di funzioni, una condizione sulla successione $\{c_n\}$ e un tipo di convergenza. Poiché con la serie di Fourier dobbiamo approssimare una funzione, occorre poter stabilire quanto due funzioni sono “vicine”. Serve quindi il concetto di distanza, che è dato dalla norma, e quindi bisogna lavorare in spazi metrici. Nel nostro caso, il prodotto scalare (E.1) consente di definire la norma

$$\|f\| = \left[\int_I |f(x)|^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{E.3})$$

Le funzioni per cui è definita tale norma si chiamano a modulo quadro integrabile. Uno spazio in cui è definita una norma si dice completo o chiuso se ogni successione di Cauchy converge a un elemento x dello spazio stesso (convergenza nel senso della norma). Lo spazio delle funzioni continue definite in un compatto I qualsiasi, se dotato della norma (E.3), non è completo, perché si possono trovare successioni di Cauchy rispetto a tale norma che convergono a funzioni discontinue.

Affinché la (E.3) definisca una vera norma, occorre però che $\|f\| = 0$ implichi $f = 0$. L'integrale (E.3) tuttavia risulta nullo anche per funzioni che sono diverse da zero in un insieme di punti di misura nulla (secondo Lebesgue). Si conviene pertanto di considerare equivalenti le funzioni che differiscono fra loro solo in un insieme finito o numerabile di punti (insieme di punti a misura nulla).

Sia I un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R} . Si indica con $L^p(I)$ l'insieme delle funzioni per cui esiste finito l'integrale

$$\int_I |f(x)|^p dx.$$

Si dimostra che $L^2(I)$ è uno spazio vettoriale, che in esso si può definire il prodotto scalare (E.1) e che è uno spazio completo rispetto alla norma

$$\|f\|^2 = \int_I |f|^2 dx.$$

Si definisce spazio di Hilbert uno spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare e che sia completo rispetto alla norma indotta da tale prodotto scalare. Quindi $L^2(I)$ è anche uno spazio di Hilbert.

Se consideriamo lo spazio $L^2(I)$ con $I = [-L, +L]$, si può dimostrare che, data una funzione $f \in L^2(I)$, la serie di Fourier corrispondente converge alla f nella norma di L^2 . L'insieme di funzioni f_n della base (E.2) si chiama sistema completo. L'importanza dello spazio di Hilbert sta anche nel fatto che in esso, anche se ha dimensione infinita, è sempre possibile trovare un sistema completo che è la generalizzazione di base ortonormale agli spazi di dimensione infinita. Se f è una funzione periodica con periodo $2T$, può essere sviluppata in serie di Fourier con frequenze discrete $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$ e quindi nello sviluppo in serie di Fourier i coefficienti rappresentano l'ampiezza del contributo di ogni componente armonica pura di frequenza ω_n .

Ma se $T \rightarrow \infty$ (cioè se la funzione non è periodica), le frequenze dello sviluppo in serie sono sempre più vicine e quindi la sommatoria tende a un integrale del tipo

$$f(t) \sim \int a(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

o, in forma complessa,

$$f(t) \sim \int g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Qui la funzione $a(\omega)$ o $g(\omega)$ rappresenta il contributo delle frequenze comprese fra ω e $\omega + d\omega$. Data una $f(t)$, la corrispondente distribuzione in frequenze $g(\omega)$ si dice trasformata di Fourier, mentre se è assegnata la $g(\omega)$ la $f(t)$ si dice antitrasformata di Fourier.

Vediamo in particolare come si può arrivare dalla serie di Fourier alla trasformata. Supponiamo di poter sviluppare una funzione in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{a} x}.$$

I coefficienti c_n possono essere trovati moltiplicando $f(x)$ per $e^{-i \frac{n\pi}{a} x}$ e integrando fra $-a$ e $+a$. Si ottiene

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-i \frac{n\pi}{a} x} dx.$$

Mettiamo

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

e

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a c_n.$$

Si ha

$$\Delta k = \frac{\pi}{a}$$

e

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(k) \Delta k$$

quindi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum F(k) e^{ikx} \Delta k$$

con

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Per $a \rightarrow \infty$ si ha $\Delta k = dk$ e quindi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ikx} dk.$$

Vediamo come tutto ciò si applica alla soluzione dell'equazione di Schrödinger per una particella libera

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk.$$

Per conoscere l'evoluzione della particella occorre conoscere lo stato iniziale. Infatti se si conosce $\Psi(x, 0)$, essendo

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk,$$

si può ricavare $\phi(k)$ e sostituire in $\Psi(x, t)$. Supponiamo ad esempio che sia

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A, & -a < x < +a \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

situazione che corrisponde alla particella lasciata libera fra $-a$ e $+a$. Con la normalizzazione si ottiene $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$ e quindi

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx = \dots = \frac{\sin ka}{k\sqrt{\pi a}}$$

quindi

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ka}{k\sqrt{\pi a}} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk.$$

L'integrale è da calcolare numericamente ma è possibile vedere alcuni casi limite. Se a è molto piccolo, la particella è ben localizzata e si ha $\sin ka \sim ka$ quindi $\phi(k)$ costante, ciò in accordo col principio di indeterminazione: se la distribuzione della posizione è piccola, la distribuzione della quantità di moto è grande. D'altra parte, poiché la $\phi(k)$ ha un massimo in $ka = 0$ e si annulla in $k = \frac{\pi}{a}$, se a è grande si avrà k piccolo e quindi un picco ristretto intorno a $k = 0$, quindi una funzione ben localizzata.

— F —

Alcuni integrali utili

L'integrale

$$\int e^{-ax^2} dx$$

può essere risolto a partire dall'integrale

$$\int e^{-ax^2} dx \int e^{-ay^2} dy,$$

da cui, chiamando in altro modo una delle due variabili, si ottiene l'integrale

$$I(a) = \int e^{-ax^2} dx \int e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy,$$

che può essere risolto in coordinate polari.

Ponendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e ricordando che $dx dy = r dr d\theta$, si ottiene

$$I(a) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} dr = \frac{\pi}{a}.$$

Risulta allora

$$\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

L'integrale del tipo

$$\int e^{-(ax^2+bx)} dx$$

può essere risolto con la sostituzione

$$y = \sqrt{a}\left[x + \frac{b}{a}\right]$$

da cui si ottiene

$$ax^2 + bx = y^2 - \frac{b^2}{4a}$$

e

$$dy = \sqrt{a}dx.$$

L'integrale dato quindi diventa

$$\int \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-(y^2 - \frac{b^2}{4a})} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \int e^{-y^2} dy = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Un'esperienza di formazione insegnanti - questionario

Si riportano, per completezza, le risposte al questionario somministrato a un gruppo di sei insegnanti di un liceo scientifico con cui ho svolto un'attività di formazione sull'insegnamento della fisica moderna. Gli insegnanti sono numerati da 1 a 6 e per ogni domanda è riportata la risposta fornita da ciascuno.

1. Hai affrontato in classe argomenti di fisica moderna?
 1. Sì, ma a livello descrittivo, solo accennando a problemi e risultati.
 2. Sì.
 3. No, perché non ho mai insegnato fisica nella classe quinta.
 4. Non in veste di moduli o unità didattiche programmate; qualche cenno, quando capita l'occasione.
 5. No, per mancanza di tempo.
 6. Assente.
2. Se sì, quali?
 1. Meccanica quantistica.
 2. Crisi fisica classica: corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton, principio di indeterminazione.
 3. Non risponde.
 4. Relatività ristretta.
 5. Non risponde.
 6. Assente.
3. Se sì, sono sorte difficoltà? Impressioni sull'esito.

1. Gli alunni non credevano ai risultati illustrati, ma alla fine sono stati tanto colpiti che molti di essi hanno inserito l'argomento nelle tesine.
 2. Non particolari difficoltà. L'argomento è però affrontato senza formule complicate, come possibile alle superiori.
 3. Non risponde.
 4. Non risponde.
 5. Non risponde.
 6. Assente.
4. È possibile, secondo te, nella scuola di oggi insegnare la fisica moderna?
1. Sì, ma adattandola agli strumenti matematici in possesso.
 2. Sì
 3. Penso di sì.
 4. No, almeno adesso, senza la preparazione di tutte le componenti.
 5. ???
 6. Assente.
5. In quale classe possono essere affrontati i seguenti strumenti matematici? Se si ritiene che non possono essere affrontati, quali potrebbero essere le motivazioni?
- a. Numeri complessi.
 1. Quarto anno.
 2. Terza.
 3. Classe quarta.
 4. Saranno affrontati nella quarta classe del nuovo ordinamento; sono stati affrontati nel corso Brocca.
 5. Cenni.
 6. Assente.
 - b. Probabilità.
 1. Già dal secondo anno, ma è meglio riprendere negli anni successivi.
 2. Quarta.

-
3. Classe quarta delle scienze umane.
 4. No.
 5. In quarta nel corso Brocca insieme al calcolo combinatorio.
 6. Assente.
- c. Spazi vettoriali.
1. Ho tentato un anno, forse in quinta, ma con scarso successo.
 2. Quarta.
 3. Classe quarta o quinta dello scientifico Brocca.
 4. No
 5. Solo nel corso Brocca con le trasformazioni affini (poca roba).
 6. Assente.
6. Fai uso del laboratorio nell'attività didattica? Se sì, indica tre argomenti per cui hai realizzato attività in laboratorio. Quale è stata la risposta degli studenti?
1. Statica dei fluidi, cinematica, elettrostatica. Gli studenti sono molto interessanti ma hanno poca possibilità di operare.
 2. Assente.
 3. La forza elastica, calcolo del volume in un solido, la distillazione.
 4. Moti, conservazione dell'energia, leggi dei gas, onde stazionarie, carica elettrica, carica e scarica dei condensatori, induzione elettromagnetica.
 5. Assente.
 6. Non sempre. Solo con classi che mostrano già a priori un certo interesse. Con quelle i risultati sono soddisfacenti.
7. Quale può essere il ruolo del laboratorio per un eventuale insegnamento della fisica moderna nella scuola e per gli studenti di oggi? Ad esempio ininfluente, solo dimostrativo, anche quantitativo, solo virtuale, ...
1. Per le mie attuali conoscenze, solo dimostrativo. Spero di imparare qualcosa che mi permetta di fare esperimenti di tipo quantitativo.
 2. Assente.
 3. Anche quantitativo.
 4. Il ruolo del laboratorio è comunque sempre positivo.

5. Assente.
6. Indispensabile. Soprattutto perché le nuove generazioni hanno una formazione multimediale con scarsa attitudine all'astrazione.
8. Ti è capitato di proporre esperienze didattiche sulla fisica moderna, anche solo a carattere dimostrativo, con le apparecchiature presenti nelle nostre scuole? Se sì, quali esperienze? Per quale occasione? Ad esempio per l'ordinaria attività didattica o per "settimane della scienza" o per attività di orientamento ...
 1. Ho fatto utilizzare il tubo catodico per mostrare la deflessione del raggio tramite un magnete. L'esperimento è stato proposto come anticipazione durante una lezione di elettrostatica.
 2. Assente.
 3. No.
 4. No.
 5. Assente.
 6. No, tranne una chiacchierata in occasione della scoperta del bosone di Higgs.
9. Le scuole in cui hai lavorato dispongono di un laboratorio con apparecchiature per la fisica moderna? Se sì, ne ricordi qualcuna?
 1. Solo tubi catodici.
 2. Assente.
 3. No.
 4. Spettro dell'idrogeno.
 5. Assente.
 6. No.
10. Hai consultato, utilizzato o semplicemente conosciuto materiale multimediale riguardante esperienze di fisica moderna? Ad esempio filmati in rete, siti, materiale fornito con i libri di testo, ...
 1. Utilizzo spesso i video di youtube per mostrare gli esperimenti sulla doppia fenditura di Young.
 2. Assente.
 3. No.
 4. No.

-
5. Assente.
 6. Sì, qualcosa per curiosità personale (teoria delle stringhe, fisica quantistica).
11. Un giudizio sulla visita in laboratorio, relativamente all'interesse personale.
1. La visita è stata molto interessante, anche se sono rimasto un po' deluso dal fatto che l'esperimento era già "confezionato" e non si potessero fare modifiche.
 2. Assente.
 3. La visita al laboratorio è stata interessante e mi ha permesso di osservare alcune apparecchiature che non conoscevo.
 4. L'interesse è elevato. La visita è stata positiva sotto tutti gli aspetti, non ultimo il confronto che c'è stato fra noi nell'interpretazione dei fenomeni osservati. Purtroppo vista la grande distanza tra la nostra sede e Cagliari, il tempo è stato esiguo.
 5. Assente.
 6. Positivo.
12. Un giudizio sulla visita in laboratorio relativamente all'utilità per l'insegnante (per i contenuti trattati, per la metodologia, ...).
1. È stato utile, a livello metodologico, vedere come l'esperimento può far presentare l'argomento partendo da un'applicazione dell'effetto quantistico (misurare lo spazio tra gli atomi di grafite).
 2. Assente.
 3. I contenuti trattati durante la visita in laboratorio potranno essere sviluppati nella classe quinta e la metodologia utilizzata può essere "uno spunto" per affrontare lo studio della fisica moderna.
 4. La visita è stata positiva anche sotto questo aspetto, tutto ciò che si osserva e si acquisisce risulta utile nell'attività di insegnamento.
 5. Assente.
 6. Interessante.
13. Un giudizio sulla visita in laboratorio relativamente a eventuali ricadute didattiche.

1. Si potrebbe pensare di acquistare l'attrezzatura presentata (o qualcosa di simile) per far vedere gli esperimenti agli alunni, in modo da rendere più concreto un argomento che risulta molto lontano dalla fisica quotidiana.
 2. Assente.
 3. Poiché l'esperienza osservata nel laboratorio non si può realizzare nei nostri laboratori (in quanto non abbiamo la strumentazione adatta), potremo organizzare una visita guidata a Cagliari.
 4. Nel futuro prossimo, quando attiveremo il modulo sulla fisica moderna, specificatamente quantistica, si potrà prendere in considerazione l'acquisto e la riproduzione degli esperimenti visti in laboratorio.
 5. Assente.
 6. Possibilità di osservare strumenti che possono essere proposti come attrezzature per il laboratorio d'Istituto; la possibilità di effettuare visite e stage per allievi particolarmente interessati.
14. Limiti delle esperienze proposte (tempo, organizzazione, tipo di materiale, montaggio, conoscenze necessarie, ...).
1. Il maggior limite per l'esperienza proposta è la non modificabilità dell'apparecchiatura per l'esperimento; questo fa sì che alcuni fenomeni si debbano impostare solo da un punto di vista teorico (tipo la formazione o meno delle frange di interferenza).
 2. Assente.
 3. Un limite notevole è stato la "non conoscenza" approfondita degli argomenti trattati
 4. La visita è stata molto breve; le premesse erano buone ma il tempo è stato troppo breve.
 5. Assente.
 6. Esperienze con finalità didattica e non di ricerca evoluta.

Una Scuola Nazionale - questionario per gli insegnanti

Si riporta, per completezza, il testo integrale del questionario somministrato agli insegnanti che hanno partecipato alla Scuola Nazionale di Fisica Moderna tenutasi presso l'Università di Udine nel mese di settembre 2014, dopo l'attività sui diversi approcci di insegnamento della meccanica quantistica. Per ogni quesito si riportano anche tutte le risposte fornite, raggruppate in categorie significative.

1. Tra i concetti fondanti affrontati nelle relazioni sulla meccanica quantistica e nei diversi approcci di insegnamento presentati, quali ti sembrano indispensabili da affrontare nell'insegnamento, quali molto importanti e perché (indipendentemente dalla difficoltà nell'insegnamento)?
 1. Non risponde
 2. Risposte relative ad aspetti che caratterizzano il comportamento quantistico
 1. Principio di sovrapposizione
 2. Carattere statistico della misura
 3. Funzione d'onda
 4. Concetto di probabilità - Probabilità di transizione - Indeterminismo
 5. Concetto di stato, di osservabile, di proprietà
 6. Dualismo onda-particella
 7. Principio di indeterminazione
 8. Mutua esclusività - Incompatibilità - Non commutatività
 9. Entanglement - Linearità
 10. Spin

3. Risposte che non rientrano nella categoria “concetti fondanti”
 1. Limiti della fisica classica e concetti che impongono l'introduzione della MQ - Cambio di paradigma culturale di riferimento – Contestualizzazione storica
 2. Esperimenti critici per l'interpretazione quantistica (radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton, spettri atomici, atomo di idrogeno)
 3. Esperimenti che evidenziano i concetti fondanti - Esperimento di Aspect – Scattering - Ottica quantistica
 4. Formalismo di base - Strumenti matematici necessari - Uso dei vettori
 5. Fotoni ed elettroni non sono onde né particelle
 6. Aspetto concettuale

2. Tenendo conto che ogni approccio comporta delle scelte, quali aspetti importanti (dal punto di vista culturale) ti sembra che, eventualmente, i vari approcci tralascino?
 1. Non risponde – Risposta non pertinente
 2. Aspetto filosofico-epistemologico (che collega le discipline in un quadro unitario) - Collegamenti tra fisica e altri ambiti disciplinari (es. umanistico-filosofico) - Visione d'insieme (agganci con elettrodinamica classica) - Aspetto storico (passaggio dalla fisica classica alla quantistica)
 3. La certezza del tempo
 4. Quantizzazione dello spazio
 5. Applicazioni alla tecnologia moderna
 6. Formalizzazione matematica - Tentativi di formalizzazione comprensibili a studenti
 7. Tentativi di spiegare fenomeni accessibili a studenti senza laboratori
 8. Correlazione tra fenomeni e formalismo
 9. Generalizzazione ad altri contesti oltre a quelli presi in esame dai diversi approcci
 10. Concetto di teoria
 11. Altra fenomenologia

-
3. Quali sono le difficoltà che ritieni si possano presentare nell'insegnamento, relativamente ai diversi approcci presentati?
1. Non risponde
 2. Dal punto di vista dei concetti e della formazione dell'insegnante
 1. Nessuna
 2. Passaggio dal quadro di riferimento deterministico a quello quantistico
 3. Preparazione degli insegnanti insufficiente
 4. Interpretazione corretta di alcuni concetti fondanti
 5. Difficoltà di stabilire un percorso coerente e lineare, di rendere accessibili concetti complessi
 6. Trovare un adeguato numero di esercizi
 7. Aspetti logici e formali non consueti
 3. Dal punto di vista degli strumenti matematici
 1. Nessuna - Difficoltà superabili, se si integrano i diversi approcci col curriculum di matematica
 2. Aspetti logici e formali non consueti - Formalismo matematico complesso (in particolare spazi vettoriali e matrici, complessità non adatta all'età degli studenti, gli strumenti matematici contenuti nella proposta di Roma)
 3. Gli strumenti matematici non sono introdotti al momento giusto - non sono coordinati con le conoscenze fisiche
 4. Dal punto di vista dell'inserimento nella programmazione e nel curriculum
 1. Nessuna (se si modificano i libri di testo - col nuovo ordinamento, almeno in linea di principio)
 2. Tempo a disposizione
 3. Continuità didattica
 4. Programmazioni di matematica e di fisica non coordinate - Programmazioni delle aree disciplinari in generale non coordinate
 5. Anticipare elettromagnetismo o integrare elettromagnetismo-meccanica - Sviluppare contemporaneamente fisica classica e meccanica quantistica
 6. Coerenza degli approcci con l'eventuale nuova prova d'esame

4. Tenendo conto delle indicazioni nazionali sull'insegnamento della fisica moderna, come ritieni che i diversi approcci rispondano alle indicazioni? Sono coerenti con esse? In cosa si discostano?
 1. Non risponde – Risposta non pertinente
 2. Non ho letto le indicazioni nazionali
 3. Sono tutti abbastanza coerenti (perché le indicazioni sono generiche e gli approcci affrontano gli argomenti in maniera molto approfondita)
 4. Gli approcci hanno un'impostazione teorica, mentre le indicazioni un'impostazione metodologica e culturale in genere
 5. Non sono coerenti perché le indicazioni propongono un approccio storico e a tratti formale-analogico
 6. Le indicazioni nazionali non prevedono il formalismo della MQ
 7. Non sono coerenti perché le indicazioni propongono un approccio culturale, non specialistico, che può essere affrontato in maniera qualitativa – Perché non è possibile semplificare i concetti come richiedono le indicazioni nazionali

5. Esplicitare i concetti fondanti delle Indicazioni Nazionali
 1. Non risponde
 2. Aspetti sperimentali e storici della meccanica quantistica e aspetti reali – Aspetti esperienziali e storici – Analisi dei problemi in una prospettiva storica – Approccio storico – Chiave storica – Conoscenze sviluppate nel XX secolo su macrocosmo e microcosmo
 3. Aspetti relativi alla teoria dei quanti
 1. Modello di quanto di luce (Planck e Einstein)
 2. Natura ondulatoria della materia e ipotesi di de Broglie – Onde pilota
 3. Effetto fotoelettrico – Fotone
 4. Effetto Compton
 5. Radiazione corpo nero
 6. Teoria dei quanti – Quantizzazione
 7. Natura probabilistica dei fenomeni quantistici
 8. Ipotesi di Planck

-
9. Evidenze sperimentali interpretabili in termini quantistici – Selezione di esperimenti fondanti – Esperienze che possono essere spiegate secondo un nuovo paradigma – Effetti ed esperimenti
 4. Aspetti relativi alla fisica atomica
 1. Teoria atomica – Modelli atomici – evidenza esistenza atomo
 2. Livelli discreti
 3. Spettri di emissione-assorbimento
 5. Organizzatori concettuali
 1. Principio di indeterminazione
 2. Dualismo onda-corpuscolo
 6. Aspetti legati alla relatività
 1. Relatività
 2. Spazio, Tempo, Massa, Energia
 3. Equivalenza massa-energia
 7. Aspetti legati ad altri ambiti della fisica
 1. Quantizzazione energetica dell'onda elettromagnetica
 2. Fisica classica
 8. Altri aspetti
 1. Nesso cultura scientifica-umanistica
 2. Dimensione tecnico-applicativa
 3. Competenze per seguire lo sviluppo scientifico
 4. Fornire strumenti e metodi per la comprensione della realtà
 5. Richiesta di un formalismo accessibile agli studenti
 6. Hai già avuto modo di insegnare la MQ nella scuola secondaria?
 1. Sì/No
 2. Se No perché?
 1. Perché non ho avuto classi in cui era previsto l'insegnamento della MQ
 2. Perché non era previsto dai precedenti programmi
 3. Perché il livello delle classi era basso - i programmi svolti non adeguati - gli studenti arrivano a stento a comprendere i concetti filosofici e comunque non sono in grado di comprendere il formalismo

3. Se Sì, quali argomenti hai trattato?
 1. Passaggio dalla fisica classica a quella moderna mediante radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton, dualismo onda-particella, atomo di Bohr
 2. Approccio storico dei libri di testo
 3. Approccio storico, da un punto di vista qualitativo - Percorso storico, con riflessioni filosofiche - Collaborazione interdisciplinare con filosofia
 4. Principio di indeterminazione
 5. Interferenza elettroni
 6. Approccio teorico, senza applicazioni (laboratoriali o informatiche)
 7. Esperienza didattica finalizzata esclusivamente ai problemi d'esame corso Brocca
 8. Analisi qualitativa equazione di Schrödinger
 9. Vari argomenti fisica moderna: effetto tunnel - Cenni laser - Fissione nucleare - Radioattività
 10. Teoria dei quanti prevista dai precedenti programmi nei corsi sperimentali
 11. Percorso presentato dal libro di Ghirardi
 12. Introduzione alla MQ basata su appunti Fabri
4. Punti di forza della tua esperienza didattica
 1. Il fatto stesso di aver trattato la fisica moderna
 2. Completamento della formazione degli studenti
 3. Gli studenti sono incuriositi dalla "nuova fisica", la MQ apre a un nuovo modo di pensare
 4. Non fare uso di strumenti matematici, approccio "semplice" e interdisciplinare, chiaro per gli studenti
5. Punti di debolezza della tua esperienza didattica
 1. Non poter disporre di attività laboratoriali specifiche
 2. Non poter disporre di esercizi
 3. Approccio solo qualitativo
 4. Dover fare uso di libri di testo che presentano solo approccio storico, non adeguato
 5. Le simulazioni non possono sostituire gli esperimenti
 6. È stato un approccio solo introduttivo

-
7. Eccessivo grado di astrazione

 7. In base alla tua formazione, alla tua esperienza professionale e a eventuali intuizioni scaturite dalla presente Scuola, hai delle proposte, richieste, idee da proporre per la didattica della meccanica quantistica?
 1. Non risponde - Ho bisogno di tempo per elaborare un percorso didattico
 2. Risposte effettivamente inerenti alla didattica
 1. Intendo fare uso dell'approccio di Udine - L'analogia tra polarizzazione e stato quantico è utile – Intendo fare uso di un approccio fenomenologico con formalismo alla Dirac
 2. Definire meglio i tempi dell'approccio di Udine
 3. Proposta basata sui sistemi a due stati con base fenomenologica data dall'esperimento delle due fenditure
 3. Risposte generiche
 1. Bisogna tener conto del contesto (preparazione degli studenti, contesto geografico e socio culturale)
 2. Formulare indicazioni nazionali più dettagliate e basate sul monitoraggio delle sperimentazioni già fatte, anche mediante prove oggettive su studenti – Aggiornare programmi
 3. Organizzare incontri annuali in cui presentare i risultati di sperimentazioni in classe - Creare una nuova rivista di ricerca didattica che raccolga le sperimentazioni in classe - Creare una comunità di studio in cui si approfondisca periodicamente un tema - Aggiornamento degli insegnanti
 4. Materiale didattico: avere un manuale per studenti fatto da esperti, magari anche con le esperienze dei docenti, creare problemi di verifica in vista di eventuali prove d'esame, aumentare la disponibilità di apparecchiature per laboratorio e di esperti di laboratorio
 5. Conservare un approccio storico almeno per gli indirizzi di studio non scientifici
 6. Impostazione più sperimentale anziché solo storica
 7. Curare i collegamenti con storia e filosofia
 8. Integrare meglio l'insegnamento della matematica e della fisica

8. Sulla base delle riflessioni fatte e sulla base delle attività fino ad ora svolte nella presente Scuola, ritieni di poter avanzare suggerimenti per la formazione degli insegnanti, relativamente alla meccanica quantistica e al suo insegnamento?

1. Non risponde – Risposta non pertinente
2. Richiesta di formazione, in varie modalità: intensificare la formazione in servizio con approfondimenti settoriali, in maniera continua e non con sporadiche attività intensive; formazione obbligatoria; autoformazione; scambi e periodi di formazione anche all'estero; corsi di aggiornamento per docenti che nel loro percorso di studi non hanno studiato la fisica moderna; corsi di base su argomenti di fisica del XX secolo; formare ad un insegnamento per problemi reali anziché per temi
3. Richiesta di valutazione e valorizzazione della professione, in varie modalità: esame periodico degli insegnanti su contenuti, didattica, comunicazione e aspetti relazionali, legato anche alla progressione di carriera; accertamento delle competenze nella conduzione del laboratorio
4. Richieste di materiale didattico e di esempi di didattica: fornire kit didattici; mostrare esempi pratici di lezioni; proporre agli insegnanti in formazione un percorso didattico identico a quello che si propone per studenti; consentire agli insegnanti in formazione di vedere esperimenti reali; coinvolgimento di insegnanti nella produzione di materiale didattico; individuare un percorso didattico condiviso a livello nazionale; selezionare un gruppo di insegnanti da formare su quel percorso che fungeranno a loro volta da formatori
5. Maggiore raccordo con l'università e la ricerca (anche per l'uso di apparecchiature)

Bibliografia

- [1] Arnold B. Arons. *Guida all'insegnamento della fisica*. Bologna: Zanichelli, 1992.
- [2] Arnold B. Arons. «Students pattern of thinking and reasoning, part one». In: *The Physics Teacher* 21 (dic. 1983), pp. 576–581.
- [3] Arnold B. Arons. «Students pattern of thinking and reasoning, part three». In: *The Physics Teacher* 22 (gen. 1984), pp. 88–93.
- [4] Arnold B. Arons. «Students pattern of thinking and reasoning, part two». In: *The Physics Teacher* 22 (gen. 1984), pp. 21–26.
- [5] Arnold B. Arons. «Thinking, reasoning and understanding in introductory physics courses». In: *The Physics Teacher* 19 (mar. 1981), pp. 166–172.
- [6] Gaston Bachelard. *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1975.
- [7] Lei Bao e Edward F. Redish. «Understanding probabilistic interpretations of physical system: A prerequisite to learning quantum physics». In: *American Journal of Physics* 70(3) 210-217 (2002).
- [8] Scuola di Barbiana. *Lettera a una professoressa*. Firenze: Libreria editrice fiorentina, 1996.
- [9] Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi. *Manuale blu di matematica - Modulo Q*. Bologna: Zanichelli, 2005.
- [10] Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi. *Manuale blu di matematica - Modulo T*. Bologna: Zanichelli, 2005.
- [11] Sergio Bolasco. *Analisi multidimensionale dei dati. Metodi, strategie e criteri di interpretazione*. Roma: Carocci, 1999.

- [12] L. Borello et al. «Il metodo della somma sui molti cammini di Feynman per l'introduzione della Meccanica Quantistica: una sperimentazione nella Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento». In: *La Fisica nella Scuola* 35 suppl. n. 2 (2002), pp. 119–124.
- [13] Jerome Bruner. *La cultura dell'educazione*. Milano: Feltrinelli, 2001.
- [14] Graziano Cavallini. *La formazione dei concetti scientifici. Senso comune, scienza, apprendimento*. Scandicci: La Nuova Italia, 1995.
- [15] Yves Chevallard. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- [16] Giampaolo Cicogna. *Metodi matematici della fisica*. Milano: Springer, 2008.
- [17] Nicola D'Amico. *Storia e storie della scuola italiana*. Bologna: Zanichelli, 2010.
- [18] Alan J. DeWeerd. «Interaction-free measurement». In: *American Journal of Physics* 70.3 (mar. 2002), pp. 272–275.
- [19] *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*. Milano: Adelphi, 2010.
- [20] Paul Adrien M. Dirac. *I principi della meccanica quantistica*. Torino: Bollati Boringhieri, 1976.
- [21] Pierre Duhem. *La teoria fisica*. Bologna: Il Mulino, 1978.
- [22] Albert Einstein. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». In: *Physical Review* 47,777-780 (1935).
- [23] Albert Einstein. «Emissione e trasformazione della luce da un punto di vista euristico». In: *Teoria dei quanti di luce*. Roma: Newton Compton, 1905.
- [24] Albert Einstein. «Sullo sviluppo dei nostri punti di vista concernenti la natura e la composizione della radiazione». In: *Le radici del dualismo onda-corpuscolo*. A cura di Sigfrido Boffi e Michele D'Anna. Napoli: Bibliopolis, 1909.
- [25] Paul K. Feyerabend. *Dialogo sul metodo*. Roma-Bari: Laterza, 2007.
- [26] Richard P. Feynman. *La legge fisica*. Torino: Bollati Boringhieri, 1971.
- [27] Richard P. Feynman. *QED*. Milano: Adelphi, 1989.
- [28] Richard P. Feynman. «The concept of probability in Quantum Mechanics». In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 31 july - 12 august 1950*. A cura di Jerzy Neyman. Berkeley: University of California Press, 1951.

-
- [29] Hans Georg Gadamer. *La ragione nell'età della scienza*. Genova: Il Melangolo, 1984.
- [30] Howard Gardner. *Educare al comprendere*. Milano: Feltrinelli, 2001.
- [31] Howard Gardner. *Sapere per comprendere*. Milano: Feltrinelli, 1999.
- [32] Giancarlo Ghirardi, Renata Grassi e Marisa Michelini. «Introduzione delle idee della fisica quantistica e il ruolo del principio di sovrapposizione lineare». In: *La fisica nella scuola XXX*(supplemento 3) 46-57 (2000).
- [33] Marco Giliberti. *Elementi per una didattica della fisica quantistica*. Milano: CUSL, 2007.
- [34] Marco Giliberti e Graziano Cavallini. «Una lezione didattico-epistemologica dalla fisica quantistica e la proposta di Milano». In: *Progetto IDIFO. Fisica moderna per la scuola. Materiali, aspetti e proposte per l'innovazione didattica e l'orientamento*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2010.
- [35] Marco Giliberti, Ludovico Lanz e Luigia Cazzaniga. «Teaching Quantum Physics to Student Teachers of S.I.L.S.I.S. - MI». In: *Quality Development in Teacher Education Training, Second International GIREP Seminar 2003, Selected Contributions*. A cura di Marisa Michelini. Udine: FORUM, 2004.
- [36] Herbert Goldstein. *Meccanica classica*. Zanichelli, 1991.
- [37] David J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley e Sons, 1987.
- [38] David J. Griffiths. *Introduzione alla meccanica quantistica*. Milano: Casa Editrice Ambrosiana, 2005.
- [39] Martin Heidegger. *Saggi e discorsi*. Milano: Mursia, 1976.
- [40] Samuel Joshua e Jean-Jacques Dupin. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France, 1993.
- [41] Thomas S. Kuhn. *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*. Einaudi, 2009.
- [42] Imre Lakatos. *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*. Milano: Feltrinelli, 1979.
- [43] Franz Mandl e Graham Shaw. *Quantum Theory*. Wiley e Sons, 1984.

- [44] Luca Marinatto. «Analisi delle proposte di impostazione didattica nel master IDIFO». In: *Progetto IDIFO. Fisica moderna per la scuola. Materiali, aspetti e proposte per l'innovazione didattica e l'orientamento*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2010.
- [45] Olli Martio. «Long term effects in learning mathematics in finland-curriculum changes and calculators». In: *The teaching of mathematics* XII(2) 51-56 (2009).
- [46] Marisa Michelini, cur. *Progetto IDIFO. Fisica moderna per la scuola. Materiali, aspetti e proposte per l'innovazione didattica e l'orientamento*. Udine: LithoStampa, 2010.
- [47] Marisa Michelini, Renzo Ragazzon e Alberto Stefanel. «Discussion of a didactic proposal on quantum mechanics with secondary school students». In: *Il Nuovo Cimento* 27 C(5) 555-567 (2004).
- [48] Marisa Michelini, Lorenzo Santi e Alberto Stefanel. «Gli insegnanti riflettono sui nodi concettuali della meccanica quantistica». In: *Progetto IDIFO. Fisica moderna per la scuola. Materiali, aspetti e proposte per l'innovazione didattica e l'orientamento*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2010.
- [49] Marisa Michelini e Alberto Stefanel. «Avvicinarsi alla teoria della meccanica quantistica». In: *Progetto IDIFO. Proposte didattiche sulla fisica moderna. Strumenti per una didattica laboratoriale*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2011.
- [50] Marisa Michelini et al. «Proposal for quantum physics in secondary school». In: *Physics Education* 35(6) 406-410 (2000).
- [51] Edgar Morin. *La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero*. Milano: Raffaello Cortina, 2000.
- [52] Fabio Olmi. «Competenze e nuclei fondanti: la grammatica dei nuovi curricoli». In: *Annali della Pubblica Istruzione* XLVI(1-2) 166-173 (2000).
- [53] Roland Omnès. *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [54] Philippe Perrenoud. *Costruire competenze a partire dalla scuola*. Roma: Anicia, 2000.
- [55] Maria Polo. «La didattica disciplinare: modello teorico e campo di indagine». In: *Giornale di astronomia, supplemento n. 3*. A cura di S. Lai e P. Calzedda. 28(1) 5-12. Pisa-Roma: I.E.P.I., 2000.

-
- [56] Karl R. Popper. *Logica della scoperta scientifica. Il carattere autocorrettivo della scienza*. Torino: Einaudi, 2010.
- [57] Ministero della Pubblica Istruzione, cur. *Studi e documenti degli annuali della pubblica istruzione* 56 (1991): *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni - Le proposte della Commissione Brocca*.
- [58] Ministero della Pubblica Istruzione, cur. *Studi e documenti degli annuali della pubblica istruzione* 61 (1992): *Appendice ai piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni*.
- [59] Ministero della Pubblica Istruzione, cur. *Studi e documenti degli annuali della pubblica istruzione* 59-60 (1992): *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni - Le proposte della Commissione Brocca*.
- [60] Richard Restak. *Il cervello modulare*. Milano: Longanesi, 1998.
- [61] Paul Ricoeur. *History and Truth*. Evanston: Northwestern University Press, 1965.
- [62] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Reading: Addison Wesley, 1994.
- [63] Mark B. Schneider e Indira A. LaPuma. «A simple experiment for discussion of quantum interference and wick-way measurement». In: *American Journal of Physics* 70.3 (mar. 2002), pp. 266–271.
- [64] Charles P. Snow. *Le due culture*. Venezia: Marsilio, 2005.
- [65] Alberto Stefanel. «Impostazioni e percorsi per l'insegnamento della meccanica quantistica nella scuola secondaria». In: *Giornale di fisica* 49(1) 15-53 (2008).
- [66] Alberto Stefanel. «Interazione di fotoni con polarizzatori e cristalli birifrangenti per l'introduzione del concetto di stato quantico». In: *La fisica nella scuola XXXIV*(supplemento 1) 88-100 (2001).
- [67] Daniel F. Styer et al. «Nine formulations of quantum mechanics». In: *American Journal of Physics* 70(3) 288-297 (2002).
- [68] Silvano Tagliagambe. *Più colta e meno gentile. Una scuola di massa e di qualità*. Roma: Armando, 2006.
- [69] Carlo Tarsitani. «L'insegnamento della fisica quantistica: cosa si intende per "prospettiva storica"». In: *Progetto IDIFO. Fisica moderna per la scuola. Materiali, aspetti e proposte per l'innovazione didattica e l'orientamento*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2010.

BIBLIOGRAFIA

- [70] Carlo Tarsitani. «Una proposta per l'insegnamento della fisica quantistica». In: *Formazione a distanza degli insegnanti all'innovazione didattica in fisica moderna e orientamento*. A cura di Marisa Michelini. Udine: LithoStampa, 2010.
- [71] John S. Townsend. *A modern approach to quantum mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1992.
- [72] Carl Friedrich von Weizsäcker. «Probability and Quantum Mechanics». In: *British Journal for the Philosophy of Science* 24, 321-337 (1973).

Ringraziamenti

Questa tesi di dottorato è il risultato di un lavoro di ricerca interdisciplinare: poiché ho avuto bisogno di consultare diversi esperti, voglio qui ringraziare le persone che hanno prestato la loro opera e con cui ho avuto il piacere di collaborare.

Un ringraziamento anzitutto al direttore del Dipartimento di Fisica dell'Università di Cagliari, prof. Luciano Colombo, che mi ha consentito di utilizzare le risorse della struttura da lui coordinata. In particolare ringrazio il prof. Gianluca Usai, che ha reso per me possibile lo svolgimento delle esperienze di laboratorio descritte in questa tesi e delle relative attività con gli insegnanti. Ringrazio poi il prof. Alberto Devoto, per la consulenza sui fondamenti della meccanica quantistica, e il prof. Giuseppe Mezzorani, per le proficue conversazioni sulla storia della fisica moderna e sugli aspetti filosofici e epistemologici della meccanica quantistica.

Un punto di riferimento insostituibile per le riflessioni sulla didattica delle scienze è stata la prof.ssa Maria Polo del Dipartimento di Matematica dell'Università di Cagliari: a lei un ringraziamento particolare perché ha sempre trovato il tempo e le parole adatte per dare il suo aiuto.

Vivi ringraziamenti al Gruppo di Ricerca in Didattica della Fisica dell'Università di Udine (prof.ssa Marisa Micheli, prof. Alberto Stefanel, prof. Lorenzo Santi e tutti i loro collaboratori), per avermi fornito l'opportunità di collaborare con loro e di acquisire esperienza nella ricerca didattica.

Per consulenza sull'analisi e sull'interpretazione dei dati statistici mi sono rivolto alla dott.ssa Mirian Agus, del Dipartimento di Pedagogia, Psicologia e Filosofia dell'Università di Cagliari: la ringrazio per l'indispensabile supporto e per il tempo che mi ha dedicato.

Ringrazio il sig. Sergio Matta del Settore Post Lauream e la Segreteria Studenti della Facoltà di Scienze (strutture afferenti alla Direzione per la Didattica e l'Orientamento dell'Università di Cagliari) per avermi messo a disposizione i dati statistici che sono stati in parte oggetto di questo lavoro.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio la prof.ssa Gavina Cappai, Dirigente del Liceo Scientifico, Classico e delle Scienze Umane “Galileo Galilei” di Macomer, per aver consentito e incoraggiato questa mia esperienza di studio e ricerca, che mi ha permesso di maturare un punto di vista scientifico sull’insegnamento delle scienze. Ringrazio inoltre tutti gli insegnanti, che purtroppo non posso nominare, che si sono prestati a condividere con me le mie attività di ricerca.

Infine un ringraziamento alla prof.ssa Giovanna Puddu, che ha sempre seguito questo lavoro con entusiasmo, in un continuo intersecarsi di interessi comuni, di esperienza umana e di insegnamento e di stimoli di ricerca.