Università degli Studi di Cagliari

Dipartimento di Matematica e Informatica
Dottorato di Ricerca in Matematica e Calcolo scientifico
Ciclo XXVIII

Ph.D. Thesis

I movimenti rigidi da Euler al Programma di Erlangen

S.S.D. MAT/04

Candidate
Francesco Maria Atzeni

Supervisor
Prof. Maria Polo

PhD Coordinator
Prof. Giuseppe Rodriguez

Esame finale per l'anno accademico 2014/2015
17 Marzo 2016

Sommario

This dissertation about the history of geometrical transformation focuses on the roots of the concept of *isometry*. This study examines the concept of *rigid motion* and gives a first historical account of its evolution during the period going from the *Introduction in analysin infinitorum* by Euler (1748) to the *Erlangen Programm* by Klein (1872). In the second and third part of this dissertation works by Euler (1707-1783), Chasles (1793 - 1880), Jordan (1838-1922) and Klein (1849 - 1925) dealing with rigid motions are studied. The study reveales a long standing connection between *rigid motion* and kinematics and the absence of the concept of reflection as transformation. Particular attention is devoted to Jordan's revolutionary memoir *Mémoire sur le groupes de mouvements* (1868) in which groups of rigid motion are introduced and applied to crystallography.

Prefazione

Il presente lavoro si divide in due parti. La prima è volta introdurre la storia delle trasformazioni geometriche. La seconda parte, invece, è il risultato del lavoro di ricerca condotto per la ricostruzione storica della genesi delle isometrie dirette. Il periodo preso in considerazione per la ricostruzione storica copre circa centotrenta anni e va dall'*Introduction in analysin infinitorum* di Euler (1748) al *Programma di Erlangen* di Felix Klein (1872).

Come potremo vedere, i movimenti rigidi del piano e dello spazio, cioè le isometrie dirette, emergono, come trasformazioni, più tardi nella storia rispetto alle trasformazioni proiettive e con un ruolo diverso. Le trasformazioni geometriche sono uno degli strumenti più importanti della geometria, la loro storia è stata delineata da Jean-Claude Thienard nella serie *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique* composta da sette articoli.

Thienard individua nelle opere di Girard Desargues (1591-1661) la genesi del concetto moderno di trasformazione geometrica e prosegue basandosi ampiamente sulla ricostruzione storica offerta da Chasles nel suo *Aperçu historique sur l'origine et le dévéloppement des méthodes en Géométrie.* Thienard focalizza la sua attenzione sullo sviluppo delle trasformazioni nell'indirizzo 'sintetico' della geometria. Il problema del movimento in geometria è considerato da Thienard un apporto esterno alla nozione di trasformazione; esterno sia perché estraneo alla geometria proiettiva, sia perché l'interesse per il suo studio è legato a tematiche esterne alla geometria e, talvolta, esterne alla matematica.
Nel presente lavoro, che si concentra sulle isometrie, lo studio geometrico del movimento è uno dei temi centrali.

Saranno analizzati nel dettaglio alcuni lavori di cinematica dello stesso Chasles, inoltre non sarà trascurato l'indirizzo analitico che verrà indagato attraverso alcuni lavori di Euler (1707-1783). Infine viene presa in considerazione l'opera rivoluzionaria di Camille Jordan (1838-1922) *Mémoire sur le groupes des mouvements* (1868). In conclusione alla ricostruzione storica presentata si analizzano alcuni aspetti del celebre *Programma di Erlangen* di Felix Klein, scritto che ha influenzato largamente l'epistemologia attuale delle trasformazioni geometriche.

Lo studio delle isometrie presenta una notevole differenza rispetto a quello delle altre trasformazioni proiettive: esse sono il risultato della generalizzazione dei movimenti rigidi e delle riflessioni. I movimenti rigidi nascono dallo studio geometrico del moto di un corpo o di una figura come trasformazioni geometriche e solo nella seconda metà dell'Ottocento sono stati considerati come trasformazioni geometriche. Il loro sviluppo è fortemente legato sia all'insegnamento che alle prime ricerche sui fondamenti empirico-percettivi della geometria euclidea e non-euclidea. Le isometrie indirette, invece, si sono sviluppate più tardi nell'ambito della cristallografia matematica[1] come evoluzione dalla relazione di equivalenza per i poliedri, detta *simmetria*, introdotta da Legendre (1752-1833) nei suoi *Éléments de géométrie.*

Il presente lavoro, orientato verso la ricerca delle radici del concetto, si occupa prevalentemente delle isometrie dirette.

[1]Chasles nel 1860 riconduceva le configurazioni simmetriche piane a movimenti rigidi dello spazio. Nel *Programma di Erlangen* Klein considera solo i movimenti diretti, così come Hilbert nel celebre articolo "Ueber die Grundlagen der Geometrie", *Math. Annales* (1902) nel quale dà un sistema assiomatico della geometria del piano che ha i movimenti rigidi come ente indefinito. Fu Arthur Schönflies (1853-1928) a dare la prima classificazione dei gruppi di simmetria del piano e dello spazio che considera sia isometrie dirette che indirette; i suoi lavori sono raccolti nel volume *Krystallsysteme und Krystallstructur* (1891).

Ringraziamenti.

Ringrazio Dalia Deias per avermi procurato alcuni materiali su Camille Jordan conservati negli archivi dell'*Académie des Science*, Tiziana Carboni per la revisione delle traduzioni latine. I miei ringraziamenti vanno sopratutto alla prof.ssa Maria Polo, *supervisor*, e al dott. Roberto Scoth per avermi pazientemente indirizzato durante i tre anni di dottorato.

Indice

Parte I

Introduzione storica alle trasformazioni.

Capitolo 1

L'approccio sintetico alle trasformazioni.

L'introduzione storica si basa sui lavori di Jean-Claude Thienard [Thienard 1994], [Thienard 1995a], [Thienard 1995b],[Thienard 1997], [Thienard 1998a], [Thienard 1998b].

1.1 Desargues

Il primo autore a cui si può attribuire un uso pieno del concetto di trasformazione geometrica è Girard Desargues (1591 – 1661), universalmente riconosciuto come padre della geometria proiettiva. Thienard evidenzia come, a differenza delle opere precedenti, nel *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cône avec un Plan* (1639) di Desargues compaiono non solo alcune trasformazioni geometriche – proiezioni centrali e cilindriche - ma anche delle proprietà invarianti e il trasporto di queste proprietà lungo le trasformazioni. Come ci si può aspettare nelle opere di Desargues non viene data una definizione generale di trasformazione né di proprietà invariante ma sono introdotte e usate le corrispondenze tra i punti del piano originale e i punti del piano del quadro date dalle proiezioni centrali o cilindriche; corrispondenze tra punti in cui noi oggi riconosciamo delle particolari trasformazioni geometriche.

Gli scritti di Desargues, a differenza di quelli di geometria e prospettiva pratica, seguono la tradizione del metodo assiomatico: procede ponendo delle definizioni iniziali e dimostrando lemmi e teoremi senza esplicitare commenti o riflessioni. Le trasformazioni sono lo strumento che Desargues usa per lo studio delle coniche, uno dei principali oggetti di studio della matematica della prima età moderna. L'uso delle proiezioni è accompagnato dall'audace ampliamento del piano con i punti all'infinito che consente a Desargues di trattare in modo indifferente coni e cilindri, fasci di rette paralleli e fasci di rette convergenti.

Una volta introdotta la prospettiva nella geometria, la definizione delle coniche come sezione di un cono si traduce nel fatto che le coniche sono diverse proiezioni di una circonferenza. Desargues è in grado di trasportare tramite la proiezione quelle proprietà invarianti per proiezione già dimostrate per la circonferenza. La nuova modalità dimostrativa consente il sorpasso della tradizionale divisione delle coniche nelle tre famiglie parabole, ellissi e iperbole per le quali venivano date di una stessa proprietà tre dimostrazioni differenti.

Le innovazioni introdotte da Desargues furono accolte e coltivate da pochi studiosi: Blaise Pascal (1623 – 1662), Philippe De la Hire (1677 – 1719) e più tardi Jacques-François Le Poivre (1652 – 1710).

La recezione problematica della prima geometria proiettiva è probabilmente dovuta anche al fatto che il *Brouillon projet* di Desargues e il perduto *Traité des Coniques* di Pascal non furono ristampati e uscirono dalla circolazione rendendo necessario per i pochi interessati la redazione di copie manoscritte. Nonostante ciò, nella prima metà dell'Ottocento i geometri francesi come Poncelet, pur non avendo a disposizione copie del *Brouillon projet* che era ritenuto perduto, individuano in Desargues il fondatore della geometria proiettiva. Scrive L. Cremona (1830 — 1903). nella recensione della edizione ottocentesca delle *Oeuvres de Desargues* :

> "Ei pare che gli scritti di Desargues consistessero quasi tutti in semplici memorie, esponenti idee nuove sulla scienza, e stampate in un solo foglio, senza nome di stampatore. Ed è a credersi che non siano mai stati messi in vendita e che l'autore li distribuisse ai suoi amici. Perciò essi divennero subitamente sì rari che indi a poco e sino ad oggi furono riguardati come perduti. Malgrado la menzione che ne è fatta nelle lettere di Descartes, nelle opere di Bosse (amico e discepolo di Desargues) ed altrove, il nome stesso dell'autore era pressoché dimenticato, quando il generale Poncelet ne risuscitò la memoria, designandolo come il Monge del XVII. Anche il signor Chasles, nel suo *Aperçu historique*, assegnò a Desargues il posto glorioso che gli spetta."
>
> [Cremona 1864 p. 115]

Con l'opera di Desargues si ha l'introduzione nella geometria della scoperta della prospettiva, mentre i suoi successori come De la Hire e Le Poivre integrano nel contesto geometrico esplicitato da Desargues metodi e tecniche di disegno e di tracciamento delle curve elaborati nell'ambito degli studi sulla prospettiva. L'opera di De la Hire è, come quella di Desargues, a cavallo tra matematica e architettura.

Isaac Newton (1642 – 1727) utilizza le trasformazioni geometriche nei suoi *Principia*[1] nell'ambito di costruzioni e non in quello del trasporto di proprietà. Newton cita esplicitamente De la Hire[2] mostrando di conoscerne le opere ma non riprende la nuova modalità di dimostrazione introdotta da Desargues.

[1] Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londini, Jussu *Societate Regiae* ac Typis *Josephi Streater* (1687).

[2] Cfr. [Newton 1687] libro 1, sez. 4.

1.2 Poncelet e Möbius.

Nelle opere di Gaspard Monge (1746 – 1818) compaiono diverse trasformazioni geometriche ma queste non sono oggetto di uno studio sistematico e le loro proprietà non sono studiate se non in relazione alla loro applicabilità ai problemi da risolvere.

L'influenza di Monge è comunque grande, il suo punto di vista viene ulteriormente sviluppato dai suoi allievi formatisi nelle nuove istituzioni nate dalla rivoluzione francese.

Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867), con il suo *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), è tra i primi geometri ad occuparsi della *geometria moderna*, cioè dello studio sintetico delle proprietà proiettive e metriche che andava sviluppandosi nella prima metà dell'Ottocento.

La prima edizione del trattato di Poncelet è suddivisa in quattro sezioni dedicate alla geometria piana e un supplemento dedicato alla geometria dello spazio. Nella prima sezione viene sin da subito introdotta la proiezione centrale, che viene definita sia dal punto di vista globale che dal punto di vista puntuale, inoltre viene data una definizione generale delle proprietà invarianti per proiezione. L'autore fornisce un quadro delle proprietà proiettive più comuni: sono comprese tutte le proprietà di posizione e solo alcune proprietà definite facendo appello alla misura tra cui il birapporto[3] già introdotto da Brianchon e la cui invarianza per proiezione risulta dal teorema di Pappo. Inoltre l'autore enuncia dei criteri utili a stabilire se una proprietà sia proiettiva o meno anche se questi criteri non riguardano le proprietà definite usando distanze e misure.

Le proprietà proiettive sono impiegate per una esposizione metodica dei fasci di rette e delle coniche che costituisce la seconda e la terza sezione: le configurazioni più complesse sono ottenute mediante proiezione di configurazioni più semplici e le proprietà sono stabilite mediante il trasporto. Punti e rette all'infinito insieme a punti e rette immaginari introdotti grazie al controverso principio di continuità compaiono in note e osservazioni lungo tutto il trattato. Non compare una definizione esplicita di punto o retta all'infinito, ma viene più volte ricordato che le rette e i punti all'infinito sono "nécessairement indéterminée de situation", inoltre dall'ammissione del principio di continuità risulta che "tous les points à l'infini d'un plan puissent être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan" [Poncelet 1822 p. 50]. Tale affermazione è qualificata da Poncelet come "méthaphysique" e trova giustificazione nel principio di continuità.

La seconda edizione pubblicata nel 1865 è divisa in due volumi; per l'autore il primo volume è una ristampa della prima edizione con alcune note aggiunte alla fine del volume [Poncelet 1865 p. IX], mentre il secondo volume contenente la teoria dei centri armonici e la dualità "réciprocité polaire", è costituito dalle due memorie presentate all'Académie nel 1824 e pubblicate nel giornale di Crelle rispettivamente

[3] *Rapport anharmonique* nella nomenclatura francese.

nel 1828[4] e 1829[5].

Nel trattato molte proposizioni già note sulle coniche e sulle quadriche trovano così un nuovo ordine e una sistematizzazione.

Poncelet si prefisse lo scopo di dare alla geometria sintetica dei metodi generali analoghi alle procedure algoritmiche della geometria analitica e del calcolo differenziale, metodi utili sia alla dimostrazione che alla scoperta: "agrandir les ressources de la simple Géométrie, en généralser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la Géométrie analytique, et sur-tout d'offrir les moyens généraux et propres a faire découvrir" [Poncelet 1822 p. xxxiii]. Questi metodi avrebbero dovuto mettere in grado la geometria sintetica di rivaleggiare con la geometria analitica e l'applicazione del calcolo infinitesimale alla geometria.

Da una parte i cardini importanti del Traité di Poncelet non sono dei contributi originali (punti all'infinito, punti immaginari e principio delle relazioni contingenti, omologia[6]), dall'altra si ha una sintesi e una sistematizzazione originali. Poncelet riesce a dare a queste creazioni lo status di un metodo generale, che serva sia alla ricerca che alla dimostrazione. Il confronto metodologico tra geometria sintetica e geometria analitica è forte e, dirà Chasles nell'introduzione all'*Aperçu historique*: "des ressources puissantes que la géométrie a acquise depuis une trentaine d'années [et qui] sont comparables sous plusieurs rapports aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais sans désavantage dans un ordre très étendu de questions" [Chasles 1827 p. 2].

1.2.1 I contributi di Chasles e Steiner.

Il *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (1832) di Jakob Steiner (1796 – 1863) è una delle opere più importanti per lo sviluppo della geometria proiettiva sintetica.

Il trattato di Steiner rimase incompiuto rispetto al progetto iniziale che compare nella prefazione, tuttavia le costruzioni geometriche contenute nella prima e unica parte sono un grande contributo alla geometria proiettiva. Il libro inizia con l'introduzione delle *forme fondamentali* (rette, fasci piani di rette, fasci di piani, i piani, i fasci di raggi nello spazio) e dei rapporti tra di esse, in particolare le corrispondenze geometriche tra le forme di diverse specie. Le corrispondenze tra le forme fondamentali fanno emergere sin da subito la dualità che, come dice Steiner nell'introduzione

[4]Jean-Victor Poncelet, "Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques; pour faire suite au Traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **3** (1828): 213 - 272.

[5]Jean-Victor Poncelet, "Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au 'Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques' ", **4** (1829): pp. 1-71.

[6]Gli elementi all'infinito erano già stati introdotti da Desargues, il principio delle relazioni contingenti e dunque gli elementi immaginari erano stati usati in casi particolari da Monge, per quanto riguarda l'omologia essa è analoga alle trasformazioni introdotte da De la Hire e Le Poivre nel loro metodo dei piani equivalenti. Il *birapporto* tra quattro punti era già stato usato da Brianchon.

al trattato, “[...] ressort aussitôt des figures de base, tandis que la dite théorie n’apparait qu’en suite, comme résultat de relations données entre les figures.” Steiner citato in [Thienard 1997 p. 17]. Il libro si sarebbe dovuto dividere in cinque parti dedicate rispettivamente a:

1. le rette proiettive, i fasci di rette e i fasci di piani;
2. i piani proiettivi e i fasci di rette nello spazio;
3. gli spazi proiettivi;
4. sistemi e reti di correlazione;
5. studio completo e approfondito delle curve e delle superfici di secondo grado, mediante la loro costruzione e facendo ricorso alle sole proprietà proiettive.

Fu data alle stampe la sola prima parte del trattato, quella relativa alle rette proiettive, i fasci di rette e i fasci di piani. Il terzo capitolo della prima parte tratta la generazione delle curve e delle superfici rigate mediante le figure proiettive. Per evidenziarne l’importanza si richiama quanto detto da Arthur Schönflies (1853 – 1928) nell’articolo sulla geometria proiettiva nell’Enciclopedia di Klein e riportato da Thienard:

> “La découverte par J. Steiner des méthodes projectives de la génération des figures géométriques marque une date capitale dans le développement de la géométrie projective. Vulgarisées presque aussitôt, grâce aux travaux de M. Chasles, qui ne connaissait qu’incomplètement ceux de J. Steiner, ces méthodes prirent immédiatement une place préponderante dans les recherches géométriques.
>
> [. . .]
>
> J. Steiner a été conduit à la génération d’une conique par deux faisceaux homographiques en partent de la propriété évidente du cercle d’être engendré à l’aide de deux faisceaux égaux de rayons et en l’étendent aux coniques par une projection centrale; il arrive d la même manière à la génération par deux ponctuelles homographiques. De là il passe ensuite à la génération des cônes du second degré par des faisceaux homographiques de plans dont les axes se rencontrent, à celle des quadriques réglées par deux faisceaux homographiques des plans ou par deux ponctuelles homographiques dont les axes ou bases ne sont pas dans un même plan.”
>
> Schönflies citato in [Thienard 1997 p. 18]

Altri contributi importanti alla geometria proiettiva sintetica furono dati da Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867) con la sua opera principale *Geometrie der Lage* (1847) e nelle tre edizioni dei ‘complementi’ *Beitrage zur Geometrie der Lage*

(1856, 1857, 1860). Von Staudt si propone di elaborare una fondazione della geometria proiettiva dalla quale siano escluse tutte le relazioni metriche e, in particolare, di dare costruzioni geometriche che fondassero il rapporto anarmonico senza ricorrere alle distanze. Le costruzioni di von Staudt segnano il momento in cui si erige la geometria proiettiva sintetica come teoria indipendente dalla geometria metrica. Un analogo risultato per la geometria proiettiva analitica si avrà solo grazie agli studi di A. Cayley sulle metriche proiettive, di cui la metrica euclidea non è che un caso particolare.

Uno dei promotori dei nuovi metodi e concetti fu Michel Chasles (1793 – 1880):

> "Michel Chasles s'est fait très tôt en France, le propagandiste de ces méthodes et concepts, de leur fécondité, de leur facilité d'application, 'des ressources puissantes que la géométrie a acquise depuis une trentaine d'années (et qui) sont comparables sous plusieurs rapports, aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais sans désavantage, dans un ordre très étandue de questions' "
>
> [Thienard 1997 p.19]

I mezzi per la propaganda furono dapprima l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie particulierement a celles qui se rapportent a la géométrie moderne*[7] [Chasles 1837] e, a partire dal 1846, l'insegnamento di *géométrie supérieure* all'Università di Parigi.

Secondo Thienard Chasles innova la geometria moderna sia con l'introduzione di nuove problematiche e la loro risoluzione, talvolta solo parziale, che con l'applicazione dei nuovi metodi alle coniche e alle superfici di secondo grado. Ad esempio Chasles rivolse la sua attenzione al problema della determinazione della trasformazione più generale, del piano o dello spazio, che conserva il birapporto e l'allineamento di quattro punti. Ancora rivolse, inoltre, la sua attenzione al problema della determinazione della trasformazione più generale che rende conto del principio di dualità, cioè la trasformazione più generale che consente di trasformare una figura nella sua correlativa.

Per quanto riguarda l'aspetto della diffusione dell'applicazione dei nuovi metodi alle curve e alle superfici è importante l'insegnamento di *Géométrie supérieure* dell'università di Parigi. La nuova cattedra dedicata alla geometria pura fu istituita nel 1846 grazie all'intervento di Louis Poinsot (1777-1859) allora membro del *Conseil royale de l'instruction publique* su modello della cattedra di *Algèbre supérieure* che esisteva dal 1808, [Chasles 1870 p. 219]. La cattedra fu affidata a Chasles che la resse dal 1846 sino alla sua morte nel 1880. Frutto dell'attività di insegnamento

[7] Questa lunga memoria di Chasles (571 pagine) fu pubblicata nel 1837 dall'accademia di Bruxelles come introduzione alla *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie*, memoria che vinse un premio nel 1829 e che su richiesta di Chasles non venne pubblicata lo stesso anno per permettergli di redigere una introduzione. Tra le note della ricostruzione storica fatta da Chasles si trovano molti risultati originali.

universitario sono il *Traité de Géométrie supérieure* del 1852 e il *Traité des sections coniques* del 1865.

Il *Traité de Géométrie supérieure* si divide in quattro sezioni:

1. Prima sezione, contenente i principi fondamentali e la teoria del rapporto anarmonico, la divisione omografica e l'involuzione;

2. Seconda sezione, dedicata alle proprietà delle figure rettilinee e alla applicazione dei teoremi sul rapporto anarmonico, sulla divisione omografica e sull'involuzione;

3. Nella terza sezione sono introdotti i sistemi di coordinate per la determinazione dei punti e delle rette. Sono trattate le figure omografiche e i metodi di deformazione delle figure, le figure correlative e i metodi generali di trasformazione delle figure in altre di genere differente;

4. La quarta sezione è dedicata alle circonferenze.

Nel *Traité* Chasles propone un punto di vista differente sui rapporti tra la teoria dell'omografia e la teoria della dualità rispetto a quanto sostenuto nella memoria *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie.* Infatti nella memoria la teoria dell'omografia è subordinata a quella della dualità e quest'ultima è introdotta mediante la geometria analitica. Nel *Traité*, invece, le due teorie sono entrambe fondate sulla geometria pura e presentate in maniera indipendente l'una dall'altra [Thienard 1997].

Secondo Thienard con l'opera di Chasles e di Steiner si raggiunge il compimento di un "movimento di pensiero" iniziato con Desargues e che consiste nella ricerca e dimostrazione di nuove proprietà mediante trasporto della proprietà lungo trasformazioni, dalle configurazioni più semplici alle più complesse. Quindi si stabiliscono le proprietà invarianti da trasportare nelle configurazioni più semplici che verranno ereditate dalle configurazioni trasformate. I due autori non sono usciti dal quadro concettuale della trasformazione di una figura in un'altra. Infatti si sono essenzialmente basati sulle omografie e sulle risorse fornite dal passaggio da una figura alla sua correlativa. Particolare importanza rivestono la possibilità di trovare una omografia che riduca una conica in una circonferenza, la possibilità di trovare una omografia che trasformi rette concorrenti in rette parallele, la possibilità di trasformare una retta in una retta all'infinito sempre mediante una omografia.

Si può parlare appieno di compimento in quanto, pur non uscendo mai dal quadro iniziale dato dalla trasformazione di figure in altre figure, i due autori sono riusciti a convincere dell'efficacia e interesse dei nuovi metodi. Una efficacia che si misura con la scoperta di nuovi risultati e la dimostrazione elegante di fatti già noti; con il potere unificante del concetto di trasformazione che consente di "féderer savoirs épars" e di sistematizzarli e con la messa in evidenza del principio di dualità.

A differenza di quanto ravvisato nell'opera di Monge, l'attenzione dei due autori è rivolta esclusivamente a problemi geometrici. Secondo Thienard questo è un tratto distintivo dell'opera di Steiner e Chasles che li separa da autori che operano nel primo ventennio successivo alla pubblicazione del *Traité* di Chasles, quando le trasformazioni non sono solo uno strumento dell'indagine geometrica ma anche lo strumento adatto a compiere altre indagini. Tale cesura, se da una parte non è netta[8], dall'altra si rivela utile a caratterizzare gli sviluppi successivi che Thienard prende in considerazione tra gli apporti esterni alla geometria. Infatti le trasformazioni diventano uno strumento nella riflessione sui fondamenti della geometria, sul ruolo da attribuire alla geometria nella teoria della percezione della seconda metà dell'Ottocento e, dunque, sulla presentazione assiomatica più adatta per gli elementi di geometria. Un ambito a parte è quello del programma di Erlangen dove i gruppi di trasformazioni sono il mezzo per definire la geometria e il suo oggetto di studio in modo da ridare unità alle diverse branche che si erano andate a formare nella seconda metà dell'Ottocento.

1.2.2 Il problema del moto.

Uno degli apporti che nella seconda metà dell'Ottocento convergono con le trasformazioni proiettive nel concetto di trasformazione geometrica è quello di moto di una figura geometrica. Thienard dedica al problema del moto in geometria il quinto articolo e il sesto articolo della sua serie sulle trasformazioni geometriche rispettivamente [Thienard 1995b] e [Thienard 1998a].

Il sesto articolo di Thienard [Thienars 1998a] è dedicato agli 'apporti esterni' al concetto di trasformazione nella seconda metà dell'Ottocento, cioè agli sviluppi dell'idea del movimento delle figure in ambiti diversi dalla geometria proiettiva, sviluppi che contribuiranno all'affermazione delle trasformazioni geometriche. Gli apporti esterni provengono dallo sviluppo delle geometrie non euclidee, dalla meccanica e dalle riflessioni sulla fondazione della geometria sul concetto di movimento iniziate da Hermann von Helmholtz(1821 – 1894) e Georg Friederich Bernhard Riemann (1826 – 1866).

Lo sviluppo della geometria iperbolica avvenne in un primo tempo solo su base assiomatica, la sua validità, prima, e la sua utilità, poi, furono fortemente contestate. Uno dei motivi era lo scollamento con la realtà che, si sosteneva, segue la geometria euclidea. Proprio nell'ambito di tale dibattito la possibilità di fondare la geometria euclidea sulla base dei movimenti rigidi delle figure acquistò una grande importanza. Helmholtz, di formazione fisiologo, guidato dall'interesse per gli aspetti percettivi pubblicò nel 1868 la memoria *Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*[9] [Helmholtz 1866] contenente una analisi concettuale dell'idea di spazio nella quale sviluppava una fondazione della geometria euclidea basata sul movimento delle figure geometriche.

[8] Ad esempio l'*Aperçu historique* di Chasles, citato da Thienard come esempio di riflessione sugli assiomi e sui fondamenti, è precedente al *Traité de géométrie supérieure*.

[9] *Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sui fatti che stanno alla base della geometria).

Helmholtz sostiene che la geometria non sia possibile se non si possono comparare le figure tra loro e misurarle; a sua volta ciò non è possibile se non accade che alcune proprietà delle figure da misurare rimangano invariate quando le figure subiscono un movimento rigido. Ciò porta Helmholtz a formulare alcune problematiche generali:

- trovare la varietà più generale nella quale un corpo rigido o un sistema di punti possa essere spostato relativamente ad un altro senza alterare la forma o, nel secondo caso, le distanze tra i punti del sistema;

- fondare la geometria su un sistema assiomatico che abbia come ente di base i movimenti delle figure e che, quindi, chiarisca il nostro concetto empirico di misura delle figure.

Quest'ultima problematica è nota come problema dello spazio di Helmholtz.

La validità del sistema di assiomi, secondo Helmholtz, non dipende da una forma a priori dello spazio ma sarebbe verificabile con esperimenti sui corpi rigidi. La conclusione di Helmholtz era che l'unica geometria possibile era quella euclidea e che il senso dello spazio non era a priori, come aveva sostenuto Kant, ma potesse essere costruito a partire dal senso della vista proprio grazie alla percezione dei movimenti.

Quasi contemporaneamente alle ricerche di Helmholtz iniziò a diffondersi la dissertazione magistrale di Riemann *Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen*[10] che venne pubblicata postuma e conteneva una prima idea di quello che oggi sono le varietà riemanniane. Tra gli esempi Riemann incluse superfici a curvatura positiva e negativa indicando la strada per una fondazione analitica della geometria non-euclidea. Le idee di Riemann convinsero Eugenio Beltrami (1835 – 1900) a pubblicare il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* nel 1868 al quale accompagnò la costruzione di modelli materiali di superfici iperboliche. Furono proprio il modello matematico e i modelli materiali costruiti da Beltrami a far cambiare idea ad Helmholtz e a trasformarlo in un diffusore della geometria iperbolica[11]. Infatti l'argomento decisivo contro l'idea di una intuizione a priori dello spazio è proprio la possibilità dell'esistenza di più geometrie coerenti in se stesse ma profondamente diverse tra loro. L'idea di spazio è dunque legata alla percezione e si sviluppa a partire dalla percezione del moto dei corpi.

La nuova possibilità di fondare la geometria sul movimento non giovò solo alle geometrie non euclidee, chiarendone lo status epistemologico, ma anche alla geometria euclidea. L'attenzione dei matematici si rivolse verso i fondamenti non solo

[10]La dissertazione venne letta nel 1854 in occasione della sua ammissione come docente all'università di Gottinga ma non venne pubblicata da Riemann. Venne pubblicata postuma nel 1867 e poi inclusa nelle opere di Riemann. La traduzione francese della memoria curata da Jules Hoüel e intitolata Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie fu pubblicata nel 1869 negli *Annali di matematica pura e applicata.*

[11]Si veda ad esempio la memoria *The Origin and Meaning of Geometrical Axioms* pubblicata sulla rivista *Mind* nel 1878.

in chiave assiomatica ma anche in chiave psicologica e empirica; il movimento delle figure, anche se non ancora legato alle trasformazioni geometriche, diventa il concetto principale sul quale basare la geometria. Tale punto di vista trova nelle trasformazioni geometriche un utile strumento e continuerà in tutta la seconda metà dell'Ottocento: è la visione che sta alla base degli scritti di Poincaré che vedremo più avanti.

Thienard in [Thienard 1995b] e in [Thienard 1998a] dedica una attenzione particolare a Jules Hoüel (1823 – 1886) che fu uno dei principali sostenitori delle geometrie non euclidee in Francia. Fu Hoüel a tradurre in francese dal tedesco i lavori sulla geometria non euclidea[12] di Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856) e nel 1866 il già citato discorso accademico di Riemann nel 1868. Hoüel pubblicò nel 1867 *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII permières propositions des éléments d'Euclide.*

In Francia, indipendentemente dallo sviluppo delle geometrie non euclidee, si fece strada nel campo della meccanica una visione empirista in contrasto con quella analitica. Uno degli autori più importanti fu Louis Poinsot che rivolse la sua attenzione prima alla statica, dove introdusse il concetto di *coppia di forze*, e poi alla dinamica. Thienard prende in considerazione i contributi di Poinsot alla dinamica delle rotazioni di un corpo rigido e alcuni lavori meccanici di M. Chasles, alcuni dei quali saranno analizzati nel dettaglio nella seconda parte.

Il lavoro di Poinsot *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (1834) riprende il tema della dinamica della rotazione di un corpo rigido per introdurre un punto di vista empirista. Poinsot si pone il problema di dare una formulazione delle soluzioni "qui fasse image" [Thienard 1998 p. 11], cioè che consenta di seguire e immaginare il moto in ogni istante. Questo era un aspetto che secondo Poinsot era assente nelle formule data da Euler prima e Lagrange poi; infatti dal suo punto di vista "dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs sans aucune image nette de la rotation du corps"[13] [Poinsot 1834 p. 2].

Per quanto riguarda i contributi di Chasles alla meccanica Thienard riprende la ricostruzione storica fatta da Chasles nel *Rapport sur les progrès de la géométrie* del 1870 che enfatizza il ruolo della sua nota *Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit d'un corps solide libre* [Chasles 1830] che sarà analizzata nella seconda parte del presente lavoro.

Gli apporti esterni portano l'interesse dei matematici sul movimento delle figure geometriche nel piano e nello spazio. Concetti come la traslazione e la rotazione delle figure nel piano, che sino ad allora erano usati senza che ne fosse stata data una definizione, probabilmente perché ritenuti sufficientemente chiari, vengono definiti rigorosamente e studiati in dettaglio.

---

[12] Cfr. Lobatchevski, *Études géometriques sur la théorie des parallèles . . . suivi d'un extrait de la correspondence de Gauss et de Schumacher*, Paris, Gauthier-Villars (1866).

[13] "in tutte queste soluzioni, non si vede altro che dei calcoli senza alcuna immagine netta della rotazione del corpo"

Secondo Thienard gli apporti esterni confluiscono in un ideale di geometria basata su “des faits simples, mille et mille fois observés et généralisés” [Méray 1874 p. xiii] che ha la sua espressione nei *Nouveaux éléments de géométrie* (1874) di C. Méray.

Méray abbandona completamente l’ordine dato da Euclide che è rifiutato e considerato come un artificio didattico. La distinzione tra geometria piana e la geometria solida è rifiutata in quanto non corrispondente alla realtà, le figure sono considerate come corpi solidi. Nel testo di Méray l’empirismo insito nelle concezioni di Helmholtz e Hoüel è portato alle estreme conseguenze: la validazione dei risultati non è data dalle dimostrazioni bensì dalla corrispondenza con la realtà.

> “Dans la géométrie de Méray, les transformations ou mouvements sont les **éléments constitutifs du cadre géométrique à construire** et elles fondent les grandes problématiques qui y seront posées - congruence, similitude - alors que dans les géométries des auteurs précédemment cités les transformations sont conçues comme outil démonstratif ou procédure de découverte, d’élaboration, de multiplication de théorèmes, dans le cadre constitué de la géométrie d’Euclide. La géométrie de Méray, transposition didactique au niveau élémentaire des conceptions de l’époque, réponse aux questions soulevées par les travaux de Gauss, Lobatchevski, Riemann, pose le problème des fondements de la géométrie réelle.”
>
> [Thienard 1998a p. 41 - 42]

1.2.3 La geometria delle trasformazioni.

Il settimo ed ultimo articolo della serie sulle trasformazioni geometriche [Thienard 1998b] tratta principalmente degli sviluppi che partendo dal *Programma di Erlangen* di F. Klein portano alle ricerche sui fondamenti di David Hilbert (1862 – 1943) e infine agli scritti divulgativi di Henri Poincaré (1854 – 1912) sulle trasformazioni come *La science et l’hypothèse* [Poincaré 1902]. Mi limiterò qui al solo Programma di Erlangen.

Il *Programma di Erlangen*[14] è oggi uno scritto molto celebrato ma il suo ruolo storico è controverso come mostrano gli articoli di Thomas Hawkins [Hawkins 1984] e le risposte che ha suscitate come [Birkhoff e Bennett 1988]. Hawkins parte dal fatto che Klein non svolse le ricerche da lui indicate nel programma e che nei successivi vent’anni i matematici non raccolsero le idee indicate nel Programma per mettere in dubbio l’eccessiva significatività attribuita al *Programma*[15]. Quanto descritto breve-

[14] Con *Programma di Erlangen* si intende il testo a stampa della conferenza data da Felix Klein *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti) [Klein 1872]. Nel seguito farò riferimento alla traduzione italiana curata da Gino Fano [Klein 1890].

[15] The commonly held view that Klein’s Erlanger Programm was one of the most significant and influential works for the history of mathematics during the half-century following its publication in 1872 is questioned on the grounds that insufficient attention has been paid to the complex web of

mente suggerisce che il *Programma* abbia influenzato la visione dei matematici più sul piano epistemologico che sul piano della ricerca.

Per Thienard il *Programma di Erlangen* ha operato una rottura nella concezione della geometria: alla molteplicità delle geometrie sino ad allora sviluppate, Klein sostituisce un nuovo concetto di geometria, quello di teoria degli invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni, che integra queste teorie disparate e, talvolta, antagoniste. Lo strumento che consente questa mutazione del concetto di geometria è la nozione di gruppo. Thienard sottolinea un cambiamento della funzione delle trasformazioni che passano da essere uno strumento per lo studio delle figure e delle loro proprietà ad avere un ruolo strutturale mediante la nozione di gruppo di trasformazioni che diventa così "la nozione primordiale della geometria".

> "Les transformations jouent, par la notion de groupe de transformations, un rôle majeur dans le cadre d'une classification et d'une hiérarchisation des géométries. F. Klein a montré que cette notion de 'groupe de transformations' était l'instrument d'une étude structurale des géométries puisqu'il permettait d'identifier par isomorphie des géométries en apparence étrangères les unes aux autres, d'établir des liens de subordination entre des géométries dont on voyait mal les liens qui pouvaient les unir et donc de hiérarchiser espaces et propriétés géométriques. Ce point de vue ne peut être abordé qu'à un niveau avancé."
>
> [Thienard 1998b p. 31]

1.3 Conclusioni

Il concetto di trasformazione geometrica si sviluppa intorno all'idea di corrispondenza tra enti geometrici e l'idea del moto delle figure, quest'ultima dà luogo sia ai movimenti rigidi che alle deformazioni ottenute muovendo solo una parte di una figura. Il problema del moto è alla base di diverse discipline, nella seconda parte del presente lavoro si è ristretto il campo al moto geometrico, cioè al moto considerato indipendentemente dalle cause e dal tempo. Un moto geometrico, quindi, dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale.

Thienard caratterizza la nozione di trasformazione geometrica principalmente come corrispondenza tra punti e colloca la genesi delle trasformazioni geometriche nella prima età moderna. Per Thienard il concetto di trasformazione geometrica si trova in forma compiuta nelle opere di Girard Desargues che introduce delle particolari trasformazioni, le proiezioni, e delle proprietà invarianti per proiezione. Desargues inoltre opera il trasporto di proprietà lungo una trasformazione.

related mathematical activities of the period. By sketching some of these that are connected with Lie and his school, we present a first approximation to a more informed assessment of the place of the Erlanger Programm in the history of mathematics." [Hawkins 1984 p. 442]

La ricostruzione storica di Thienard si basa su quella data da Chasles nel suo *Aperçu historique* [Chasles 1827]. Thienard volge la sua attenzione alle trasformazioni geometriche sintetiche e in particolare a quelle proiettive. Come Chasles, Thienard ritiene che il Settecento non sia un'epoca di grande sviluppo per la geometria proiettiva e dunque per il concetto di trasformazioni geometriche. Thienard descrive il Settecento come un periodo dominato dall'analisi e dalla geometria delle coordinate; ciò consente di parlare di riscoperta delle trasformazioni ad opera degli allievi di G. Monge e in particolare di J.-V. Poncelet. Tale punto di vista è ampliato nella seconda parte di questo lavoro, nel quale si considerano sia le trasformazioni sintetiche che quelle analitiche. Vedremo, nella seconda parte, come L. Euler sviluppi le trasformazioni geometriche in forma analitica dando delle definizioni di similitudine e di affinità analoghe a quelle attualmente in uso.

La ricostruzione di Thienard dedica ampio spazio allo sviluppo del concetto di trasformazione geometrica nell'ambito della geometria moderna francese, integrando le fonti tedesche sia mediante un approfondimento sulle opere di Steiner sia mediante ampie citazioni tratte dall'edizione francese della *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[16].

Il problema del moto è per Thienard un "contributo esterno" al concetto di trasformazione geometrica, esterno alla geometria proiettiva, ma anche esterno rispetto alle corrispondenze. Thienard dedica al problema del moto in matematica gli articoli [Thienard 1995b] e [Thienard 1998a] dando una panoramica ampia degli sviluppi del problema senza limitarsi al moto geometrico.

Il moto delle figure si collega non solo al principio di continuità di Poncelet ma anche ad altri apporti esterni tra cui lo sviluppo della cinematica, le ricerche sul quinto postulato euclideo e le geometrie non euclidee.

Già nella matematica ellenistica il movimento è legato a tentativi di dimostrazione del quinto postulato, nell'Ottocento il problema è però collegato alla percezione dello spazio e ai fondamenti psicologici della geometria. Thienard sottolinea la nascita di una nuova epistemologia di tipo percettivo-psicologico della geometria mediante l'analisi del trattato di Méray. Il trattato, di per sé poco influente nei successivi sviluppi del concetto di trasformazione geometrica, è invece molto interessante nella prospettiva in cui lo presenta Thienard: il prodotto di un cambiamento dell'epistemologia delle trasformazioni geometriche. Esse non sono più solo uno strumento della geometria moderna in grado di rivaleggiare con i metodi analitici ma anche uno strumento per ricerche che travalicano i limiti della matematica.

I movimenti rigidi giocano un ruolo fondamentale nello sviluppo delle geometrie non euclidee; infatti, proprio grazie alla possibilità di considerare il moto delle figure nel piano iperbolico, cambia lo status epistemologico delle nuove geometrie che possono così contare su una base empirica.

[16] J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier-Villars /Leipzig, B.G. Teubner (1913-1916).

Sempre rispetto al moto, per quanto riguarda lo sviluppo della meccanica, Thienard prende in considerazione i contributi di Chasles e Poinsot, approfondendo maggiormente la posizione di Poinsot. Per quanto riguarda i contributi di Chasles alla cinematica, Thienard fa riferimento ad una seconda ricostruzione storica dello stesso Chasles: il *Rapport sur les progrès de la géométrie* [Chasles 1870]. Nello studio dei contributi di Chasles condotto nella seconda parte del presente lavoro si è tenuto in minor considerazione il *Rapport* di Chasles perché lo stesso Chasles nella ricostruzione storica esalta il proprio ruolo a discapito di altri lavori comunque meritevoli di attenzione.

Parte II

Le isometrie: una genesi storica

Introduzione alla seconda parte

Come dice Klein nel suo *Programma di Erlangen*[17] il moto rigido di una figura, lasciando invariate tutte le proprietà della stessa, è meno interessante rispetto ad altre trasformazioni. Infatti il movimento rigido non permette di distinguere tra loro le proprietà; invece, il caso delle deformazioni è differente, infatti in quel caso solo alcune proprietà vengono conservate e pertanto distinte dalle altre. Non ci si deve dunque stupire se l'attenzione dei matematici si è rivolta solo in un secondo momento alle trasformazioni 'movimenti rigidi' rispetto a quanto avvenne invece per le trasformazioni proiettive. Il lavoro di Thienard ha giustamente richiamato l'attenzione sulla figura di Desargues per l'introduzione delle trasformazioni proiettive nella matematica del Seicento e su Poncelet per quanto riguarda la riscoperta delle trasformazioni proiettive nell'Ottocento. Ma, se da una parte la storia delle trasformazioni proiettive è ben sviluppata dall'altra quella delle isometrie lo è meno. È proprio al problema storico della genesi delle isometrie che ho rivolto la mia attenzione, cercando di approfondire lo studio del moto geometrico dei corpi e delle figure tra Settecento e Ottocento.

Tre aspetti confluiscono nel concetto di trasformazione geometrica: quello di corrispondenza, quello di moto delle figure geometriche e quello della deformazione, che si ha quando il moto è applicato ad una parte della figura. Thienard, che assume come caratteristica essenziale delle trasformazioni geometriche la corrispondenza tra punti, approfondisce lo sviluppo delle trasformazioni nell'ambito della geometria proiettiva e tratta il moto delle figure tra gli "apporti esterni" al concetto di trasformazione geometrica. Come già detto nelle conclusioni della prima parte, il problema del moto in matematica è alla base della nascita di diverse discipline. In questa seconda parte ci si limiterà a considerare il moto cinematico, cioè il moto considerato indipendentemente dalle sue cause, e il moto geometrico, cioè il moto considerato indipendentemente dalle sue cause e dal tempo.

Nel seguito mostrerò come il contributo di alcuni matematici allo studio del moto geometrico dei corpi e delle figure geometriche sia confluito nel concetto di trasformazione geometrica. Vedremo sia lavori legati all'ambito analitico, con la cinematica *ante litteram* di Euler, che lavori legati alla geometria sintetica, con i lavori cinematici di Michel Chasles. Infine considero alcuni lavori di sintesi nei quali i movimenti entrano nella geometria: il rivoluzionario lavoro di Camille Jordan (1838

[17] Si veda [Klein 1890] p. 312 e seguenti.

– 1922) [Jordan 1868] in cui i gruppi di movimenti rigidi del piano e dello spazio assumono una grande importanza nella cristallografia e il *Programma di Erlangen* in cui gruppi di trasformazioni geometriche, tra cui quello dei movimenti rigidi, assumono una grande importanza nella geometria.

Capitolo 2

Euler e lo studio geometrico del moto

2.1 Introduzione alle opere di Euler.

Leonhard Euler (1707 – 1783) fu un autore molto prolifico, sono noti più di 860 suoi lavori scientifici ai quali va aggiunta una cospicua corrispondenza scientifica intrattenuta sia con i più grandi scienziati del XVIII secolo che con figure minori.

Per avere accesso alla grande mole di lavori di Leonhard Euler si può fare riferimento a due indici dei suoi lavori, uno dovuto a P. H. Fuss (1840) e un altro dovuto ad G. Eneström (1913)[1]; l'*Opera omnia* di Euler fu pubblicata dall'editore Birkhäuser in 29 volumi tra il 1911 e il 1956, l'indicizzazione dei lavori all'interno dell'opera si basa in parte sull'indice Eneström[2].

[1]Nel 1840 Paul H. Fuss (1798 – 1855), allora segretario dell'accademia di San Pietroburgo, pubblicò un primo indice contenente 750 lavori di Euler, comprendente anche parte della corrispondenza scientifica e alcuni lavori inediti conservati all'accademia pietroburghese. I lavori indicizzati da Fuss vengono indicati con la sigla Fxxx dove xxx indica un numero da 1 a 750. Tra il 1910 e il 1913 il matematico Gustaf Hjalmar Eneström (1852 – 1923) pubblicò, diviso in vari fascicoli un indice contenente 866 lavori di Leonhard Euler. Analogamente a quanto si fa per l'indice Fuss, i lavori di Euler secondo l'indice Eneström sono indicati da una sigla composta dalla lettera E seguita da un numero. Eneström indicizzò anche i 31 lavori scientifici Johan Albrecht Euler, figlio di Leonhard, che vengono indicati dalla lettera A seguita da un numero progressivo.

[2]L'Opera omnia ha introdotto un nuovo sistema di sigle per la classificazione dei lavori di Euler compatibile con l'indice Eneström: E.xxx indica i lavori di Leonhard Euler in accordo con l'indice Eneström, E*$xxxx$ indica lavori di Leonhard Euler non presenti nell'indice Eneström e ordinati per anno di pubblicazione, H.xx indica i manoscritti di Leonhard Euler, A.xx indica i lavori di Albrecht Euler secondo l'indice Eneström, P.yxx indicizza le prefazioni e le introduzioni con y che indica il numero di serie dell'opera a cui la prefazione si riferisce all'interno della stessa *Opera omnia*, X.yxx lavori di altri scienziati inclusi nell'*Opera omnia* di Euler (si tratta di lavori strettamente legati alle opere di Euler come annotazioni o commentari), dove y indica il numero progressivo di serie dell'opera all'interno della pubblicazione della stessa *Opera omnia*, I.yxx indica l'indice dei nomi e anche in questo caso y indica il numero di serie dell'opera all'interno della pubblicazione della stessa *Opera omnia*. All'interno dell'*Opera omnia* è pubblicata anche la corrispondenza scientifica di

In occasione del trecentesimo anniversario della nascita di Euler (2007) sono stati pubblicati diversi volumi di studi, tra cui il volume *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy* [Bradley e Sandifer 2007] a cui farò più volte riferimento; inoltre, è stata ampliata l'edizione dell'*Opera omnia* con ulteriori volumi. Sempre in occasione del trecentesimo anniversario del matematico svizzero è stato creato un archivio elettronico *Euler Archive*, basato sull'indice Eneström e diretto da Dominic Klyve (Central Washington University) e Lee Stemkoski (Adelphi University). L'archivio permette l'accesso alla digitalizzazione delle pubblicazioni originali.

Diversi lavori di Euler sono interessanti sotto il profilo dello sviluppo delle trasformazioni geometriche dal punto di vista analitico ma al tema delle trasformazioni, non ancora al centro dell'attenzione dei matematici, non è dedicata alcuna opera in particolare. Alcuni contributi di Euler sono sviluppati a margine di opere dedicate ad altre questioni come il moto del corpo rigido o l'applicazione dell'algebra alla geometria. Si è scelto di approfondire il lavoro *Formulae generales pro traslatione quacumque corporum rigidorum*, [Euler 1775] E478, più direttamente attinente alle isometrie, e di fare un cenno al diciottesimo capitolo del secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* (*De similitudine & affinitate linearum curvarum*), [Euler 1748] E102, dedicato alle similitudini e alle affinità.

Per quanto riguarda le fonti, nel caso di *Formulae generales pro traslatione quacumque corporum rigidorum* ci si è riferiti all'originale pubblicato dall'*Euler Archive* [Euler 1775]; le traduzioni in italiano riportate nel presente lavoro si rifanno, oltre che all'originale testo latino, alla traduzione in inglese di Johan Sten [Sten 2007] reperibile sempre attraverso l'*Euler Archive.* Per l'*Introduction analysin infinitorum* si fa riferimento ad una traduzione in francese di fine Settecento [Euler 1796] e [Euler 1797].

Euler diede molti contributi alla meccanica, e in particolare all'estensione della meccanica newtoniana al moto del corpo rigido. L'*Euler Archive* indica 187 opere relative alla meccanica in senso lato, comprendenti opere come la *Scientia navalis* che si occupa del moto del corpo rigido nell'ambito della meccanica applicata. Tra questi lavori alcuni, come *Formulae generales pro traslatione quacumque corporum rigidorum*, E478, possono considerarsi come contributi ad una Cinematica *ante litteram*; infatti, la cinematica si costituirà come disciplina solo nell'Ottocento. Nel Settecento tematiche e risultati che oggi riconosciamo come tipicamente cinematici si trovano in opere di meccanica mescolate a tematiche e risultati tipicamente dinamici. In queste opere settecentesche si possono trovare risultati 'cinematici' provati con argomentazioni 'dinamiche', cioè nelle quali intervengono i concetti di forza e di massa. Come vedremo nel capitolo 3 con i lavori di Chasles, la separazione delle due discipline inizierà nella prima metà dell'Ottocento.

Ai contributi di Euler alla Cinematica *ante litteram* è dedicato il saggio di Koetsier "Euler and Kinematics" [Koetsier 2007], pubblicato nel già citato volume *Euler:*

Euler. Le sigle dell'indice Eneström sono generalmente usate negli studi di storia della matematica su Euler per indicare fonti.

Life, Work and Legacy, [Bradley e Sandifer 2007].

Koetsier nota che i contributi di Euler si inseriscono nel tentativo di dare una trattazione soddisfacente della meccanica del corpo rigido, nel cui ambito Euler si pose il problema di quale fosse la migliore rappresentazione analitica del moto di un corpo rigido nello spazio [Koetsier 2007 p. 175]. Nelle sue opere si passa dall'uso di coordinate implicite all'uso di coordinate rettangolari, uso di due sistemi di coordinate rettangolari, uno fisso e l'altro solidale al corpo rigido. Gli angoli di Euler sono già presenti nell'appendice del secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* sulla geometria analitica delle superfici *Appendix de superficiebus* (Traité abrégé de surface). L'aspetto della ricerca di una rappresentazione vantaggiosa è esplicito nella *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765):

> "Queste tre velocità, che noi attribuiamo nella nostra mente al punto mobile, renderanno l'intera trattazione molto più facile e siccome io non le avevo utilizzate nel mio precedente libro sulla meccanica, sono caduto in calcoli eccessivamente intricati.[3]"
>
> Euler, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765), E289, p. 23 citato in [Koetsier 2007 p. 175]

Euler non concepiva le coordinate rettangolari spaziali come facciamo attualmente ma, anche se quanto scritto da Euler è perfettamente comprensibile alla luce della concezione attuale, questo non deve indurci a sottovalutare le differenze. Secondo Kats, spesso, Euler per dare le coordinate di un punto nello spazio introduce un piano coordinato dove è presente un solo asse coordinato, la terza coordinata è ottenuta dal segmento perpendicolare che collega il punto in oggetto al piano delle coordinate. Lo stesso Euler osserva, però, che le tre coordinate si possono ottenere considerando tre piani [Kats 2007 pp. 222-223].

Koetsier a proposito della concezione euleriana delle coordinate rettangolari scrive: "There are subtle differences between Euler's and our views of a coordinate system. For example, the three perpendicular coordinates of a point do not primarily correspond to the three projections on the three coordinate planes. The expression 'point M has the three perpendicular coordinates x, y, z' meant to Euler: Move from the origin A to the point P in the direction of the x-axis, such that $AP = x$, then move perpendicular to AP from P to Q in the direction of the y-axis such that $PQ = y$ and finally move perpendicular to the plane of APQ from Q in the direction of the z-axis over a distance z. This is how one reaches the point M. Euler's pictures do not contain the three coordinate axes either. They show the route $APQM$ from the origin to the point M consisting of the segments AP, PQ, QM. Such a figure defined the coordinate system. On the other hand everything that Euler did makes perfect sense to us. [Koetsier 2007 p. 179]" [Koetsier 2007 p. 179].

[3] "Hae enim ternae celeritates, mente saltem puncto mobili tributae, totum negotium expedient; quo subsidio cum non sim usus in superioribus de Mecanica libris, in nimis intricatos calculos sum delapsus." [Koetsier 2007 p. 179]

Quanto visto riguardo alla concezione euleriana delle coordinate rettangolari dello spazio chiarisce il fatto che la scelta delle coordinate rettangolari non fosse scontata e quanto fosse, invece, importante la ricerca di un sistema di rappresentazione della posizione di un corpo rigido nello spazio adeguato alle ricerche di tipo 'analitico'.

L'*Introductio analysin infinitorum* è un trattato in due volumi (vol. 1 E101 1748, vol. 2 E102 1748), ci interesseremo al capitolo XVIII del secondo volume, dove Euler introduce similitudini e affinità. Anticipo di seguito una descrizione generale dell'opera che è emblematica della visione 'analitica' della matematica, tipica di Euler. L'*Introductio in analysin infinitorum* è discussa, sotto l'aspetto generale, insieme ad altre opere sul calcolo infinitesimale e sul calcolo integrale, in V. J. Katz *Euler's Analysis Textbooks* [Kats 2007].

L'*Introductio* contiene quanto secondo Eulero "ce qu'exige absolument l'Analyse des infinis", esposto "avec plus d'étendue & plus de clarté qu'on ne le fait ordinairement" [Euler 1896 p. v]. Inoltre Euler ha trattato "[...] par les méthodes de l'Algèbre commune plusieurs questions, qui sont ordinairement l'objet de l'Analyse infinitésimale, afin de rendre plus sensible & plus frappant l'accord parfait qu'on remarquera dans la fuite entre les deux méthodes." [Euler 1796 p. v-vj]

Nel trattato sono considerate alla stessa stregua coordinate positive e coordinate negative, la giustificazione di queste ultime è puramente algebrica[4].

Uno degli aspetti più innovativi dell'*Introductio* è la scelta di Euler di mettere alla base della sua trattazione il concetto di funzione[5] e non quello di curva; l'analisi è sviluppata sulle funzioni e le curve intervengono solo nel secondo volume quando si applica l'algebra e l'analisi infinitesimale alla geometria. Euler presenta il concetto di funzione nel primo capitolo del primo volume e sviluppa nei capitoli successivi la trasformazione delle funzioni, in particolare mediante la sostituzione e i cambiamenti di variabile.

Euler introduce gli sviluppi in serie nel quarto capitolo, *De explicatione Functionum per series infinitas*, che nel seguito del primo volume saranno, insieme alle sostituzioni di variabile, uno dei principali mezzi di investigazione. Gli altri capitoli del primo volume vertono sulle funzioni in più variabili (V), sulle funzioni esponenziali e logaritmo (VI e VII), sulle funzioni trigonometriche (VIII), sulle serie infinite (IX), sulla funzione inversa del seno (XI), sulle funzioni razionali (XII), sulle serie definite ricorsivamente (XIII), sulla moltiplicazione e divisione di angoli (XIV), sulle

[4]Cfr. *Introduction in analysin infinitorum* [Euler 1794 p. 4] [Euler 1796 p. 2]

[5]Il concetto di funzione non era all'epoca molto elaborato. Dopo aver definito le quantità variabili e le quantità costanti Euler dà la seguente definizione di funzione: "*Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*" [Euler 1796] Se da una parte la definizione di funzione data da Euler non è originale, infatti riprende quelle che si trovano nei carteggi dei suoi maestri Leibniz e Bernoulli [Boyer 1956 p. 188], dall'altra questo nuovo concetto assume nel suo trattato una posizione e un ruolo fondamentale che prima non aveva. Euler distingue le funzioni algebriche dalle funzioni trascendenti.

partizioni di un numero naturale (XV), sull'uso delle serie nell'indagine sulle radici delle equazioni (XVII), sulle frazioni continue (XVIII).

Il secondo volume della *Introductio analysin infinitorum* è dedicato all'applicazione dell'algebra e dell'analisi infinitesimale alla geometria delle curve e ha come appendice un trattato abbreviato sulle superfici intitolato “Appendix de superficiebus”. Sin dal primo capitolo del secondo volume Euler affronta il legame tra il concetto di funzione e quello di curva, i due concetti sono strettamente legati per mezzo della geometria delle coordinate.

> “8. Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble; nous les considérons ici principalement comme le résultat de fonctions; cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul. Ainsi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il fuit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes.” [Euler 1797 p. 4]
>
> [Euler 1797 p. 4]

Nel passaggio dallo studio delle funzioni allo studio delle curve, rappresentate come funzioni algebriche, assumono importanza i cambiamenti di variabile lineari in quanto lasciano immutato il grado del polinomio. Euler introduce i cambiamenti di coordinate (*coordinatarum permutatione*) nel secondo capitolo del secondo volume e affronta poi la classificazione delle curve in ordini nel terzo. Il quinto è dedicato alle curve del secondo ordine mentre il sesto è dedicato alla classificazione in generi delle curve del secondo ordine. Nei capitoli successivi Euler affronterà le curve del terz'ordine e del quarto e in generale le curve di ordine superiore. Euler dedica ampio spazio allo sviluppo delle coordinate polari e introduce la rappresentazione parametrica delle curve.

Uno dei tratti distintivi dell'*Introductio* è la scelta di dedicare un capitolo alle curve trascendenti, mentre all'epoca nei trattati di applicazione dell'algebra alla geometria, seguendo Descartes, venivano principalmente considerate curve algebriche [Boyer 1956 p. 184].

In conclusione l'Introductio in analysin infinitorum di Euler, benché sia un trattato destinato a dare solide basi algebriche a chi si avvicina al calcolo differenziale e integrale, è un'opera molto innovativa sotto diversi aspetti.

2.2 Lo studio geometrico dei movimenti rigidi.

Il lavoro *Formulae generales pro traslatione quacumque corporum rigidorum*, [Euler 1748] E478, è uno scritto di diciannove pagine in latino pubblicato sul periodico *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*[6] dell'accademia delle

[6] I *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* furono pubblicati in 21 volumi tra dal 1747 al 1778. Secondo l'Euler Archive (`http://eulerarchive.maa.org/`), Euler ha contribui-

scienze russa[7] nel quale Euler ricava delle formule analitiche per il moto geometrico di un corpo rigido. Lo scritto si compone di due parti: una parte principale e un *Additamentum*, una appendice aggiunta.

Secondo l'*Euler Archive*, Eneström pone in relazione E478 al lavoro E470 *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* che contiene la condizione di ortogonalità per le coordinate rettangolari nello spazio; nel presente lavoro, invece, ci si riferisce principalmente alla *Introductio analysin infinitorum*.

In generale per *moto cinematico* si intende il moto considerato indipendentemente dalle sue cause (forze e masse); nel moto cinematico si ha una traiettoria e la posizione, ciò permette di considerare velocità ed accelerazione, mentre per *moto geometrico* si intende il moto fatta astrazione anche del tempo, quindi dipendente solo dalla posizione iniziale e finale del corpo; l'indipendenza dal tempo e quindi anche dalla traiettoria percorsa non permette di definire velocità e accelerazione. L'indipendenza dal tempo e dalla traiettoria porta a identificare i moti che hanno uno stessa posizione iniziale finale con il moto 'più semplice' che unisce le due posizioni: le traslazioni e le rotazioni. Come vedremo il concetto di moto geometrico non è ancora ben chiaro nel Settecento.

Euler introduce indirettamente il moto geometrico sin dal primo paragrafo descrivendo l'indagine geometrica sul movimento di un corpo rigido:

> "Quando occorre che sia determinato il moto di un corpo rigido, tutta l'indagine può essere comodamente distinta in due parti, una geometrica e l'altra meccanica. Infatti nella prima solo la traslazione [movimento rigido[8]] del corpo da una posizione determinata verso qualunque altra che deve essere rappresentata attraverso formule analitiche senza alcun riguardo per i principi del moto, con l'aiuto di queste la posizione dei singoli punti dopo la traslazione può essere definita dalla posizione iniziale di queste; perciò quest'indagine eccezionalmente è da riferire a [quella di carattere] geometrico piuttosto che stereometrico. Si capisce facilmente che se quest'indagine viene separata dall'altra, che propriamente è pertinente alla meccanica, allora la stessa determinazione del moto dai principi del moto può essere compiuta molto più facilmente che se venisse assunta l'indagine dei due tipi in maniera congiunta. Avendo dunque

to ai *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (1727 – 1751) con 69 lavori e successivamente ai *Novi commentarii* (1747 – 1778) con 179 lavori. La pubblicazione dei *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* fu molto irregolare, specialmente nei periodi di instabilità politica dell'impero russo, arrivando ad accumulare sino a dieci anni di ritardo nelle pubblicazioni.

[7] *Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae.*

[8] Euler utilizza il termine latino *translatio* nel suo significato generico latino di trasporto, movimento. La parola è composta di *latio* sinonimo di *motus* con il suffisso *trans* che significa oltre, attraverso. Le odierne traslazioni e rotazioni sono dunque delle *translatio* nel senso lato del termine usato da Euler.

nel mio trattato sul moto dei corpi rigidi[9] assunto entrambe le indagini in contemporaneamente, donde l'intera trattazione è stata resa non poco ostica e intricata: in questo luogo ho stabilito di svolgere in modo più accurato solo la parte geometrica, in modo che poi la parte meccanica possa essere svolta in modo più facile[10]".

[Euler 1748 p. 189-190]

Fissato un sistema di riferimento con origine in I un punto Z ha coordinate (p, q, r) rappresentate geometricamente dai segmenti $IP = QS = p$, $PS = IQ = q$, $SZ = r$. Eulero, richiamati alcuni risultati sul centro di inerzia, suggerisce che il punto I può essere posto nel centro di gravità o meglio nel centro di inerzia del corpo rigido.

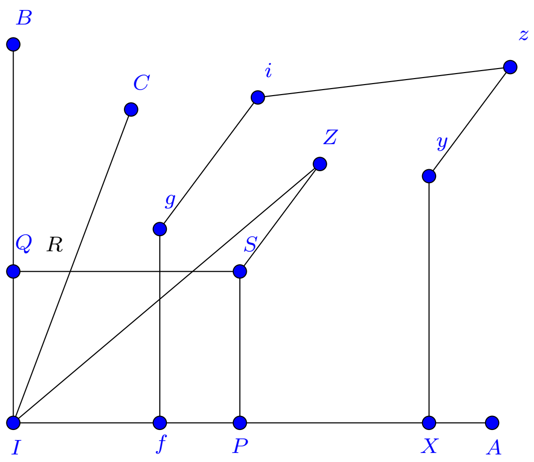

Figura 2.1: Riproduzione della figura 1, tavola 2, [Euler 1775].

[9]Verosimilmente Euler si riferisce al suo trattato *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765).

[10]"Quando corporis cuiusque rigidi motum determinari oportet, tota investigatio commode in duas partes distinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte sola translatio corporis ex dato situ in alium quemcunque sine ullo respectu habito ad motus principia per formulas analyticas repraesentari debet, quarum ope positio singulorum punctorum post translationem ex earum positione initiali definiri queat; quae ergo investigatio unice ad Geometricam vel potius ad Stereometricam est referenda. Facile autem intelligitur, si ista investigatio ab altera, quae proprie ad Mechanicam pertinet, separetur, tum ipsam motus determinationem ex principiis motus multo facilus expediri posse, quam si utraque inuestigatio coniunctim suscipiatur. Cum igitur in tractatu meo de motu corporum rigidorum hanc utramque inuestigationem simul suscepissem, unde tota tractatio non parum molesta et intricata est reddita: hoc loco solam partem geometricam accuratius evolvere constitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri possit." [Euler 1748 p. 189-190]

Consideriamo il punto i corrispondente ad I dopo il moto rigido - traslazione - del corpo. Il punto i avrà coordinate (f, g, h) rispetto ad I, cioè $If = f$, $fg = g$ e $gi = h$. Consideriamo il punto Z traslato su z al quale assegna le coordinato $Ix = x$, $xy = y$ e $yz = z$, e aggiunge Eulero che è "immediatamente chiaro che la distanza iz è uguale alla distanza IZ[11]". Il segmento IZ avrà lunghezza $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ e il corrispondente segmento iz avrà lunghezza $\sqrt{(x-f)^2+(y-g)2+(h-z)^2}$, per la rigidità del moto si ha che le due lunghezze IZ e iz sono uguali dando luogo alla relazione $p^2+q^2+r^2 = (x-f)^2+(y-g)2+(h-z)^2$.

> "Inoltre certamente è necessario, che le distanze tra due punti qualunque del corpo nella posizione traslata siano ancora uguali alle distanze degli stessi punti nella posizione iniziale, condizione che possiamo soddisfare nel seguente modo.[12]"

Descritto il sistema di riferimento, data la proprietà fondamentale della rigidità del moto, Euler suppone che il moto sia descritto da un certo numero di costanti e si appresta a determinarle e studiarle. Per questo scompone l'effetto del moto in tre direzioni, assume che lungo ogni direzione il movimento agisca sulle coordinate con una funzione lineare e ottiene così quelle che per noi sono le colonne di una matrice di trasformazione $\begin{pmatrix} F & F' & F'' \\ G & G' & G'' \\ H & H' & H'' \end{pmatrix}$ e che poi ricomporrà in un sistema 3×3. Prima di ricomporre le equazioni nel sistema 3×3; Euler, tramite la formula dell'uguaglianza tra le distanze, ricava delle relazioni tra i coefficienti che compongono ogni singola colonna; relazioni che consentiranno di ridurre i nove coefficienti che caratterizzano il movimento a un numero minore di parametri: a sei angoli prima e a soli tre angoli, successivamente.

La condizione di rigidità del corpo vale per qualsiasi coppia di punti del corpo, e quindi per le posizioni (punti geometrici) che essi occupano.

Secondo Euler possiamo considerare la proiezione del punto generico sull'asse delle ascisse, in tal caso avremo che $q = 0$ e $r = 0$:

> Assumiamo il punto z in quella posizione nella quale viene traslato il punto P viene traslato dal suo stato iniziale: non sembra infatti ritenuta cosa buona gravare la nostra figura con tante nuove linee da tracciare. Quindi anche nel suo stato iniziale il punto Z può essere posto in qualunque posizione; da cui se il punto Z prende [la posizione] del punto

[11] "[...] ac primo quidem statim manifestum est, distantiam iz etiamnunc aequalem esse debere distantiae IZ, qua, cum esset $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, nunc vero sit $\sqrt{(x-f)^2+(y-g)2+(h-z)^2}$ [dots]" [Euler 1775 p. 191]

[12] "Praeterea vero necesse est, ut distantiae inter bina corporis puncta quaecunque in situ translato etiamnunc aequales sint distantiis eorumdem punctorum in situ initiali, cui conditioni sequenti modo satisfaciemus." [Euler 1775 pp. 191-192]

> P, allora il punto z nello stato traslato avrà la corrispondente posizione dello stesso P[13].
>
> Quando il punto Z cade nel punto P, se fosse $q = 0$ e $r = 0$, perché in generale nell'esempio è lecito considerare le tre coordinate x, y, z così come precise funzioni delle stesse p, q e r, in qualunque modo queste funzioni saranno comparate, se in queste poniamo $q = 0$ e $r = 0$ queste coordinate debbono prendere necessariamente la forma[14]
>
> $$x = f + Fp \qquad y = g + Gp \qquad z = h + Hp$$
>
> [Euler 1775 p. 192]

Euler giustifica il fatto che le funzioni che esprimono le coordinate del trasformato devono necessariamente essere funzioni lineari. Anche la forma funzionale è una conseguenza della rigidità del movimento del corpo; dal fatto che la distanza tra due punti è uguale alla distanza tra i corrispondenti punti nello stato traslato discende che ogni segmento è trasformato in un segmento. Ciò non può avvenire se l'equazione di una retta passante per il corpo venisse trasformata in una curva di grado superiore.

> Perché, infatti, poniamo $q = 0$ e $r = 0$, riguardata p come variabile, le coordinate x, y, z esprimono il luogo in cui la linea retta IP sarà stata traslata; essendo questa una retta, la stessa nella posizione traslata è ugualmente una linea retta, e perciò le coordinate x, y, z devono esprimere la posizione di questa linea retta iz, da cui, assunto $p = 0$ allora il punto z deve coincidere con i, è evidente, che le quantità x, y, z devono essere definite attraverso la variabile p così che posto $p = 0$ sarà $x = f$, $y = g$ e $z = b$. Allora certamente poiché l'equazione deve essere conforme a una linea retta, le altre forme non possono avere luogo, se non quelle che abbiamo stabilito:[15]
>
> $$x = f + Fp \qquad y = g + Gp \qquad z = h + Hp$$

[13] "§5. Sumamus punctum z in eo loco, in quem punctum P ex statu initiali fuerit translatum: hic enim non consultum videtur figuram nostram tot novis lineis ducendis onerare. Deinde etiam in ipso statu initiali punctum Z ubicunque libuerit accipi potest; unde si punctum Z in puncto P accipiatur, etiam punctum z in situ translato locum ipsi P respondentem exhibebit." [Euler 1775 p. 192]

[14] "§6. Cum igitur punctum Z in punctum P incidat, si fiat $q = 0$ et $r = 0$, quoniam in genere ternas coordinatas x, y, z tanquam certas functiones ipsarum p, q et r considerare licet, quomodocunque hae functiones fuerint comparate, si in iis faciamus $q = 0$ et $r = 0$ hae coordinatae necessario tales formas accipere debebunt"

$$x = f + Fp \qquad y = g + Gp \qquad z = h + Hp$$

[Euler 1775 p. 192]

[15] Quia enim ponimus $q = 0$ et $r = 0$ spectata p ut variabili, coordinatae x, y, z ostendere debent situm in quem linea recta IP fuerit translata; quae cum sit recta, ea in situ translato erit linea recta ipsi aequalis, ideoque coordinatae x, y, z positionem huius lineae rectae iz exprimere debent,

[Euler 1775 p. 192].

Secondo Euler $iz = IP = p$ da cui $iz^2 = F^2p^2 + G^2p^2 + H^2p^2$ che danno per $p = 1$ $F^2 + G^2 + H^2 = 1$.

Posto $F = \sin\zeta$ si ha $G^2 + H^2 = \cos^2\zeta$. Da cui Euler introducendo un nuovo angolo η deriva *cos*, che porge le seguenti riduzioni alle variabili ζ ed η: $F = \sin\zeta \qquad G = \cos\zeta\sin\eta \qquad H = \cos\zeta\cos\eta$. Euler non dà una interpretazione geometrica dei due angoli ζ ed η.
Così le tre costanti che caratterizzano il moto sono ridotte a due angoli ζ e η.

Allo stesso modo Euler pone z nel punto in cui un punto Q

$$x = f + F'p \qquad y = g + G'p \qquad z = h + H'p$$

F', G' e H' da cui $F'^2 + G'^2 + H'^2 = 1$

$$F' = \sin\zeta' \qquad G' = \cos\zeta'\sin\eta' \qquad H' = \cos\zeta'\cos\eta'$$

Assumendo z nel punto in cui un punto R

$$x = f + F''p \qquad y = g + G''p \qquad z = h + H''p$$

F'', G'' e H'' da cui $F''^2 + G''^2 + H''^2 = 1$

$$F'' = \sin\zeta'' \qquad G'' = \cos\zeta''\sin\eta'' \qquad H'' = \cos\zeta''\cos\eta''$$

Abbiamo così ottenuto un sistema lineare

$$x = f + Fp + F'q + F''r$$
$$y = g + Gp + G'q + G''r$$
$$z = h + Hp + H'q + H''r$$

Le nove costanti denotate con lettere maiuscole sono state ridotte a sei angoli ζ, η, ζ', η', ζ'' ed η''. Ma Euler deduce ulteriori relazioni tra le costanti F, F', F", G, G', G", H, H', H" con un metodo analogo. Ridurrà ulteriormente le nove costanti a tre angoli: η, η', η''.

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1$$
$$F'^2 + G'^2 + H'^2 = 1$$
$$F''^2 + G''^2 + H''^2 = 1$$

unde, cum sumto $p = 0$ etiam punctum z in i incidere debeat, evidens est, quantitates x, y, z ita per variabilem p definiri debere, ut posito $p = 0$ fiat $x = f$, $y = g$ et $z = b$. Tum vero quia aequatio debet esse pro linea recta, aliae formae locum habere nequeunt, nisi quas statuimus: scilicet [...] [Euler 1775 p. 192]

$$FF' + GG' + HH' = 1$$
$$FF'' + GG'' + HH'' = 1$$
$$F'F'' + G'G'' + H'H'' = 1$$

Prosegue Euler

> "Ma veramente noi abbiamo già adempiuto in quanto sopra tutte codeste sei condizioni, dove abbiamo mostrato come tutti questi nove coefficienti possono essere determinati mediante una terna di angoli η, η' e η''. Da cui si capisce chiaramente che la nostra soluzione della questione su una qualunque traslazione dei corpi rigidi è interamente determinata ed adeguata, così che nella parte geometrica, che la determinazione del moto di tali corpi richiede, non si possa desiderare nulla di più.[16]"
>
> [Euler 1775 p. 199]

Quindi Euler si chiede se esistono analogie tra il moto finito e il moto infinitesimale. Infatti, supposto che il corpo si muova spostando il punto I nel punto i, nel caso del moto infinitesimale allora è noto che esiste un linea retta iz appartenente al corpo tale che la sua posizione è parallela alla posizione della stessa linea nello stato iniziale. Se il punto I è in riposo questa linea rimane immutata. Secondo Euler è evidente che questa linea rappresenta l'asse attorno a cui si svolge una rotazione. Scrive Euler: "Per questo resoconto è di grande importanza investigare se, quando la traslazione sarà finita si darà anche un tale asse.[17] Dunque Euler determina l'equazione dell'asse di rotazione nel caso di una rotazione finita.

> §21. D'altra parte è manifesto che le seguenti condizioni sono richieste affinché la linea iz anche ora sia parallela alla linea IZ:
>
> $$1^\circ.\quad x - f = p \qquad 2^\circ.\quad y - g = q \qquad 3^\circ.\quad z - h = r$$
>
> nascono queste equazioni:
>
> $$p = Fp + F'q + F''r$$
> $$q = Gp + G'q + G''r$$
> $$r = Hp + H'q + H''r$$

[16] "At vero omnesistas sex conditiones iam in superioribus adimpleuimus, ubi ostedimus quemadmodum omnes his his novem coefficientes per ternos angulos η, η' e η'' determinari queant. Ex quo eo clarius intelligitur, solutionem nostram quaestionis circa translationem quamcunque corporum rigidorum penitus esse determinatam et adaequatam, ita ut in parte geometrica, quam motus talium corporum determinatio postulat, nihil amplius desiderari possit." [Euler 1775 p. 199]

[17] Quamobrem maximi momenti erit investigare, utrum, si translatio fuerit finita, etiam detur talis axis.

Le ∞^1 soluzioni del sistema darebbero l'equazione dell'asse, Euler ottiene delle relazioni tra i coefficienti ricavando da ognuna di esse un valore per p.

> "Dalle quali equazioni occorre eliminare le lettere p, q, r. Inoltre i valori di p saranno dedotti da qui
>
> $$\frac{F'q + F''r}{1-F}, \qquad \frac{(1-G')q - G''r}{G}, \qquad \frac{(1-H'')r - H'q}{H}$$
>
> Uguagliando il primo e il secondo valore otteniamo codesto rapporto tra q ed r, è evidente che
>
> $$\frac{q}{r} = \frac{G''(F-1) - F''G}{GF' - (1-F)(1-G')}$$
>
> e uguagliando il primo col terzo porta a questa relazione:
>
> $$\frac{q}{r} = \frac{(1-F)(1-H'') - F''H}{F'H + H'(1-F)}$$
>
> Allora è necessario uguagliare realmente questi due valori tra di loro, se è vero che che è dato un tale asse di rotazione.[18]
>
> Euler procede uguagliando i due valori di $\frac{q}{r}$ ottenuti, alla ricerca di condizioni più semplici e quindi più facilmente verificabili. In quanto segue,

[18] Manifestum autem est, ut recta iz etiam nunc parallela sit rectae IZ, ad hoc requiri tres istas conditiones: 1°. $x - f = p$ 2°. $y - g = q$ 3°. $z - h = r$
unde nascuntur hae aequationes:

$$p = Fp + F'q + F''r$$

$$q = Gp + G'q + G''r$$

$$r = Hp + H'q + H''r$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipsius p hinc deducti erunt

$$\frac{F'q + F''r}{1-F}, \qquad \frac{(1-G')q - G''r}{G}, \qquad \frac{(1-H'')r - H'q}{H}$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipsius p hinc deducti erunt

$$\frac{q}{r} = \frac{G''(F-1) - F''G}{GF' - (1-F)(1-G')}$$

Horum valorum primus secundo aequatus istam dabit rationem inter q et r, scilicet

$$\frac{q}{r} = \frac{G''(F-1) - F''G}{GF' - (1-F)(1-G')}$$

ac primus valor tertio aequatus perducit ad hanc relationem:

Hos igitur duos valores revera inter se aequari necesse est, siquidem talis axis gyrationis datur.

tra parentesi quadre, si accolgono le correzioni date da Sten al testo originale, si veda a proposito [Sten p. 18-19].

§22. D'altra parte se poniamo in uguaglianza tra loro questi due valori, perveniamo alla seguente equazione:

$$(1-F)F''GH'+(1-F)F'G''H+(1-F)(1-G')F''H+(1-F)(1-H'')F'G+$$
$$+(1-F)2G''H'-(1-F)2(1-G')(1-H'')=0$$

i cui membri tutti godono del fattore comune $(1-F)$; quindi sostenuto questo per divisione rimane la seguente equazione

$$F''GH'+F'G''H+(1-G')F''H+(1-H'')F'G+(1-F)(G''H'-(1-G')(1-H''))=0$$

i cui membri espansi danno l'equazione

$$\begin{aligned} 0 = -1 + F - FG' + FG'H'' \\ +G' - FH'' - FG''H' \\ +H'' + F'G - F'GH'' \\ -G'H'' - F''G'H \\ +G''H' + [F'G''H] \\ +F''H + [F''GH']. \end{aligned}$$

Non è chiaro come questa equazione sia ricondotta a zero; inoltre sarebbe stato troppo tedioso sostituire alle lettere F, G, H i loro valori finali.[19]"

[19]Quod si autem hos duos valores inter se aequales ponamus, perueniemus ad istam aequationem:$(1-F)F''GH'+(1-F)F'G''H+(1-F)(1-G')F''H+(1-F)(1-H'')F'G+(1-F)2G''H'-(1-F)2(1-G')(1-H'')=0$ cuius aequationis omnia membra factore communi gaudent (1-F); hoc ergo per divisionem sublato remanebit ista aequatio: $F''GH'+F'G''H+(1-G')F''H+(1-H'')F'G+(1-F)(G''H'-(1-G')(1-H''))=0$ quae singulis membris evolutis dat hanc aequationem

$$\begin{aligned} 0 = -1 + F - FG' + FG'H'' \\ +G' - FH'' - FG''H' \\ +H'' + F'G - F'GH'' \\ -G'H'' - F''G'H \\ +G''H' + [F'G''H] \\ +F''H + [F''GH']. \end{aligned}$$

Hic autem non liquet, quomodo ista expressio ad nihilum redigatur; ac nimis taediosum foret loco litterarum F, G, H, eorum valores penitus evolutos substituere.

Euler ha ottenuto delle condizioni sui valori dei nove coefficienti F, G, H, F', G',H', F'', G'', H'', corrispondenti alle entrate di una matrice 3×3, nell'ipotesi che esista un asse del moto. Ma non riesce a determinare se tali condizioni siano verificate o meno da un generico movimento rigido dello spazio. Pertanto Euler conclude:

> Lasciando ora questa investigazione, dal momento che abbiamo dato formule per ogni traslazione, per il mezzo delle quali data la posizione di un punto nello stato iniziale [del corpo] può essere assegnata la posizione dello stesso punto nello stato traslato, abbiamo pienamente soddisfatto lo scopo che ci eravamo proposti, così che in questa parte niente si può desiderare di più poiché l'intera investigazione è basata sulla determinazione dei 9 coefficienti F, G, H, F', G',H', F'', G'', H''.[20]
>
> [Euler 1775 p. 201]

Dopo la conclusione lo scritto prosegue con un "Additamentum", cioè con una appendice aggiunta, nella quale Euler ritorna sul problema della determinazione di un asse analogo all'asse di istantanea rotazione esistente nei movimenti infinitesimi.

In questa aggiunta Euler dà il teorema sulle rotazioni nello spazio:

> "Teorema. *In qualsiasi modo una sfera ruoti attorno al suo centro, è sempre possibile assegnare un diametro, la cui direzione nello stato traslato è in accordo collo stato iniziale.*[21]" [Euler 1775 p. 202]

La dimostrazione del teorema si basa sulla geometria sferica; a questo proposito Euler nota che in questo caso il metodo analitico nasconde nei calcoli le ragioni dell'esistenza di tale asse mentre il metodo geometrico porge una facile dimostrazione.

> "§28 Come è mostrato col più solido ragionamento, in ogni stato traslato c'è sempre una linea retta iz di tal genere, la cui direzione non differisce da quella che la stessa linea IZ ha nella sua situazione iniziale, inoltre possiamo essere certi che l'equazione data in §22 avrà sempre luogo, appunto dopo aver sostituito tutti i valori assegnati alle lettere; ebbene ciò si dimostra necessario affinché tutti i termini si distruggano mutuamente e spontaneamente, anche se ciò non appare in alcun modo dalle sei condizioni principali, che devono essere soddisfatte. Per la qual cosa questa eccezionale proprietà, la cui verità geometricamente è da considerarsi così facilmente essendo stato mostrato il calcolo delle formule

[20] "Missa igitur hac investigatione, quoniam pro translatione quacunque formulas dedimus, quarum ope ex data cuiusque puncti positione in statu initiali eiusdem positio in statu translato assignari potest, scopo quem nobis proposuemarus plene satisfecimus, ita ut in hac parte nihil amplius desiderari queat, cum tota haec investigatio in determinatione 9 coefficientium F, G, H, F', G',H', F'', G'', H'' contineatur" [Euler 1775 p. 201]

[21] "Theorema. *Quemodocunque sphaera circa centrum suum cevertatur, semper assignari potest diameter, cuius in situ translato coveniat cum situ initiali.*" [Euler 1775 p. 202]

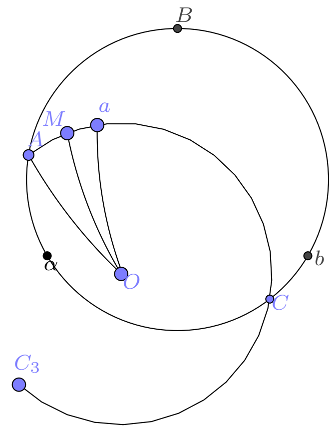

Figura 2.2: Riproduzione della figura 2, tavola 2, [Euler 1775].

> analitiche invece che così facilmente come è nascosta dal calcolo delle formule analitiche invece che massimamente nascosto; e grazie a questo stesso calcolo possiamo attendere a ragione importanti avanzamenti per l'intera meccanica.[22]"
>
> [Euler 1775]

Una volta dimostrata l'esistenza di un asse iz Euler riprende il problema continuando a sviluppare i calcoli analitici nel paragrafo 29, ma non riuscendo a giungere ad una conclusione, chiude la sua aggiunta con le seguenti considerazioni:

> "Anche se noi sostituissimo veramente questi valori nell'equazione §22 non è ancora chiaro come ciascuno dei suoi membri si possano distruggere mutuamente. Per questa ragione è necessario avere una condizione, che è $\theta + \theta' + \theta'' = 0$; da cui nasce tra le lettere t, t', t'' la relazione $tt' + t't'' + tt'' = 1$, o che la somma dei prodotti di due di loro è uguale all'unità. Inoltre vero finanche è da badare a questa condizione nella quale era $\eta' = \eta - \theta''$ e $\eta'' = \eta + \theta'$, e osservate convenientemente queste condizioni sviluppate attraverso il calcolo non è possibile lasciare ogni

[22]§28. Cum igitur solidissimis rationibus sit evictum, in omni situ translato semper dari eiusmodi lineam rectam iz, cuius directio non discrepet a directione, quam eadem recta IZ in situ initiali tenuit, etiam certi esse possumus, aequationem §22. datam semper locum esse habituram, postquam scilicet loco omnium litterarum valores assignati fuerint substituti; hoc enim facto necessario evenire debet, ut omnes plane termini sponte se mutuo tollant, etiamsi hoc ex sex illis conditionibus principalibus, quibus satisfieri oportuit neutiquam appareat. Quamobrem ista eximia proprietas, cuius veritas geometrice tam facile est ostensa ratione formularum analyticarum pro maxime abscondita est habenda; atque ob hanc ipsam rationem ex ea pulcherrima incrementa per totam mechanicam merito expectare possumus.

dubbio, che questa equazione venga soddisfatta. Ma veramente nessuno vorrà sostenere in sé facilmente questo lavoro mirabile; per cui questa egregia proprietà di tutti i corpi rigidi deve essere stimata molto più ardua, e può offrire ai Geometri una fortunatissima occasione di esercitare le proprie abilità esaminando a fondo questa proprietà.[23]"

2.2.1 Il carattere analitico

I contributi analitici settecenteschi al concetto di trasformazione non sono riconosciuti come tali da Poncelet e Chasles che costituiscono le fonti principali. Questi contributi si distinguono da quelli di Desargues e la sua scuola sia per il metodo algebrico - analitico che per i contenuti; infatti non trattano le trasformazioni proiettive e i problemi connessi come quello della generazione per proiezione delle curve per proiezione.

I movimenti rigidi dello spazio sono sviluppati in connessione con lo studio geometrico del moto di un corpo rigido e, come vedremo, similitudini e affinità sono sviluppate nell'ambito dello studio delle curve algebriche.

Euler fece inserire il suo studio del moto geometrico come capitolo della seconda edizione della Meccanica[24] ma il suo lavoro non ebbe un grande influsso sugli sviluppi successivi della cinematica da me presi in considerazione. Jeremy Gray nel suo articolo [Gray 2005], nell'inquadrare il lavoro di Olinde Rodrigues (1794 – 1851), segnala che nell'opera di Euler "la geometria dei movimenti è sviluppata solo incidentalmente" e ancora segnala che, invece, le sue opere divulgano largamente il punto di vista della dinamica, cioè lo studio del moto di un corpo sottoposto ad un sistema di forze.

Euler influenzerà profondamente lo studio della statica e della dinamica, la *Méchanique analytique* di Lagrange raccoglie il testimone del metodo analitico in quel campo. La cinematica, invece, sarà sviluppata in Francia da matematici con un punto di vista empirico-intuitivo come Chasles e che si richiameranno non a Euler ma agli scritti di L. Carnot e Ampère[25].

[23]Verum etiamsi hos valores in aequatione §22. substituamus, nullo tamen modo perspicitur, quomodo singula eius membra se mutuo destruere queant. Quamobrem necesse erit, insuper eius conditionis rationem habere, quod sit $\theta + \theta' + \theta'' = 0$; unde inter litteras t, t', t'' ista relatio nascitur, ut sit $tt' + t't'' + tt'' = 1$, sive ut summa productorum ex binis unitate aequantur. Praetera vero etiam ad eam conditionem est attendenda, qua erat $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$, atque his conditionibus rite observatis et per calculum evolutis nullum dubium superesse potest, quin ista aequatio adimpleatur. At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est consenda, et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.

[24]*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, vol. 1 E16 (1736), vol 2 E15 (1736).

[25]Lorraine Daston, in [Daston 1986], ha legato il punto di vista empirico-intuitivo alla diffusione delle idee di Locke (1632 – 1704), evidenziando il ruolo di Carnot come diffusore di una epistemologia empirista della matematica in Francia.

Nelle sue opere Euler generalmente non dà una giustificazione geometrica dell'esistenza o della legittimità delle entità algebriche - analitiche. Questo carattere astratto e 'analitico' è ben esemplificato nella sua *Introductio in analysin infinitorum*, che abbiamo visto in precedenza. Si noti che ancora nel Settecento la legittimità di concetti algebrici di base come i numeri negativi e i numeri complessi non era accettata da tutti i matematici, mentre, come già ricordato, Euler nella *Introductio in analysin infinitorum* ammette le coordinate negative dandone una giustificazione puramente algebrica.

In Euler la consistenza dei simboli e delle manipolazioni formali danno sia il metodo per la soluzione dei problemi che la giustificazione epistemologica [Daston 1986 p. 270]. Euler assume questa posizione sia rispetto allo status dei numeri negativi sia rispetto ad argomenti ben più problematici dal punto di vista epistemologico, come le funzioni e il loro sviluppo in serie formali (non sempre convergenti). Il metodo è detto analitico[26], ma il termine aveva perso nel nuovo quadro epistemologico proposto da Euler ogni riferimento all'analisi e alla sintesi degli antichi. Euler parla di *analysin infinitorum* 'analisi degli infiniti' (accomunando in un solo termine l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo).

Alla fine del Settecento il significato dell'aggettivo analitico è cambiato, scrive Lacroix:

> "Les deux chapitres suivans qui terminent le premier volume, renferment l'application du Calcul différentiel aux courbes et aux surfaces courbes; mais cette application, au lieu d'être isolée, comme elle l'a presque toujours été jusqu'à présent, fait partie d'une théorie complète des courbes et des surfaces courbes; et par-là le Lecteur se trouve à portée d'embrasser l'ensemble de chacun de ces objects.
>
> En écartant avec soin toutes les construction géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourroit appeler *Géométrie analytique*, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étandue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement."
>
> [Lacroix 1797 p. xxv-xxvi]

[26]Il metodo era detto 'analitico' sin dal tempo di Descartes perché per effettuare la messa in equazione di un luogo geometrico, si doveva supporre il luogo geometrico costruito e dare un nome alle linee note e incognite e legarle in una equazione. L'analisi algebrica è legata all'analisi degli antichi dal fatto che entrambe partono dal presupporre il luogo geometrico esistente e costruito. Ma l'aggettivo analitico venne usato in generale per indicare l'applicazione dell'algebra alla geometria mediante il metodo delle coordinate. La dicitura 'geometria analitica' è invece più tarda, Beniamino Segre in [Segre 1938 p. 145] la fa risalire alla prefazione del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797) di Lacroix.

L'indagine condotta da Euler sul moto geometrico ha proprio il carattere analitico così come inteso da Lacroix: le proprietà sono dedotte dalla sola rigidità del moto per mezzo del calcolo algebrico.

L'uguaglianza tra la distanza di due punti del corpo nello stato iniziale e la distanza tra i punti corrispondenti nello stadio finale è la base per ottenere tutte le relazioni che sono ulteriormente sviluppate sulla sola base del calcolo algebrico. Il metodo adottato da Euler ha uno spiccato carattere astratto rispetto alla geometria pura e all'applicazione dell'algebra alla geometria alla maniera di Descartes, che restavano più aderenti alle istanze epistemologiche empiriste.

Le esigenze epistemologiche empiriste si concretizzano nella richiesta di una dimostrazione costruttiva che sia aderente alla natura del problema e che facciano ricorso ai soli dati immediati del problema escludendo non solo le quantità ausiliarie ma anche i parametri e i sistemi di coordinate 'estranei al problema'. La dimostrazione costruttiva darà luogo a delle formule analitiche 'dirette' e 'chiare'. I "simboli analitici" a cui Euler aveva dato una legittimità nella matematica "nascondono la soluzione" e l'arte della scoperta, per gli empiristi, non può quindi consistere nel calcolo analitico bensì "dans cette considération attentive des chosès, ou l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en esseyant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connaissance." [Poinsot 1834 p. 30]

Luis Poinsot si esprime così nell'introduzione alla *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (1832)

> "Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un *point*, c'est—à-dire, du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit, et qu'on réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique. Car il ne reste plus alors qu'à se représenter la ligne, droite ou courbe, que ce point peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais s'il s'agit du mouvement d'un corps *de grandeur sensible et de figure quelconque*, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très obscure.
>
> [...]
>
> Et si, de cette démonstration géométrique de la rotation des corps, on veut passer au calcul, pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous

pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques: ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrége et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue."

[Poinsot 1834 pp. 1-4]

Dalle parole di Poinsot si può scorgere quanto fosse problematica la recezione dei lavori di Euler con il loro carattere analitico da parte dei matematici empiristi che, pur accogliendo i risultati dei suoi lavori, cercano di inquadrarli in una teoria più aderente allo loro convinzioni metodologiche e epistemologiche. Nell'Ottocento il punto di vista empirista sarà influenzato dall'applicazione all'ingegneria, che con lo sviluppo militare e l'industrializzazione ebbe una grande importanza, e dalla nascita dei sistemi di istruzione nazionale, che richiesero l'elaborazione di libri dedicati.

2.3 Euler e le affinità.

2.3.1 Introduzione alla classificazione delle curve.

Uno dei grandi problemi della geometria delle coordinate è la classificazione delle curve algebriche dello stesso grado; il problema sorge quando si assume il grado dell'equazione come criterio per una prima classificazione delle curve algebriche.

Le coniche erano già state classificate nella matematica antica in circonferenze, ellissi, parabole e iperbole. Tale classificazione era indipendente dalla tipologia di cono o cilindro utilizzato per la generazione. Ma gli antichi non hanno lasciato alcuna classificazione delle curve di ordine superiore all'infuori della distinzione tra *curve solide* e *curve meccaniche* che si può leggere tra le righe del terzo libro delle *Collectiones matematicae* di Pappo[27].

[27] Pappo classifica i problemi a seconda della tipologia di curve la cui costruzione è richiesta dalla soluzione del problema. Distingue i problemi in piani, solidi e lineari ('grammici'). Così facendo suggerisce una distinzione tra le sezioni coniche e le curve più complesse spesso recepita come distinzione tra curve *geometriche* e curve *meccaniche*. "Les Anciens ont admis que les problèmes appartiennent à trois genres en géométrie: les uns sont appelés plans, d'autres solides et d'autres encore grammiques. On appelle à juste titre plans ceux qui peuvent être résolus au moyen de lignes droites et de circonferences de cercles; car les lignes au moyen desquelles les problèmes de ce genre spmt résolus trouvent leur origine dans le plan. Quant aux problèmes dont la solution invoque une ou plusieurs sections du cône, ils sont appelés solides; car il faut faire usage de surfaces coniques. Reste le troisième genre de problèmes appéles grammiques, parce que, outre les lignes que nous venons de dire, ils en admettent d'autres pour leur construction, dont l'origine est plus variée et plus complexes, telles que [les spirales], les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes qui possèdent des propriétés nombreuses et étonnantes." [Pappus 1933 p. 38].

Così ogni classificazione delle curve del secondo ordine aveva come termine di paragone la classificazione delle coniche; uno dei problemi era trovare un criterio algebrico che permettesse di ritrovare la classificazione classica delle coniche. La classificazione delle curve del secondo ordine divenne così il banco di prova per ogni criterio algebrico di classificazione, mentre la classificazione delle cubiche costituiva il primo passo di un grande problema aperto.

Nelle prime fasi della geometria delle coordinate il problema del tracciamento delle curve non è sempre distinto dal problema della classificazione delle curve. Per le coniche esistevano diverse procedure meccaniche di tracciamento, a volte concretizzate in meccanismi piani, mentre per le cubiche, come per molte curve di ordine superiore, il tracciamento era un problema aperto.

Con lo sviluppo dell'algebra e della geometria delle coordinate divenne chiaro che le soluzioni del problema del tracciamento di una curva e di quello di una classificazione delle curve dello stesso grado si doveva in qualche modo basare sui valori dei coefficienti dell'equazione.

Il problema della classificazione delle curve si relaziona in più modi alle trasformazioni geometriche. Desargues aveva mostrato come tutte le coniche possono essere considerate proiezioni di una circonferenza, ci si può chiedere se una classe di curve sia ottenibile mediante proiezione di un curva, è il problema della generazione mediante proiezione. La generalizzazione dei cambiamenti di sistema di riferimento portano alla considerazione di trasformazioni in forma analitica. Sotto questo punto di vista i cambiamenti di variabile più importanti sono quelli lineari, in quanto rispettano la classificazione delle curve.

Newton affronta il problema della classificazione delle curve delle cubiche in un trattato *Enumeratio linearum tertii ordinis* pubblicato all'inizio del Settecento come appendice al suo trattato sull'ottica *Opticks* (1704).

Newton si discosta dalla tradizione cartesiana e distingue le curve in ordini corrispondenti al grado dell'equazione:

> "Geometrical lines are best divided into orders, according to the dimensions of the equation expressing the relation between absciss and ordinate, or, which is the same thing, according to the number of points in which they can be cut by a straight line. So that a line of the first order will be a straight line; those of the second or quadratic order will be conic sections and the circle; and those of the third or cubic order will be the cubic Parabola, the Neilian Parabola, the Cissoid of the ancients, and others we are about to describe. A curve of the first genus (since straight lines are not to be reckoned among curves) is the same as a line of the second order, and a curve of the second genus is the same as a line of the third order. And a line of the infinitesimal order is one which a straight line may cut in an infinite number of points, such as the spiral, cycloid, quadratrix, and every line generated by the infinitely continued rotations of a radius."

[Newton 1850 p. 7]

Nell'*Enumeratio* Newton divide le cubiche in 5 generi e 72 specie di cui dà il tracciamento, inoltre enuncia un teorema di generazione per proiezione che è alla base del raggruppamento in generi. Il trattato però non contiene le dimostrazioni dei risultati più importanti, tra cui il teorema di generazione per proiezione. Il fatto diede luogo a delle polemiche sulla scia di quelle sorte attorno alla scoperta del calcolo differenziale.

Il problema della classificazione rimase aperto sino all'Ottocento, quando si completò la classificazione delle cubiche secondo la geometria moderna e, una volta legato il problema della classificazione alle trasformazioni, si dettero le classificazioni affini, proiettive e birazionali.

Nella *Enumeratio* Newton, rompendo con la tradizione cartesiana, propone come criterio di suddivisione delle curve il grado dell'equazione.

Euler affronta la divisione in ordini delle curve nel terzo capitolo del secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* e le principali proprietà di ciascun ordine di curve nel quarto capitolo; la suddivisione delle curve del second'ordine in generi è trattata nel sesto capitolo. Euler dedica alla classificazione delle curve un ampio spazio del suo trattato, nel cui diciottesimo capitolo, sono introdotte le similitudini e le affinità.

2.3.2 Il concetto di similitudine e affinità nella *Introductio analysin infinitorum di Euler.*

Il diciottesimo capitolo del secondo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* è intitolato *De similitudine & affinitate linearum curvarum* (sulla similitudine e dell'affinità delle linee curve) e si compone di ventidue paragrafi numerati dal numero 435 al 456. Euler vi introduce delle particolari trasformazioni analitiche, quindi cambiamenti di variabili delle funzioni che esprimono le curve, che agiscono su una curva trasformandola ma lasciando certe somiglianze con la curva di partenza. Sono proprio tali somiglianze a indurlo ad adottare il termine *affinitas*, che appunto significa parentela, per descrivere la relazione tra la figura di partenza e la figura trasformata; mentre il termine *similitudo* è usato per descrivere il legame tra le figure che si ottengono mediante particolari trasformazioni, che si collegano alla "similitudine geometrica", cioè alla proprietà di quelle figure geometriche i cui elementi omologhi seguono una proporzione.

I primi paragrafi introducono le curve simili che saranno poi, nel paragrafo 441, riportate alle sostituzioni di variabili che danno le trasformazioni geometriche in forma analitica. Il paragrafo 435 introduce un inaspettato modo di considerare i coefficienti della funzione polinomiale, secondo il qual modo i coefficienti del polinomio concorrono a costituire la dimensione di ciascun monomio espressa in termini di prodotto di linee[28]. Per introdurre la similitudine Euler considera solo le funzioni algebriche espresse da polinomi omogenei[29]. Ad esempio si consideri la curva algebrica $y^3 + 2x^3 + ay^2 - a^2x - 2a^2y = 0$, esempio esposto dallo stesso Euler nel paragrafo 437, e che, come si può facilmente vedere, si basa su una forma di terzo grado nelle variabili x, y, a.

Euler a questo punto non introduce una trasformazione che si applica per sostituzione, bensì considera come variabile la costante dalla quale dipendono i coefficienti, nell'esempio la costante a. Una tale variazione si può ottenere mediante una sostituzione $x = \frac{X}{n}$ e $y = \frac{Y}{n}$, che Euler introdurrà successivamente, dopo aver esposto le principali proprietà di questa relazione tra figure.

> "436. Examinons donc une équation qui, outre les deux variables x & y, renferme une ligne constante a, de manière que les trois lignes a, x & y, forment par-tout dans l'équation le même nombre de dimensions. Une équation de cette nature, suivant la valeur qu'on jugera à propos de donner à la constante a, exprimera une infinité de courbes qui ne différeront entre elles que par la grandeur, & qui d'ailleurs seront entièrement semblables. Ainsi toutes les courbes qui sont comprises de cette manière dans une même équation, sont regardées avec raison comme étant d'une même espèce & semblables les unes aux autres; & on ne remarquera entre elles d'autre différence que celle qu'on conçoit exister dans les cercles de différente grandeur."
>
> [Euler 1797 p. 233]

> "438. Ainsi une des propriétés des courbes semblables, & qui peut caracteriser leurs similitudes, est que, si on prend les abscisses AP, ap, proportionnelles aux paramètres AC & ac, les appliquées PM & pm auront en même temps le même rapport; c'est-à-dire que, si on suppose $AP : ap :: AC : ac$, on aura aussi $PM : pm :: AC : ac$. Puisqu'on a $AP : PM :: ap : pm$, ces courbes seront donc semblables dans le sens géométrique, & jouiront sous tous les rapports, à la grandeur près, des mêmes affections."
>
> [Euler 1797 p. 234]

Un esempio è dato dai cerchi di differente grandezza: "Il suit de là que tous les cercles sont des figures semblables exprimées par l'équation $yy = 2ax-xx$, & qu'il en

[28]Nella presentazione dell'*Introductio* abbiamo sottolineato tanti aspetti di piena modernità che fanno di Euler uno dei matematici illuministi per eccellenza, questo aspetto, invece, sembra legarlo alle concezioni geometriche della prima età moderna. Ma bisogna considerare anche che l'*Introductio* è concepito come un trattato destinato all'acquisizione di solide basi su cui basare l'apprendimento del calcolo integrale e differenziale. Probabilmente Euler sceglie di introdurre i concetti in una forma più semplice per poi generalizzarli ad una forma astratta.

[29]Intendendo costante la somma dei gradi delle variabili e dei coefficienti del polinomio.

est de même de toutes òe courbes renfermées fans l'équations $yy = ax$, c'est-à-dire, de toutes le paraboles." [Euler 1797 p. 235]

Il paragrafo 440 prende in considerazione la costruzione geometrica di una curva *amb* simile ad una data curva AMB per mezzo di "une pratique facile" che permette di "décrire une infinité d'autres qui lui soient semblables". La costruzione si basa sulle due proporzioni tra le ascisse $AP : ap :: 1 : n$ e tra le ordinate$PM : pm :: 1 : n$. Nel paragrafo 441 Euler deduce dalle proporzioni le formule analitiche delle trasformazioni che, analogamente a quanto visto per le curve generate da un polinomio omogeneo nelle due variabili e nella costante, esprimeranno una famiglia di curve simili:

> "441. Ainsi, lorsque la nature de la courbe proposée AM sera donnée par une équation quelconque entre les coordonnées $AP = x$ & $PM = y$, il sera facile d'avoir l'équation qui convient à la courbe semblable a m. En effet, soit l'abscisse homologue $ap = X$ & l'appliquée $pm = Y$; on aura par construction $x : X :: 1 : n$ & $y : Y :: 1 : n$; d'où l'on tire $X = \frac{X}{n}$ & $Y = \frac{Y}{n}$. Ces valeurs, substituées dans l'équation donnée en x & en y, donneront une équation entre X & Y, qui sera celle des courbes semblables."
>
> [Euler 1797 p. 236]

A partire dalle formule per le similitudini Euler, generalizzando, introduce le affinità che sono definite considerando un rapporto di proporzionalità per le ordinate diverso da quello adottato per le ascisse. Tale scelta porta ad un cambiamento di variabile del tipo "$x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$" con n ed m diversi tra loro. Euler esplicita le differenze esistenti tra la similitudine e le affinità:

> "Or la différence entre les courbes semblables & celles qui ont de l'affinité consiste principalement en ce que les courbes qui font semblables à l'égard d'un axe ou d'un point fixe le doivent être de même par rapport à tous les autres axes ou à tous les points homologues; au lieu que les secondes ne jouissent de leur propriété qu'à l'égard des axes auxquels on les rapporte & qu'on ne peut pas prendre à volonté d'autres axes ou d'autres points homologues auxquels on puisse rapporter leur affinité. Au reste il faut observer que les deux espèces de courbes que nous venons de considérer, font les unes & les autres du même ordres, & qu'elles appartiennent conséquemment au même genre de lignes. Pour donner une idée plus nette de ce que nous venons de dire de la similitude & de l'affinité, nous l'éclaircirons par quelques exemples tirés des courbes les plus connues."
>
> [Euler 1797 p. 237]

Nel paragrafo 445. Euler illustra le sue idee applicandole alle coniche.

"445. Soit donc la courbe donnée un cercle apporté au diamètre, dont la nature est représentée par l'équation $y^2 = 2cx - x^2$. Faisons $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$ l'équation résultante entre X & Y comprendra toutes les courbes semblables on aura donc $\frac{YY}{nn} = 2c\frac{X}{m}$ ou $YY = 2ncX{-}XX$, d'où il fuit que toutes les courbes semblables au cercle font elles mêmes des cercles dont les diamètres $2nc$ diffèrent entre eux, comme on voudra. Mais, pour trouver les courbes qui ont de l'affinité avec le cercle, il faudra faire $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, & on aura $\frac{YY}{nn} = 2c\frac{X}{m} - \frac{XX}{mm}$ ou $m^2\ Y^2 = 2mn^2cX{-}nnXX$; équation générale à l'Ellypse rapportée à l'un des axes principaux. On voit par là que toutes les Ellypses sont des lignes courbes qui ont de l'affinité avec le cercle; & qu'il en est de même de toutes les Ellypses comparées les unes aux autres. On conçoit, par la même raison, que toutes les hyperboles jouissent de la même propriété; & les ellypses; aussi bien que les hyperboles, dans lesquelles les deux axes principaux ont entre eux; le même rapport, seront des courbes respectivement semblables. [...]"

[Euler 1897 p. 237 - 238]

.

2.3.3 Möbius e le affinità di Euler.

I lavori di Euler avranno una notevole influenza su August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) che, indipendentemente da Poncelet, darà nel suo *Der barycentrische Calcul*, [Möbius 1827], una trattazione analitica delle trasformazioni stabilendo una gerarchia. In particolare Möbius riprende le similitudini e le affinità (ampliandone la definizione) citando esplicitamente Euler per l'introduzione di queste ultime [Möbius 1827 p. 194 e s.].

Möbius con il suo *Der barycentrische calcul*, rappresenta uno sviluppo del concetto di trasformazione indipendente rispetto all'opera di Poncelet[30] ma legato tramite

[30]Gli ultimi capitoli dell'opera in questione trattano della dualità, in una nota nella prefazione [Möbius 1827 p. xii] Möbius specifica che al momento della stampa degli ultimi capitoli aveva avuto notizia dei lavori sullo stesso tema di Poncelet (1818) e Gergonne (1826) ma di non aver avuto modo di consultarli. Möbius non cita esplicitamente i due autori ma si riferisce a lavori di matematici francesi apparsi negli Annali di Gergonne e nel bollettino di Férussac. Cfr. [Allardice 1891 p. 21]. Poncelet si lamentò nella seconda edizione del suo *Traité des propriétés projectives des figures* che i geometri inglesi attribuissero a Möbius la priorità sulla dualità. A tale proposito scrive Poncelet "Ce sont là des erreurs qui temoignent l'ignorance ou un manque d'erudition géométrique regrettable, par lequel comme je l'ai dit ailleurs, on confond trop souvent la decouverte de verités avec leurs mode de démonstration à posteriori (algébrique ou synthétique)." [Poncelet 1866 p. 306].

L. Carnot[31], che cita esplicitamente nella prefazione e nel trattato, all'eredità di Monge e alla rinascita dell'interesse per la geometria.

Secondo Robert Edgar Allardice (1862 – 1928), che scrive nel 1891, il *Der barycentrische Calcul* di Möbius si segnala per l'introduzione del primo sistema di coordinate omogenee, per l'uso e la discussione di segmenti, aree e volumi orientati, per l'uso di una forma particolare di birapporto come invariante, per la proposta di una gerarchia tra le trasformazioni geometriche e, infine, nella parte dedicata alla dualità, si segnala per un enunciato generale del principio di dualità espresso come proprietà generale dello spazio, in quanto Möbius, a differenza degli autori francesi, propone una teoria della dualità indipendente dalle teoria delle coniche[32].

Klein nella sua retrospettiva storica [Klein 1926] segnala Möbius come predecessore del suo *Programma di Erlangen* proprio per l'introduzione di una gerarchia tra le trasformazioni. Secondo Klein Möbius aveva chiaro il concetto di trasformazione come corrispondenza uno ad uno tra i punti di due spazi e, nonostante non possedesse il concetto di gruppo di trasformazioni, riuscì a dare una gerarchia alle diverse trasformazioni grazie al concetto di *Verwandtschaften*[33] (parentela, correlazione).

Il concetto di *Verwandtschaften*, di parentela, sembra coincidere con il nostro concetto generale di trasformazione. Möbius, nella seconda sezione del trattato intitolata *Sulle relazioni tra figure e sulle classi di problemi geometrici che ne risultano*, introduce cinque differenti tipi di Verwandtschaften - trasformazioni:

1. *Gleichheit und Aehnkichkeit* (Congruenze),
2. *Aehnkichkeit* (Similitudini),
3. *Affinität* (Affinità, corrispondono alle attuali trasformazioni affini),
4. *Gleichheit* (Uguaglianze),
5. *Collineation* (Collineazioni, corrispondono alle trasformazioni proiettive).

Le *collineazioni* sono espresse da trasformazioni lineari delle coordinate baricentriche. Nell'introdurre le *Affinität*, Möbius riporta alcuni passi dal capitolo XVIII del secondo volume della *Introduction analysin infinitorum* di Euler [Möbius 1827 p. 195]. Sono proprio questi passi ad avermi suggerito lo studio di questa parte dell'opera di Euler. Nel discutere la dualità Möbius introduce una sesta corrispondenza che mappa punti in piani in modo che un ente venga trasformato nel suo duale.

[31]Möbius cita l'edizione francese della *Géométrie de position*, ma del trattato fu pubblicata nel 1810 una traduzione a cura di Schumacher col titolo di *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie / von L. N. M. Carnot*, Altona: bey J. F. Hammerich (1810). `http://books.google.com/books?id=CuUGAAAAcAAJ`.

[32]Si noti che per quanto riguarda la geometria pura un tale approccio si ha solo con l'opera di Jakob Steiner, si veda 1.2.1.

[33]Letteralmente parentela. Probabilmente una scelta influenzata dall'uso fatto da Euler del termine latino "affinitas" che, appunto, significa parentela.

Nell'opera di Möbius colpisce la maggior varietà di trasformazioni prese in considerazione rispetto alle opere dei geometri francesi dello stesso periodo che si concentrano principalmente su proiezioni e omografie. Ancora non compare una definizione generale di trasformazione, infatti il termine *Verwandtschaften* pur avendo significato tecnico non è definito. Le trasformazioni sono introdotte per tipi mediante formule analitiche e la loro azione è concepita dal punto di vista globale come una azione su tutti i punti del piano, anticipando in ciò sia Jordan che Klein.

L'autore esplicita in più punti che ad ogni tipo di trasformazione (Verwandtschaften) corrisponde una classe di problemi (si veda anche la prefazione: Vorrede, p. X)[34], inoltre nota che le trasformazioni di una classe sono dei casi particolari della successiva, così le congruenze sono delle affinità e collineazioni particolari.

La nomenclatura e le notazioni introdotte da Möbius non ebbero grande diffusione, Klein adduce come spiegazioni del fatto il gusto particolare mostrato nella scelta dei nomi e il carattere modesto dell'autore che non avrebbe sostenuto con forza le novità introdotte. Tuttavia alcune idee di Möbius trovarono diffusione in Italia attraverso alcuni saggi di Giusto Bellavitis[35] come il *Saggio di geometria derivata*[36]. Inoltre, le note polemiche inserite da Poncelet nella seconda edizione del suo *Traité des proprietés projectives des figures* segnalano anche una possibile diffusione in Inghilterra, dove, a detta di Poncelet, il principio di dualità veniva attribuito a Möbius.

Diversi filosofi segnalano che nel *Der barycentrische Calcul* compare una tra le prime considerazioni sugli spazi quadridimensionali, infatti in un passo dell'opera che parla della relazione di simmetria Möbius, analogamente con quanto avviene con le figure piane nello spazio tridimensionale, suggerisce che due figure simmetriche nello spazio possono essere sovrapposte tramite un ribaltamento che passi in una quarta dimensione. La nota si conclude dicendo che siccome la quarta dimensione non esiste la procedura descritta non è possibile [Möbius 1827 p. 191].

2.4 Conclusioni

L'approccio analitico sviluppato da Euler è importante nell'ambito della geometria del XIX secolo quanto quello sintetico richiamato nell'introduzione di questo lavoro. Anche se Euler non considera il caso più generale delle attuali affinità, considera un sottoinsieme abbastanza ampio e rappresentativo. L'ampliamento degli studi effettuato dai suoi successori è legato al problema della determinazione della corri-

[34] "Im Gegenwärtigen sind nur die einfachsten Arten der Verwandtschaften betrachtet worden, diejenigen nämlich, welche auch in der niedern Geometrie in Anwendung kommen können. Der Hauptnutzen dieser der niedern Geometrie angehörigen Verwandtschaften besteht aber darin, dass jede derselben zu einer besondern Classe von Aufgaben hinführt, wo aus gewissen in hinreichender Anzahl gegeben Stücke gefunden werden sollen." [Möbius p. x]

[35] Giusto Bellavitis (1803 – 1880).

[36] Giusto Bellavitis, "Saggio di geometria derivata", *Nuovi saggi della Imperiale Regia Accademia di Scienze Lettere ed Arti in Padova*, **4** (1838): pp. 243-288.

spondenza più generale che rispetti certe caratteristiche, ad esempio l'allineamento dei punti o la relazione di parallelismo, che come si è visto nella introduzione è un tema tipico della prima metà dell'Ottocento. Come già detto, lo studio dei contributi di Euler aggiunge elementi importanti sulla contrapposizione tra i metodi analitici e i metodi della geometria pura che, come vedremo, gioca tanta parte negli sviluppi ottocenteschi del concetto di trasformazione geometrica.

Invece per quanto riguarda la cinematica del corpo rigido il concetto di moto geometrico non è ancora confluito in quello di trasformazione geometrica: i movimenti rigidi non sono ancora visti come casi particolari di trasformazioni geometriche. Abbiamo osservato che questo passaggio importante si ha con Möbius che inserisce le uguaglianze e le simmetrie nella sua classificazione di trasformazioni. In Francia tale passaggio si avrà con Chasles, il quale dice esplicitamente che i movimenti rigidi sono dei casi particolari di trasformazioni geometriche, ma per svilupparne lo studio in connessione con le applicazioni preferisce collocarli nell'ambito della cinematica, dello studio geometrico del moto, piuttosto che nell'ambito della geometria pura.

I contributi di Euler alla cinematica *ante litteram* non saranno ripresi in Francia. La questione della mancata recezione dei lavori cinematici di Euler in Francia è stata sollevata da Jeremy Gray [Gray 2005], che faceva notare la marginalità dei lavori cinematici di Euler rispetto a quelli dedicati alla dinamica. Ma alla marginalità dei contributi di Euler si somma anche una questione metodologica. Infatti, seguendo Poinsot, matematici come Chasles, Rodrigues e de Jonquières sviluppano una cinematica che rifiuta il metodo analitico in favore di un metodo più elementare e con una forte connotazione empirico - intuitiva. In Chasles la citazione di Euler si limita alle note sullo sviluppo storico della cinematica ma i suoi metodi non vengono né descritti né ripresi.

Se Euler nello studio geometrico del moto non considera i movimenti indipendentemente dalla traiettoria e dal tempo, nel quadro 'empirista' della prima metà dell'Ottocento i movimenti sono, invece, pensati come moto uniforme. I movimenti rigidi del piano sono moti uniformi rotatori o traslatori; quelli spaziali sono moti uniformi rotatori o traslatori o, ancora, una composizione dei due precedenti. Euler deriva le formule analitiche per il caso generale direttamente dalla definizione di corpo rigido e non ha necessità di considerare la composizione tra movimenti; invece, nella cinematica 'empirista' la composizione assume una maggiore rilevanza e viene studiata sistematicamente. La composizione tra due movimenti rigidi viene pensata talvolta come lo svolgimento contemporaneo di entrambi i moti uniformi, talaltra come il susseguirsi di due moti.

Capitolo 3

La cinematica e i movimenti rigidi in Francia.

Questo paragrafo verterà sui lavori di Chasles sui movimenti geometrici e, marginalmente, sui lavori di alcuni matematici contemporanei sullo stesso tema: G. Giorgini (1795 – 1874), Benjamin Olinde Rodrigues (1794 – 1851) e Jean-Philippe-Ernest Fauque de Jonquières (1820 – 1901).

Il concetto di moto geometrico è proposto da Lazare Carnot (1753 – 1823) in alcune considerazioni della sua *Géométrie de position*:

> "la géométrie [...] pourroit embrasser les mouvemens, qui ne resulte pas de l'action et de la reaction des corps les uns sur les autres"
>
> [Carnot 1803, pp. 336]

Si tratta, dunque, del moto considerato indipendentemente dalle forze che lo causano. Tra l'altro Carnot richiama l'attenzione sull'esistenza del movimento opposto come "principe fondamental" dei movimenti geometrici:

> "[...] lorsqu'un mouvement existe dans un système du corps, le mouvement contraire à chaque instant est toujours possible ; ce qui n'a pas lieu lorsque le mouvement n'est pas géométrique"
>
> [Carnot 1803 pp. 336-337]

La distinzione della dinamica dallo studio del moto considerato indipendentemente dalle forze sarà proposta da A. M. Ampère[1], che conierà il termine *cynematique* per questa terza branca della meccanica razionale.

[1]Nel 1834 Ampère dà alle stampe la prima parte del suo *Essai sur la philosophie des sciences* nel quale dà una descrizione enciclopedica delle scienze. Per quando riguarda la *Meccanica*, considerata scienza del primo ordine, Ampère propone la divisione in due scienze del secondo ordine *Meccanica elementare* e *Meccanica trascendente*. La prima è ulteriormente suddivisa in *Cinematica* e *Statica* mentre la seconda è suddivisa in Dinamica e *Meccanica molecolare*.

Prima di passare all'esame dei lavori di Chasles, è opportuno richiamare brevemente i due lavori [Monge 1874] e [Lagrange 1811], lavori indicati da Jeremy Gray perché contengono le formule analitiche per traslazioni e rotazioni [Gray 2005, pp. 134n, 135].

La memoria di Monge *Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes*, [Monge 1874] verte sull'espressione in termini analitici mediante equazioni alle derivate parziali e i suoi integrali dei procedimenti di generazione delle curve meccaniche come la traslazione e la rotazione di curve generatrici. Interpretando come parametri del moto della curva generatrice le costanti di integrazione presenti negli integrali, si possono desumere le formule analitiche per le rotazioni e le traslazioni; formule che Monge non dà esplicitamente come definizione delle trasformazioni che rimangono dunque implicite nel lavoro.

Nella seconda edizione della *Mécanique analytique* [Lagrange 1811], Lagrange propone le sue osservazioni sulle rotazioni infinitesime nella sezione dedicata alla statica, paragrafo "Propriétés de l'équilibre, relatives au mouvement de la rotation", nel quale applica il principio delle velocità virtuali ad un generico moto rotatorio.

Per applicare il principio delle velocità virtuali è necessario valutare in un dato istante (cioè in un lasso di tempo infinitesimo) i cambiamenti di coordinate di un punto del corpo, il tempo può essere considerato costante e i cambiamenti di coordinate infinitesimi. Infatti, scrive Lagrange:

> "On doit entendre par vitesse virtuelle, celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire, la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement ; et le principe dont il s'agit consiste en ce que des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances."
>
> [Lagrange 1811 p. 20]

Lagrange introduce le formule analitiche dei cambiamenti infinitesimi di coordinate perché "On pourrait douter si les rotations autour des trois axes des coordonnées suffisent pour représenter tous les petits mouvemens qu'un système de points peut avoir autour d'un point fixe, sans que leur disposition mutuelle en soit altérée. Pour lever ce doute, nous allons chercher tous ces mouvemens d'une manière plus directe." [Lagrange 1811 p. 54].

Il principio delle velocità virtuali, messo da Lagrange alla base della *Mécanique analytique*, era molto discusso tra i *polytechnicien*, i quali lo avevano dimostrato in più maniere. Ma nonostante ciò era ancora percepito come oscuro, pertanto, se ne cercava una dimostrazione che ne potesse chiarire il senso e la portata. Si veda [Bailhache 1978] per una disamina delle dimostrazioni francesi.

Come vedremo, anche Chasles farà più volte riferimento ad una possibile dimostrazione del principio basata sui risultati dello studio del moto geometrico. Pertanto è opportuno richiamarlo prima di passare all'esame delle opere di Chasles.

Lagrange enuncia e discute il principio nelle prime pagine della seconda edizione della sua *Mécanique analytique.*

> "*Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque , en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée , parcourt suivant lu direction de cette même puissance, sera toujours égale d zéro, en regar dant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances , et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.*"
>
> [Lagrange 1811 p. 22]

Lo stesso Lagrange esprime dei dubbi sullo status epistemologico del principio:

> "Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles, il faut convenir qu'il n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif; mais on peut le regarder comme l'expression générale des lois de l'équilibre, déduites des deux principes que nous venons d'exposer. Aussi, dans les démonstrations qu'on a données de ce principe, on l'a toujours fait dépendre de ceux-ci, par des moyens plus on moins directs. Mais il y a, en Statique, un autre principe général et indépendant du levier et de la composition des forces, quoique les mécaniciens l'y rapportent communément, lequel parait être le fondement naturel du principe des vitesses virtuelles; on peut l'appeler le principe des poulies."
>
> [Lagrange 1811 p. 23]

Il principio delle velocità virtuali, che oggi viene generalmente formulato in termini di lavori virtuali, presenta diversi problemi di natura storica e epistemologica che non verranno discussi. Per quanto riguarda una applicazione fatta da Lagrange del principio delle velocità virtuali allo studio del moto lunare si veda [Capecchi 2000].

I lavori di Chasles, di Rodrigues e di E. de Jonquières mirano tutti alla precisazione della nozione di moto geometrico, trattano sia il moto finito che quello infinitesimo, e danno prova dell'utilità del nuovo approccio fornendo delle giustificazioni geometriche al principio delle velocità virtuali.

Come si è visto nelle pagine precedenti il tema del moto geometrico e dello studio dei movimenti rigidi non è del tutto nuovo. Tuttavia gli autori precedenti a Chasles non lo hanno trattato come tema a sé stante o non gli hanno dato uno sviluppo sufficiente a costituirsi come tema di ricerca a sé stante.

Si può dire che la memoria di Chasles del 1860-61 chiude una prima fase di elaborazione del concetto geometrico di movimento rigido caratterizzata dall'assenza del concetto di gruppo, anche se, come abbiamo segnalato, si affacciano alcune proprietà che sembrano anticipare i gruppi di trasformazioni. Nonostante i movimenti rigidi siano delle omografie particolari, il quadro concettuale è quello della cinematica e non quello delle trasformazioni geometriche. Si ha sia l'uso del metodo analitico che di metodi tipici della geometria pura.

Gli scritti esaminati sembrano estranei agli sviluppi avuti nell'ambito della cristallografia nonostante i modelli geometrici fossero legati, mediante la legge di simmetria di Haüy[2] (1815), ai movimenti rigidi. Come vedremo più avanti con l'analisi dei lavori di Jordan, invece, il periodo successivo è caratterizzato dall'uso esplicito del concetto di gruppo e da una stretta relazione con la cristallografia e i suoi modelli geometrici.

3.0.1 La nota di Chasles e la memoria di Giorgini

Chasles presenta, verosimilmente tra gli ultimi mesi del 1830 e i primi del 1831[3], una nota alla *Société philomatique* sulle proprietà di due figure spaziali tra loro simili. La nota fu pubblicata nel *Bulletin* di A. de Férussac con l'aggiunta di una dimostrazione di Hachette, *philomate* e collaboratore della redazione del bollettino.

Chasles enfatizza il legame tra le proprietà del moto geometrico di figure piane e lo studio delle macchine affermando che il teorema "più semplice" della teoria è alla base di un metodo per il tracciamento della normale a curve meccaniche già usato da Hachette nel suo saggio *Histoire des Machines à vapeur*[4].

[2]René-Just Haüy (1743 – 1822).

[3]Il titolo non normalizzato della nota dà delle notizie contraddittorie sulla data della discussione della nota alla *Société philomatique*: la nota è stampata nel fascicolo del Novembre 1830 del *Bulletin* del Baron de Férussac ma il titolo recita "Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre; communiquée à la Société philomatique, séance du 5 février 1831; par M. Chasles.", l'aggiunta alla nota di Chasles fatta da Hachette (*philomate* dal 1807 e collaboratore della sezione matematica del *Bulletin*) è datata anch'essa "5 février 1831". Ancora contrastanti le notizie ricavate dal *Rapport sur le progrès de la géométrie* redatto da Chasles per l'Institut. Chasles annovera la sua nota sotto 1829 [Chasles 1870 p.77]. D'altra parte è noto che nel 1831 il *Bulletin* ebbe una pubblicazione irregolare dovuta alla difficile situazione che accompagnò il cambio di regime: la redazione in un *Avis essentiel* parla di "crise commerciale dont toutes les entreprises, et principalement celles qui sont destinées à la propagation des connaissances scientifiques ont souffert un an" [de Férussac 1831 s.i.p.]. I numeri di Febbraio e di Marzo 1831 furono stampati solo nel Settembre 1831. In mancanza di notizie precise relative a eventuali ritardi del fascicolo del Novembre 1830, non si può dare una datazione certa. Come vedremo il problema della datazione si lega alla priorità su uno dei risultati noto talvolta come *teorema di Mozzi* e talaltra come *teorema di Chasles*.

[4]Quello che nella nota del 1830 potrebbe sembrare una citazione per compiacere Hachette, data la sua autorevolezza e il suo ruolo sia nella *Société philomatique* sia nella redazione del *Bulletin*, alla luce della memoria [Chasles 1860] può essere interpretata in termini differenti. Infatti, come vedremo, il legame tra lo studio del moto geometrico e la teoria delle macchine ha un ruolo fondamentale nella memoria del 1860. L'indicazione del metodo di Hachette sembra più un riconoscimento al fatto particolare del quale Chasles fornisce la generalizzazione che, posta da Chasles, all'inizio della nota fornisce un quadro epistemologico per le proposizioni annunciate.

In una osservazione Chasles riconosce che il moto geometrico è un caso particolare dell'omologia tra due figure e, dunque, i movimenti rigidi sono delle particolari *trasformazioni geometriche*, ma preferisce inquadrarlo nell'ambito di uno studio geometrico dei movimenti di un corpo rigido. La sua nota pertanto è da inserire, a mio avviso, tra quegli studi di Chasles, forse meno noti rispetto a quelli relativi alla geometria moderna, che mirano a chiarire concetti fondamentali della meccanica mediante la geometria pura e di cui fa parte anche la memoria *Mémoire de géométrie pure sur les systèmes de forces, et les systèmes d'aires planes ...* [Chasles 1830b].

Chasles deriva come caso particolare dalle proprietà dei sistemi di figure simili alcune proprietà sulle figure uguali e dà dei teoremi sui movimenti rigidi finiti e infinitesimi di una figura nello spazio:

> "[...] *l'on peut tojours transporter un corps solide libre d'une position dans une autre position quelconque déterminée, par le mouvement continu d'une vis à laquelle ce corps serait fixé invariablement*
>
> [...] *quand on imprime à un corps solide libre un mouvement quelconque infiniment petit, il existe toujours dans ce corps une droite qui glisse sur elle-même pendant que le corps tourne autour de cette droite ; de sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui d'une vis dans son écrou.*"
>
> [Chasles 1830 p.324]

Chasles aggiunge che dal teorema sul moto infinitesimo si possa dedurre una dimostrazione rigorosa del principio delle velocità virtuali:

> "De là, on conclut, de la manière la plus rigoureuse, le pricipe des vitesses virtuelles, relativement à un corps solide libre, sollicité par des forces quelconques, puisque tout mouvement virtuel du corps n'étant autre que celui qu'une vis peut prendre dans son écrou, il suffit de démontrer ce principe relativement à la vis; ce qui n'offre aucune difficulté."
>
> [Chasles 1830 p.324]

Mentre il moto infinitesimo di un corpo rigido si dimostra essere sempre un moto elicoidale, il moto finito può essere qualunque ma lo stesso risultato si può ottenere con un moto elicoidale. Chasles desume dai precedenti il risultato

> "Quand le corps est retenu par un point fixe, la droite qui, dans le cas générale, glisse sur elle-même, passe par ce point, et reste immobile; d'où resulte ce théorème si connu en mécanique: *tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, retenu par un point fixe, n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, mené par ce point.*
>
> [Chasles 1830 p.324]

La situazione è analoga a quella del passo di Lagrange contenente le formule analitiche per le rotazioni infinitesime. Mentre Lagrange fornisce ulteriori prove analitiche del fatto che le rotazioni infinitesime 'rappresentino' i movimenti infinitesimi di un corpo rigido vincolato ad un punto, Chasles lo può dedurre da teoremi più generali, essi stessi, casi particolari di teoremi geometrici. All'interno della produzione di Chasles la nota si colloca assieme alla *Mémoire de géométrie pure sur les systèmes de forces, et les systèmes d'aires planes; et sur les polygones, les polyèdres, et les centres des moyennes* pubblicata da Chasles nello stesso anno. Si tratta di uno studio miscellaneo condotto con i mezzi della geometria pura che lega la teoria delle coppie di Poinsot a tematiche geometriche.

Il risultato riguardante un generico movimento rigido infinitesimo fu trovato indipendentemente da Gaetano Giorgini che lo espose in una memoria intitolata "Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti di forma invariabile" ricevuta dalla Società italiana delle Scienze il 15 marzo 1830 ma pubblicata solo nel 1836.

Giorgini inquadra la sua memoria in un quadro epistemologico che potremo definire purista, infatti nell'introduzione osserva che nei trattati di meccanica

> "alle ricerche meccaniche altre, per lo più, se ne mescolano nei trattati puramente geometriche ed analitiche: ne deriva se non confusione, almeno una qualche apparente indeterminazione nei limiti della scienza, ed una complicazione nociva alla distinta intelligenza delle leggi che regolano l'azione delle forze".

[Giorgini 1836 p. 1]

A differenza di Chasles, Giorgini usa metodi analitici per iniziare a separare dalla meccanica la teoria "della comunicazione dei movimenti". Tale separazione

> "gioverebbe assai un altro molto più esteso e più difficile ramo di preliminari ricerche geometriche. Intendo parlare di quelle, che avrebbero per oggetto le proprietà puramente geometriche dei movimenti, o secondo il linguaggio del citato Carnot *la teoria dei movimenti geometrici;*"

[Giorgini 1836 p. 2]

Il punto di riferimento di Giorgini sono i lavori di Carnot, in particolare la *Géométrie de position* (1803) e i *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (1803).

Come è dichiarato nell'*Appendice alla memoria*, successivamente all'invio della memoria da parte di Giorgini alla Società, Chasles e Giorgini ebbero uno scambio epistolare; anche Frullani, il socio che presentò la memoria di Giorgini alla Società italiana della Scienze, fece pervenire all'autore delle osservazioni, nelle quali, come si desume dall'appendice, segnalava a Giorgini il lavoro di Giulio Mozzi "Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi" (Napoli 1763). L'appendice alla memoria ha lo scopo di rispondere alle osservazioni di Frullani e di dare notizia delle comunicazioni di Chasles che informavano Giorgini della sua pubblicazione contenente il teorema riguardante i movimenti rigidi infinitesimi.

Giorgini riconosce la priorità a Mozzi: "all'autore di esso [Mozzi] sia dovuto il Teorema fondamentale della teoria dei movimenti infinitamente piccoli dei corpi solidi, da me analiticamente esposto"; ma critica le dimostrazioni settecentesche di Mozzi come non rigorose perché

> "[...] fondate sull'erronea supposizione che un movimento infinitesimo di rotazione di un corpo solido attorno ad un punto fisso, sia determinato dall'archetto descritto da un suol punto del corpo, mentre questo elemento infinitesimo della curva non può essere bastante a determinare il piano di rotazione di esso; né la decomposizione di questo archetto infinitamente piccolo in due piccole rette, per questo effetto immaginata da Mozzi, è per verun conto ammissibile." [Giorgini 1836 p.47-48]

Avuta notizia da Chasles anche del teorema riguardante i movimenti rigidi finiti, Giorgini dà nell'appendice una propria dimostrazione sintetica dei due teoremi, quello relativo ai moti infinitesimi e quello relativo ai moti finiti, perché "appoggiandosi unicamente alla geometria più elementare, può essere atta a facilitare l'applicazione del Teorema alla Tecnologia pratica"[Giorgini 1836 p. 48].

Se da una parte i tre enunciati, quello di Mozzi, quello di Giorgini e quello di Chasles, non presentano differenze sostanziali nell'enunciato, dall'altra il contesto in cui si sviluppano le ricerche di Mozzi è talmente differente da quello in cui si sviluppano le ricerche di Chasles e Giorgini che si potrebbe parlare di risultati differenti.

Mozzi, come Lagrange, è interessato al primo istante di un moto e benché supponga che siano note le forze che agiscono sul corpo non le utilizza nella dimostrazione per stabilire il risultato sotto delle ipotesi più generali:

> "[...] il Problema del rotamento momentaneo, che solo ricerca in qual guisa incominci a muoversi il corpo in virtù delle note potenze impresse; imperrocche si fatta questione si dee sciorre senza l'ajuto dell'altra, essendo di quella infinitamente più semplice, anzi servendole, come in appresso vedremo, di base fondamentale." [Mozzi 1763 p. iv]

Dove l' "altra questione" si riferisce alla "generalissima questione" del "ritrovamento del moto in qualunque istante di tempo, essendo note le forze motrici, che in qualsivoglia maniera agiscono", questione, secondo Mozzi, "compiutamente risoluta da Eulero"[Mozzi 1763 pp. iii-iv].

3.0.2 La memoria di Rodrigues

Chasles riprende l'argomento del moto di un corpo rigido in alcune note dell'*Aperçu historique* [Chasles 1837], successivamente il tema è sviluppato da Olinde Rodrigues nella memoria [Rodrigues 1840] famosa per aver anticipato i quaternioni di Hamilton dando una legge non commutativa di composizione delle quadruple. La memoria è studiata in dettaglio in [Gray 2005], pertanto ne evidenzierò qui soltanto i punti salienti.

Rodrigues dà, forse per primo, una definizione sintetica della traslazione e della rotazione di un corpo rigido basandosi sulla sola definizione di corpo rigido.

Il corpo rigido è individuato da tre suoi punti non allineati:

> "J'entends par système solide un assemblage quelconque, continu ou discontinu, de points invariablement liés entre eux, de telle sorte que trois de ces points étant donnés de position, non en ligne droite, ainsi que leurs distances à tous les autres points du système, la situation de ce système soit invariablement déterminée pour chaque changement de situation du triangle formé par ces trois points ;"
>
> [Rodrigues 1840 p. 380]

Le rotazioni del corpo si ottengono fissando due punti di una terna di punti non allineati che individua il corpo:

> "Mais s'il n'y a que deux points donnés qui doivent rester immobiles dans le système, l'invariabilité des distances de tout autre point à ces deux-là entraîne d'abord l'immobilité de tous les points avec lesquels ils sont en ligne droite ; cette droite devient un axe fixe, autour duquel tout autre point du système ne peut que tourner dans une circonférence concentrique et normale à l'axe ; et comme tous les points du système sont invariablement liés à l'un d'eux et à l'axe fixe, la rotation de l'un implique la rotation de tous ; et l'amplitude de cette rotation est égale pour tous les points du système. Tout déplacement d'un solide autour de deux points fixes se réduit donc à une rotation d'égale amplitude et de même sens pour tous les points du système autour de l'axe formé par les deux points fixes. C'est ici le lieu de remarquer que toute rotation donnée peut être remplacée par une rotation de sens opposé, d'une amplitude complémentaire de celle de la première à 400°."
>
> [Rodrigues 1840 p. 380]

Le rotazioni attorno ad uno stesso asse si compongono con una legge additiva: "Des rotations différentes autour d'un même axe se composent en une rotation égale à leur somme, en ayant soin d'affecter de signes contraires les amplitudes de rotation qui s'effectueraient en sens opposés, l'ordre de succession des rotations restant d'ailleurs arbitraire. Si l'amplitude des rotations est infiniment petite, les arcs décrits par les points du solide déplacé à distance finie de l'axe, se confondent avec leurs cordes, lesquelles sont diversement inclinées entre elles, selon les angles des rayons menés de l'axe aux points du système." [Rodrigues 1840 p. 381]

Le traslazioni sono riguardate come delle rotazioni con asse normale alla direzione di traslazione e infinitamente lontano: "toute translation d'un système peut rigoureusement être considérée comme une rotation d'une amplitude infiniment petite au tour d'un axe fixe infiniment éloigné et normal à la direction de cette translation." [Rodrigues 1840 p. 381]

Sulla base di queste definizioni Rodrigues dà una trattazione sintetica della composizione delle traslazioni e delle rotazioni, per ognuna delle quali vengono determinato l'asse e l'ampiezza.
Successivamente tratta la scomposizione di un movimento rigido qualunque in composizioni di rotazioni e traslazioni ritrovando i teoremi già dati nella nota di Chasles. Tali scomposizioni non sono uniche.

La parte analitica è esposta in dettaglio in [Gray 2005] e pertanto darò qui solo qualche accenno.

Rodrigues non dà le formule analitiche per le rotazioni e le traslazioni ma ricava direttamente una parametrizzazione di un generico movimento rigido usando quattro parametri: l'ampiezza della rotazione del movimento rigido e gli angoli che l'asse di rotazione forma con un sistema di riferimento la cui origine è posta sull'asse di rotazione.

Il punto di partenza è la scomposizione dimostrata mediante la geometria pura di un moto rigido qualunque nella composizione di una rotazione attorno ad un asse e di una traslazione parallela all'asse; da questo risultato Rodrigues è in grado di dedurre una formula analitica per il moto rigido.

Supponendo di porre l'origine degli assi nell'asse di rotazione, l'asse è individuato dai suoi coseni direttori: siano l, m, n gli angoli formati dall'asse di rotazione e i tre assi coordinati, sia θ l'ampiezza della rotazione attorno all'asse. Rodrigues dimostra che il cambiamento di coordinate che avviene a seguito del movimento rigido dà luogo alla seguente formula:

$$\begin{cases} \Delta' x = 2\tan(\frac{\theta}{2})(Y' cosl - Z' cosh) \\ \Delta' y = 2\tan(\frac{\theta}{2})(Z' cosg - X' cosl) \\ \Delta' z = 2\tan(\frac{\theta}{2})(X' cosh - Y' cosg) \end{cases} \tag{3.1}$$

Successivamente Rodrigues passa ad esprimere la composizione di due movimenti rigidi con gli assi incidenti. Considerata come origine il punto di intersezione dei due assi siano v l'angolo formato dai due assi di rotazione, l, m, n gli angoli che individuano l'asse del primo movimento e l', m', n' gli angoli che individuano l'asse del secondo movimento, θ l'ampiezza della prima rotazione e θ' l'ampiezza della seconda rotazione. Da quanto dimostrato sinteticamente la composizione dà luogo ad un movimento rigido il cui asse di rotazione passa per l'origine degli assi e quindi sarà individuato dai certi parametri Θ, L, M ed N. Rodrigues perviene alle relazioni:

$$\begin{cases} \tan(\frac{\Theta}{2})\cos G = \frac{\tan(\frac{\theta}{2})\cos g + \tan(\frac{\theta'}{2})\cos g' + \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2})(\cos h \cos l' - \cos l \cos h')}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2}) cosv} \\ \tan(\frac{\Theta}{2})\cos H = \frac{\tan(\frac{\theta}{2})\cos h + \tan(\frac{\theta'}{2})\cos h' + \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2})(\cos l \cos g' - \cos g \cos l')}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2}) cosv} \\ \tan(\frac{\Theta}{2})\cos L = \frac{\tan(\frac{\theta}{2})\cos l + \tan(\frac{\theta'}{2})\cos l' + \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2})(\cos h \cos h' - \cos h \cos g')}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\theta'}{2})\cos v} \end{cases} \tag{3.2}$$

dalle quali deduce il valore dell'ampiezza $\cos\frac{\Theta}{2} = \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta'}{2})$ e la direzione dell'asse mediante i coseni direttori $\cos G$, $\cos H$ e $\cos L$.

La memoria di Rodrigues è rilevante per la descrizione sia sintetica che analitica di un movimento rigido qualunque e delle composizioni. Per le composizioni non solo individua l'importanza dell'ordine di composizione dei movimenti ma anche il fatto che l'ordine di composizione influisce sull'asse di rotazione ma non sull'ampiezza della rotazione risultante che rimane invariata.

Secondo Gray "Però lo scopo della memoria di Rodrigues non è calcolare la composizione di due rotazioni, un compito relativamente semplice e non interessante, bensì quello di attirare l'attenzione sui movimenti rigidi di un corpo come un importante campo di studi." [Gray 2005] p. 135.

Sempre secondo Gray il lavoro di Rodrigues può essere considerato, a ragione della sua profondità, come una anticipazione del concetto di gruppo anche se rimane aperto il problema del collegamento dei lavori di Rodrigues e di Chasles con i successivi sviluppi.

3.1 La memoria di Chasles 1860-61

Come per la memoria di Rodrigues anche alla memoria di Chasles possiamo attribuire lo scopo di attirare l'attenzione sul tema dei movimenti rigidi e sull'uso dei metodi della geometria pura in cinematica. Infatti concludendo la ricca introduzione Chasles dichiara che intende mostrare come "la materia è suscettibile di una certa estensione" [Chasles 1860 p. 858].

Dopo aver collocato con una introduzione lo studio dei movimenti rigidi nella cinematica e quest'ultima all'interno della meccanica razionale, seguendo Ampère, Chasles enuncia in liste tematiche 150 "proprietà" riguardanti i movimenti rigidi finiti senza fornire alcuna dimostrazione. La memoria si conclude con una ricostruzione storica che partendo dalla geometria greca arriva sino a includere i risultati dello stesso Chasles.

La memoria del 1860-61 è la più articolata dei lavori di Chasles sull'argomento; a differenza della memoria di Rodrigues che si limita alla trattazione sintetica e analitica dei movimenti rigidi, la memoria di Chasles ha come scopo mostrare l'estensione di cui è suscettibile lo studio dei movimenti rigidi, infatti parte delle proposizioni sono relativi all'applicazione dei movimenti rigidi alle coniche e alla superfici.

Possiamo dividere la memoria in tre parti:

- introduzione - lunga più o meno tre pagine
- una parte principale costituita da un elenco ragionato di 150 proposizioni - circa trentacinque pagine
- un resoconto storico che inquadra i movimenti rigidi finiti e infinitesimi dalla geometria antica sino all'Ottocento - circa venti pagine

Nell'introduzione Chasles argomenta a supporto della cinematica come disciplina all'incrocio tra geometria, meccanica e teoria delle macchine. Si appoggia alle autorevoli opinioni di Carnot e Ampère, richiamando esplicitamente lo studio della trasmissione del moto e dei movimenti indipendentemente dalle cause. Chasles introduce le proprie idee: la cinematica dovrebbe includere la trasmissione del moto in una catena di meccanismi. Chasles tratteggia una disciplina più vicina alla meccanica pratica che alla geometria.
Sul piano epistemologico Chasles riprende da Ampère una divisione della meccanica in Cinematica, Statica e Dinamica[5] rimarcando, però, una differenza fondamentale tra Statica e Cinematica: la prima possiede dei principi propri, quali il principio della leva, mentre la seconda non possiede principi propri.

La parte centrale enuncia 150 proprietà senza darne dimostrazione, si tratta di proposizioni e teoremi organizzati in elenchi e connessi tra loro con brevi frasi che chiariscono le ipotesi assunte e come esse si coordinino tra loro. La maggior parte di essi riguardano i movimenti rigidi ma alcuni riguardano proprietà di curve e superfici che si ottengono considerando i movimenti rigidi.

Le 150 proposizioni sono suddivise in liste e sottoliste tematiche:

1. Propriétés relatives au déplacement d'une figure plane dans son plan. (proprietà 1 – 18, pp. 858-860)
   Propriétés relatives à deux courbes égales. (proprietà 19 – 28, pp. 860 -862)
   Composition de rotations et des translations finies, dans un plan. (proprietà 29 – 32, pp. 862-863)

2. Propriétés relatives a deux figures symétriques placées d'une manière quelconque dans le même plan. (proprietà 33 – 45, pp. 905-909)

3. Déplacement d'une ligne droite dans l'espace. (proprietà 46 – 48, p. 909)

4. Déplacement d'une figure plan dans l'éspace. (proprietà 49 – 58, pp. 910-912)

5. Déplacement d'une figure sphérique sur la sphère – Déplacement d'un corps solide retenu par un point fixe. (proprietà 59 – 60, p. 913)
   Composition de deux rotation d'un corps autour de deux axes. (proprietà 61, 62, p. 913)

6. Déplacement d'un corps solide libre dans l'éspace. (proprietà 63 – 68, pp. 77 – 79)
   Direction et grandeur d'une corde dont le point-milieux est donnée. (proprietà 69 – 75, p. 79)
   Direction et grandeur d'une corde dont le point-milieu est donné. (proprietà 76

[5] Della epistemologia proposta da Ampère Chasles non riprende né la divisione della meccanica, scienza del primo ordine, in due scienze del secondo ordine *meccanica elementare* e *meccanica trascendentale*, né la presenza di una quarta scienza del terz'ordine la *dinamica molecolare*.

– 79, pp. 79-80)
Propriétés relatives à deux droites homologues. (proprietà 80 – 96, pp. 80-83)
Propriétés relatives à deux plans homologue. (proprietà 97 – 96, pp. 84)
Corps-milieu relatif à deux corps égaux. (proprietà 104 – 118, pp.189 - 192)
Propriétés relatives au système de deux rotation conjuguées. (proprietà 119 – 130, pp. 192-194)
Propriétés diverses relatives au cordes qui joignent le points homologues, et aux droites d'intersection des plans homologues. (proprietà 131 – 146, pp. 195-197)
Construction de l'axe central commun à deux corps égaux. (proprietà 147 – 149, pp. 487-488)
Construction de la vis avec laquelle on peut transporter un corps d'une position donnée dans une autre position déterminée par trois points. (proprietà 150, pp. 489)

Il punto di partenza è il risultato enunciato nella nota del 1830, stavolta inquadrato non più come corollario di teoremi sulle similitudini ma come risultato fondamentale di uno studio geometrico dei movimenti rigidi, attento sia ai problemi teorici che alle esigenze pratiche dell'applicazione della teoria allo studio delle macchine. La geometria pura, con le sue costruzioni che fanno uso delle sola posizione iniziale e finale del corpo, e nel caso delle trasformazioni infinitesime, della direzione della traiettoria dei tre punti non allineati[6] che definiscono un corpo rigido, fornisce il metodo adatto per una teoria che da una parte getti luce su fatti fondamentali della meccanica e dall'altra sia applicabile allo studio dei meccanismi.
Per inquadrare il risultato del 1830 è necessario uno studio approfondito delle rotazioni nello spazio e delle composizioni di rotazioni, aspetti per i quali Chasles riprende quanto già esposto da Rodrigues. Chasles cura particolarmente gli aspetti legati all'odierno concetto di transitività: in termini 'moderni' una azione di un gruppo su un insieme è detta transitiva se comunque presi due punti dell'insieme esiste un elemento del gruppo tale che il prodotto dia il secondo punto. Come detto nel primo capitolo le isometrie del piano sono transitive sui punti del piano, sui segmenti, le isometrie dello spazio sono transitive sui punti, sui segmenti e sulle *bandiere*.
Come si vede dall'articolazione in liste, la materia è organizzata da Chasles su più livelli: dopo una iniziale distinzione tra il moto nel piano e nello spazio, Chasles organizza le proprietà a seconda dell'ente sul quale agisce il movimento rigido: segmenti (terza lista), figure piane (quarta lista), corpi rigidi (quinta e sesta lista), per ognuno di questi Chasles dà una proprietà che oggi diremo di transitività.

Le prime proprietà riguardano i movimenti rigidi nel piano, liste 1 e 2. Chasles considera rotazioni e traslazioni come se fosse un ente unico: le prime sono rotazioni con centro in un elemento proprio del piano le secondo sono rotazioni con centro in

[6]La definizione adottata da Chasles è equivalente a quella da Rodrigues, infatti tre punti non allineati del corpo rigido definiscono un piano solidale al corpo.

un elemento improprio del piano. Ciò permette a Chasles di dare per certa l'esistenza di un centro di rotazione in tutti i casi:

> "Quelle que soit la position respective de deux figures, il existe toujours un point qui, étant considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; de sorte qu'il suffit de faire tourner la seconde figure autour de ce point pour la faire coïncider dans toutes ses parties avec la première (1)."
>
> [Chasles 1860 p. 859]

La prima proprietà è una proprietà di transitività; infatti, comunque prese due figure uguali nel piano, esiste una traslazione o una rotazione che porta la prima figura a coincidere con la seconda. Nel caso di una rotazione propriamente detta Chasles dà la costruzione dell'angolo di rotazione.

Il tema delle figure simmetriche nel piano è solo accennato perché "ces propriétés méritent d'être connues, quoiqu'on ne les ait point encore étudiées, que nous sachions du moins" [Chasles 1860], p. 905. Chasles propone metodi della geometria dello spazio per lo studio delle simmetrie del piano, ad esempio fa uso sistematico del *rabattement*, cioè del ribaltamento. La transitività emerge anche in questo tema: date due figure simmetriche qualunque traslazioni e rotazioni portano da una configurazione qualsiasi ad una configurazione di simmetria assiale, quest'ultima si può ricondurre ad una sovrapposizione delle figure mediante un ribaltamento[7].

Successivamente Chasles considera i movimenti rigidi nello spazio con le liste 3 -6, che dividono le proprietà a seconda dell'ente su cui agiscono i movimenti rigidi, come già anticipato per ognuno di essi Chasles dà una proprietà di transitività. Per quanto riguarda i segmenti e le figure piane Chasles si concentra nella scomposizione del movimento rigido in rotazioni piane o spaziali. Rotazioni in un piano per i segmenti e le rette:

> "Tout déplacement fini quelconque d'une droite dans l'espace peut s'effectuer par une simple rotation de la droite autour d'un axe fixe."
>
> [Chasles 1860 p. 909]

Rotazioni attorno ad un asse per le figure piane:

> "Tout déplacement d'une figure plane dans l'espace peut s'effectuer au moyen de deux rotations successives autour de deux droites rectangulaires, dont l'une est inclinée sur le plan de la figure, et l'autre est située dans ce plan ; [...]"

[7] Il ribaltamento, così come i *rabattement* della geometria descrittiva, portano delle considerazioni spaziali all'interno di configurazioni appartenenti alla geometria piana. Tali considerazioni costituiscono dei metodi spuri per la geometria piana e da una parte sembrano legate a riflessioni ancora poco mature sul tema, come ammesso da Chasles, dall'altra sembrano sottendere un ostacolo epistemologico che impedisce di considerare i movimenti rigidi e isometrie indirette alla stessa stregua nonostante siano due esempi particolari di omologie.

[Chasles 1860 p. 910]

Per le figure costruite simmetricamente e posizionate arbitrariamente nello spazio Chasles dimostra che esiste una direzione di traslazione che consente di giungere alla configurazione canonica della simmetria assiale mediante traslazione.

Per i corpi rigidi inizia con lo studio delle rotazioni proprie e delle loro composizioni. Se il concetto di rotazione nel piano non ha necessità di chiarimenti, tanto che rimane indefinito in tutti i lavori citati in questo paragrafo, la generalizzazione della rotazione nello spazio poteva dar luogo a diverse opzioni. Si poteva considerare una rotazione piana in uno dei piani dello spazio, la rotazione attorno ad un asse e ancora tutti i movimenti che fissano un punto. La nozione di rotazione dello spazio viene chiarita dalla riduzione del moto attorno ad un punto fisso alla rotazione attorno ad un asse. Come ricorda Chasles il risultato era già stato enunciato da Euler in [E478] e da D'Alembert.

Il tema più generale del moto di un corpo rigido libero nello spazio è trattato per ultimo e si apre con il teorema già enunciato nella memoria del 1830.

Chasles propone una generalizzazione ai moti finiti dell'asse di istantanea rotazione: l'asse centrale comune a due corpi uguali costruito a partire da tre coppie di punti omologhi A, A', B, B', C, C'.

L'elenco delle proprietà si chiude con la "*Construction de la vis avec laquelle on peut transporter un corps d'une position donnée dans une autre position déterminée par trois points*" [Chasles 1860 p. 489] con la quale Chasles enuncia la proprietà nel 1830. Nella nota del 1830 Chasles scrive:

> "*l'on peut toujours transporter un corps solide libre d'une position dans une autre position quelconque déterminée, par le mouvement continu d'une vis à laquelle ce corps serait fixé invariablement.*
>
> Étant donnée 3 de points de la nouvelle position du corps, il est facile de déterminer la position et la dimension de la vis."
>
> [Chasles 1830 p. 324]

La memoria di Chasles, a differenza di quelle di Rodrigues e di Giorgini, mostra una maggiore attenzione allo studio delle macchine e alle possibili applicazioni pratiche, anche con la ripresa della metafora del movimento della vite nella madrevite[8] già usata nella nota del 1830. La vite è una delle macchine semplici da sempre studiate nella meccanica pratica, lo studio e il disegno di viti faceva parte del corso di macchine che Chasles resse all'*École polytechnique* dal 1841 al 1851[9] e che prima di lui era stato retto da un altro grande geometra Jean-Victor Poncelet.

La stretta relazione tra lo studio dei meccanismi piani e lo studio dei movimenti geometrici, già presente nella nota del 1830 come fonte di ispirazione nella scoperta,

[8]Una madrevite è un pezzo forato e filettato atto ad accogliere una vite che si impana nel filetto della madrevite, è il termine tecnico corrispondente al francese *écrou* utilizzato da Chasles.

[9]Per una disamina dei programmi del corso di macchine si veda [Chasles 1880].

è riconfermata trent'anni dopo. In conclusione lo studio del movimento geometrico mediante i metodi della geometria pura portava ad un chiarimento di alcuni aspetti teorici della meccanica, come il principio delle velocità virtuali; era adatto alle applicazioni in quanto le costruzioni geometriche, basate solo sulle posizioni dei punti omologhi e sulla la direzione della velocità, non su forze e velocità, potevano essere applicate allo studio delle macchine e dei meccanismi piani.

3.1.1 La diffusione delle idee di Chasles

Pur non avendo svolto uno studio specifico sulla diffusione delle idee di Chasles includo alcune notizie a riguardo.

La diffusione delle idee di Ampère e Chasles è in parte contemporanea agli sviluppi descritti in questo paragrafo, in parte successiva. Lo stesso Chasles quando ritorna nel 1860 sul tema, a distanza di trent'anni dalla sua prima nota, rimarca come "le voeu de Carnot et d'Ampère s'est réalisé dans ce dernières années", infatti la cinematica si era diffusa sia nella trattatistica della meccanica razionale sia come soggetto di libri specialistici.

La diffusione delle idee sul moto geometrico e la cinematica si sovrappone in parte ai successivi sviluppi che prendono le mosse dalla memoria di Jordan "Mémoire sur le groupes de mouvements" [Jordan 1868] che, come già detto, sono legati alla nascente teoria dei gruppi di trasformazione e alla cristallografia. Nell'estratto pubblicato sui *Comptes rendus* nel 1867 e nella memoria pubblicata con qualche rimaneggiamento nel 1868, Jordan non richiama nessun lavoro specifico sui movimenti rigidi bensì asserisce che la composizione dei movimenti rigidi, sia nei casi finiti che infinitesimali, sono fatti noti e dimostrati nei corsi di meccanica. Il problema del collegamento dei lavori di Chasles e Rodrigues con i successivi sviluppi si manifesta proprio nell'assenza di una citazione esplicita nella memoria di Jordan.

Per quanto riguarda la geometria sono da segnalare la già nominata memoria di Erneste de Jonquières inclusa nelle *Melanges de géométrie pure* [Jonquières 1853] nella quale sono ripresi e dimostrati i risultati enunciati da Chasles nella memoria sui movimenti rigidi infinitesimi del 1843. La memoria di E. de Jonquières espande notevolmente le analogie tra le rotazioni infinitesime e i sistemi di forze, considerazioni che saranno riprese da Battaglini in [Battaglini 1872].

Nel 1870 Charles Brisse pubblica nel *Jornal di Liouville* una memoria contenente le dimostrazioni delle proprietà enunciate da Chasles nel 1843 anticipando la dimostrazione di quei risultati pubblicati da Chasles nella memoria del 1860 ma necessari alla dimostrazione delle proprietà della memoria del 1843 [Brisse 1870]; nel 1873 pubblica sempre nel Journal di Liouville una memoria [Brisse 1874] nella quale dà dimostrazione delle proprietà della memoria del 1860.

Per quanto riguarda la diffusione in Italia si segnala nel 1862 una memoria di Domenico Chelini "Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile" [Chelini 1862] e le note sulla meccanica razionale pubblicate da Battaglini nel *Giornale di matematiche* che dirigeva. La memoria di Chelini si distingue non solo per la definizione di traslazione e di rotazione piana ma anche per l'accostamento di M obius ai matematici francesi (o provenienti dall'ambiente francese) come Chasles, Poinsot, Giorgini e Rodrigues. Scrive Chelini riferendosi alla memoria [Chasles 1860]:

> "Mi sia infine permesso di aggiungere che questa teoria elementare erasi da me composta da parecchi anni per uso proprio, e che ora, qua e là ritoccata, può servire di utile introduzione allo studio delle nuove ed estese ricerche del Sig. Chasles sullo stesso argomento. Si veda la Memoria di quest'illustre geometra intitolata: Propriétés, dans l'éspace, d'une figure de forme invariable." [Chelini 1862 p. 362]

Nel volume del 1872 Battaglini pubblica una serie di note sulla meccanica razionale; una di queste riprende i movimenti rigidi infinitesimi [Battaglini 1872a] e un'altra i movimenti rigidi finiti [Battaglini 1872b]. Le due note non confluiranno nel capitolo dedicato alla cinematica del *Trattato elementare sulla meccanica razionale* [Battaglini 1873]. Per la somma delle rotazioni infinitesime, che abbiamo visto essere additive come le traslazioni infinitesime e le forze, Battaglini propone una formula. Come già visto nella memoria di Chelini, nelle note di Battaglini confluiscono elementi provenienti sia dalla tradizione francese che da quella tedesca.

Per quanto riguarda i trattati o le litografie di lezioni di meccanica razionale si registra che la Cinematica non compare nel trattato di meccanica del 1860 di Domenico Chelini [Chelini 1860], probabilmente ispirato più ai lavori di Poinsot che a quelli di Chasles. Nel trattato di meccanica elementare di Battaglini [Battaglini 1873] il tema non è affrontato con i metodi della geometria pura e non si propone lo studio del generico movimento rigido. La cinematica compare con un capitolo dedicato nel trattato di meccanica di Dorna (1872). I corsi litografati di Siacci del 1890-91 (Torino) e 1903-04 (Napoli) mostrano una completa acquisizione sia della cinematica che dei contributi di Chasles. La scomposizione di un movimento rigido qualunque nella composizione di una rotazione e di una traslazione compare in entrambe le edizioni ed è dimostrata mediante la geometria pura; nella seconda edizione Siacci attribuisce il teorema a Chasles.

3.2 Conclusioni

Gli sviluppi francesi descritti prendono le mosse dal concetto di moto geometrico, già abbozzato da Euler, e ripreso, forse indipendentemente, da Carnot e lo sviluppano sino a darne una forma compiuta nei *movimenti rigidi* del piano e dello spazio.

Viene privilegiato il quadro concettuale della meccanica piuttosto che quello delle trasformazioni geometriche; i *mouvemens* di Chasles e le trasformazioni derivanti dalle configurazioni simmetriche sono due casi particolari della teoria delle figure omografiche.

La discussione del principio delle velocità virtuali, che non aveva ancora uno status epistemologico ben definito, era di grande importanza: da una parte ispira la *Nouvelle théorie des rotations* di Poinsot, dall'altra spinge verso un approccio geometrico puro.

La memoria di Chasles del 1860-61 riassume e in qualche modo conclude le ricerche sui movimenti rigidi nell'ambito della cinematica. I successivi sviluppi si collocano nel quadro concettuale della nascente teoria dei gruppi.

Se da un lato le proposizioni di Chasles ricordano concetti tipici della teoria dei gruppi, come la chiusura, l'azione di un gruppo sulle figure di uno spazio, dall'altra ci sono importanti differenze dal punto di vista epistemologico. Alcuni movimenti rigidi di Chasles sembrano isometrie dirette, ma i suoi movimenti rigidi non coincidono del tutto con le isometrie dirette. I teoremi di Chasles assicurano che lo stesso risultato che si ottiene con un moto rigido qualsiasi può essere ottenuto mediante la composizione di rotazioni e traslazioni, cioè con la composizione di due sole isometrie dirette. La chiusura delle isometrie dirette rispetto all'operazione di composizione non appare in forma esplicita e matura. Infatti, secondo la formulazione di Chasles, qualsiasi composizione di traslazioni e rotazioni dà luogo allo stesso risultato della composizione di una sola rotazione e di una sola traslazione. Lo spirito dei lavori di Chasles è descritto da Charles Brisse come

> "Les mouvements que l'on conçoit le plus facilement sont les mouvements de translation et de rotation. Il est donc naturel de chercher si l'on ne pourrait pas amener un corps d'une première position à une seconde, à laquelle il est parvenu d'une manière quelconque, à l'aide de l'un de ces mouvements."
>
> [Brisse 1870 p. 281]

Come vedremo il quadro concettuale nel quale opera Jordan è completamente differente. Jordan assume che il movimento rigido generico dello spazio sia un movimento elicoidale, pertanto la totalità dei movimenti rigidi è quella dei possibili moti elicoidali, includendo, come casi particolari, la rotazione attorno ad un asse e la traslazione. Questa assunzione nasconde un passaggio epistemologico importante: nel campo della cinematica, dove si studia il moto indipendentemente dalle forze ma non dal tempo, ha senso contrapporre traslazioni e rotazioni ad un "movimento qualsiasi" la cui traiettoria sarà una curva qualsiasi; nella geometria, invece, quando si considera il moto indipendentemente dalle forze e dal tempo, le diverse traiettorie che uniscono la posizione iniziale alla posizione finale perdono di interesse e pertanto si ottengono i movimenti rigidi nel senso di isometrie dirette.

Capitolo 4

Tra geometria e cristallografia: i lavori di Jordan.

4.0.1 Introduzione.

Tratteremo qui la memoria di Jordan *Mémoire sur les groupes de mouvements* [Jordan 1868] nella quale l'autore si propone di dimostrare che gli infiniti sottogruppi dei movimenti rigidi dello spazio possono essere ricondotti ad un numero finito di tipi differenti (type différentes). Le principali caratteristiche della memoria sono l'utilizzo della nozione di gruppo e uno stretto rapporto con la cristallografia.
Di seguito si passeranno in rassegna alcuni elementi utili alla collocazione della memoria di Jordan sia nello sviluppo della matematica che della cristallografia.

Preliminarmente va detto che una prima versione della memoria intitolata *Sur les groupes de mouvements* venne letta all'Académie des Sciences il 5 Agosto 1867; i commissari erano i matematici Michel Chasles e Joseph-Louis-François Bertrand (1822 – 1900) e il mineralogista Gabriel Delafosse (1776 – 1878)[1]. Un estratto di questa prima versione venne pubblicato nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* [Jordan 1867]. Confrontando l'estratto pubblicato nei *Comptes rendus* [Jordan 1867] con la corrispondente parte della memoria [Jordan 1868] pubblicata in Italia nella seconda serie degli *Annali di matematica pura ed applicata* si possono notare alcune lievi differenze. Purtroppo non è stato possibile reperire la prima versione della memoria che non è conservata all'*Académie des Sciences* nella *Pochette de séance* del 5 Agosto 1857 [2]; si prenderà in considerazione, quindi, solo quella pubblicata nel 1868 che viene considerata come una seconda versione.

[1]Gabriel Delafosse (1776 – 1878), mineralogista francese, fu allievo di Haüy (1743 - 1822). Diede diversi contributi alla cristallografia, si veda [Burke 1966]. Si noti che fu Delafosse a prendere in considerazione degli spazi vuoti tra le *molecole integranti* che compongono i modelli geometrici della struttura cristallina proposti da Haüy [Burke 1966 p. 170]. Proprio la considerazione di spazi vuoti intermolecolari portò ad utilizzare i reticoli geometrici come modelli della struttura interna di un cristallo. Come vedremo sono questi modelli studiati da Bravais ad essere ripresi da Jordan.

Tra il 1865 e il 1868 Jordan pubblica diversi lavori sulla *teoria di Galois*[2], che è senza dubbio il suo principale tema di ricerca in quel periodo, nel 1869 venne pubblicata la prima parte del suo *Traité des substitutions et des équations algébriques*[3], le parti successive del trattato saranno stampate nel 1870. Nel *Traité* Jordan espone sistematicamente la teoria dei gruppi di sostituzione e la teoria di Galois.

La memoria sui gruppi di trasformazioni e i lavori sulle sostituzioni e la teoria di Galois sono sviluppati nello stesso periodo. La nozione di gruppo, come vedremo, collega strettamente diversi ambiti di ricerca: teoria di Galois, la cinematica dei movimenti rigidi, la cristallografia, che si influenzano reciprocamente. Le analogie tra le sostituzioni e i movimenti rigidi, pensati in maniera astratta, spingono Jordan a parlare di gruppi di trasformazioni e, allo stesso tempo, l'introduzione di termini tipicamente cristallografici come *meriedrico* e *oloedrico* nella teoria dei gruppi di sostituzione denota una mutua influenza dei differenti ambiti di ricerca.

Tra i primi ad utilizzare una nozione di gruppo vi sono Cauchy, Galois e Liouville, che pubblicò le opere di Galois nel 1846 nel suo Journal[4].

Per quanto riguarda la nozione di gruppo Jordan non dà alcun riferimento bibliografico, se non in una nota nella quale richiama una analogia con un teorema che attribuisce a Cauchy e a Betti e che riferisce di aver riscoperto autonomamente. Il teorema è facilmente rintracciabile nella prima parte del *Traité des substitutions* anche se Jordan non menziona né Cauchy né Betti. Enrico Betti (1823 – 1892), secondo la nota biografica di Tricomi, si occupò della teoria di Galois nel decennio che va dal 1850 al 1860; qui ci si riferirà alla memoria *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* [Betti 1852].

Per quanto riguarda la cristallografia possiamo partire dall'unica citazione esplicita fatta da Jordan nella memoria [Jordan 1868]: gli *Études cristallographiques*[5] di Bravais. Gli *Études cristallographiques* citati sono un volume postumo di circa 270 pagine che raccoglie gli scritti di Bravais sulla cristallografia teorica e alcuni rapporti sulle memorie presentate all'*Institut*. Purtroppo Jordan non indica a quale dei lavori

[2]La dicitura *teoria di Galois* per lo studio della risolubilità mediante radicali delle equazioni algebriche si diffuse proprio a partire dal *Traité des substitutions* di Jordan ed è ancora in uso oggi.

[3]Il trattato, come emerge dal fascicolo personale di Jordan agli archivi dell'Académie des Sciences [1], divenne ben presto una rarità bibliografica, infatti le copie conservate dall'editore andarono perdute durante la Comune di Parigi del 1871. Nonostante ciò il trattato ebbe un ruolo importante nella sistematizzazione e diffusione della teoria dei gruppi di sostituzione e della teoria di Galois. Scrive a questo proposito lo storico della matematica Morris Kline "Nel 1846 Liouville curò e pubblicò nel 'Journal de mathématiques' parte dei lavori di Galois, compresa una revisione dell'articolo del 1831. In seguito Serret, nel suo *Cours d'algèbre supérieure* (3^a ed.) del 1866, diede una esposizione delle idee di Galois. La prima presentazione chiara e completa delle idee di Galois fu data da Camille Jordan nel suo *Traité des substitutions et des équations algébriques*." [Kline 1962 p. 882]

[4]*Journal de mathématiques pures et appliquées, 1re série* **11** (1846), p. 381-444
`http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1846_1_11_A47_0`
Le opere di Galois furono pubblicate in un volume dedicato solo nel 1897.

[5]Il volume fu curato presumibilmente da Élie de Beaumont che sigla l'*Avertissement* iniziale ed è autore dell'*Éloge historique* letto all'Académie e riportato nel volume.

di Bravais contenuti nel volume si riferisce. Nel presente lavoro mi riferirò a [Bravais 1850].

Una indicazione della diffusione degli scritti di Bravais si ha nell'*Avertissement* siglato E. D. B, presumibilmente Élie de Beaumont, che esordisce in questo modo: "Les Études cristallographiques de M. Auguste Bravais n'ont pu avoir jusqu'à présent qu'un nombre de lecteurs assez restreint parce qu'elles sont disséminées dans deux Recueils différents." Gli scritti di Bravais si inquadrano nella cristallografia teorica e trattano con metodi elementari modelli geometrici della struttura cristallina come poliedri e reticoli.

In diversi punti delle sue memorie Bravais discute della sovrapponibilità[6] di alcuni poliedri o di reticoli; è proprio da questa tipologia di problemi che prende le mosse Jordan. Una delle memorie più interessanti di Bravais per quanto riguarda i modelli geometrici dei cristalli è *Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace*[Bravais 1850].

Bravais utilizza un proprio originale modello geometrico di un cristallo e, a questo proposito, E. de Beaumont nell'elogio di Bravais letto all'Académie scrive:

> "A ses yeux les cristaux sont des *assemblages* de molécules identiques entre elles et semblablement orientées, qui, réduites par la pensée à deux point unique, leur centre de gravité, sont disposées en rangées rectilignes et parallèles, dans chacune desquelles la distance de deux points est constante. Les points d'un assemblage sont alignés en rangées suivant une infinité de directions diverses; mais la connaissance de trois rangées suivant une infinité de directions diverses; mais la connaissance de trois rangées non parallèles et non comprises dans la même plan suffit pour déterminer complétement l'assemblage dont elles font partie. On peut concevoir une infinité d'assemblage entièrement différentes. Une étude mathématique approfondie fait découvrir a M. Bravais les degrés de symétrie plus ou moins grands dont ils sont susceptibles. Il trouve les axes et le plans de symétrie qu'ils peuvent présenter. Il établit que, suivant le nombre et la disposition de ces axes et plans de symétrie, les assemblages qui en possèdent se divisent en six classes."

[6] A partire dalla legge di simmetria di Haüy (1743 - 1822), in cristallografia, la sovrapponibilità è uno degli aspetti più importanti dei modelli geometrici dei cristalli: "Elle [la legge di simmetria]consiste en ce qu'une même espèce de décroissement se répète sur toutes les parties du noyau dont telle est la ressemblance, que l'on peut substituer l'une à l'autre, en changeant à l'égard de l'oeil la position de ce noyau, sans qu'il cesse de se présenter sous le même aspect. Je donne à ces parties le nom d'identiques ; et je vais avant tout fixer d'une manière plus précise l'idée qu'on doit attacher à ce mot." [Haüy 1815 p. 81]. Si noti che la parola 'simmetria' a cavallo tra Settecento e Ottocento non aveva un significato ben definito; aveva perduto il senso di commensurabile che aveva avuto nell'antichità ed era stata usata alla fine del Settecento da Legendre nel caso dei poliedri, ma era usata anche nel caso dei polinomi simmetrici e nella cristallografia. Come emerge dagli studi di Hon e Goldstein, Haüy sembra il primo ad averla accostata ad una 'invarianza' rispetto a delle 'trasformazioni'. Si veda a questo proposito [Hon e Goldstein 2008 p. 197-198].

[De Beaumont 1865 p. VII]

Un altro modello geometrico utilizzato da Bravais e studiato nella seconda parte della memoria [Bravais 1850] si ottiene pensando le molecole o atomi[7] non come puntiformi bensì con una forma poliedrica. I poliedri che rappresentano le molecole sono chiamati "polyèdre moléculaire" o anche "polyèdre atomique". Considerando i cristalli formati da una sola sostanza, i centri di gravità dei poliedri formeranno un reticolo. Una delle questioni sollevate da Bravais su questo secondo tipo di modello è se, considerando una sovrapposizione del reticolo formato dai centri dei poliedri, a questa corrisponda anche una sovrapposizione dei vertici dei poliedri [Bravais 1850 p. 248].

I modelli geometrici dei cristalli portarono Bravais a indagare le proprietà geometriche dei *reticoli* geometrici (*résaux* in francese) e a enunciare le proprietà interessanti da un punto di vista cristallografico nella forma di teoremi geometrici.

4.0.2 La memoria.

La memoria, lunga settantatré pagine, è divisa in tredici paragrafi. Il primo e il secondo sono dedicati all'esposizione del problema e alle nozioni preliminari come la composizione dei movimenti, la nozione di gruppo e di trasformato. Il terzo e il quarto paragrafo sono dedicati allo studio approfondito dei gruppi formati da sole traslazioni e da sole rotazioni. Il quinto paragrafo è dedicato al gruppo ausiliare e alla divisione dei gruppi in sei categorie; Jordan discute ogni categoria in un paragrafo a sé stante. La discussione si basa sull'aggiunta di opportuni generatori al gruppo ausiliare. Il dodicesimo paragrafo presenta uno schema di ricapitolazione delle categorie ed una enumerazione dei distinti sottogruppi appartenenti ad ogni categoria.

Jordan esordisce ricordando che ogni movimento di un corpo rigido è un movimento elicoidale, pertanto sarà conosciuto quando saranno dati la posizione nello spazio dell'asse A di rotazione e di traslazione, l'angolo r rotazione attorno all'asse A e il modulo.

Jordan si riferisce ai movimenti rigidi dello spazio (isometrie). A differenza di Chasles per cui il risultato di un qualsiasi moto di una figura poteva essere ottenuto con un movimento rigido elicoidale, in Jordan il riferimento al moto qualsiasi scompare, si considerano solo i movimenti elicoidali e i casi particolari traslazioni e rotazioni.
Questo è un passaggio epistemologico importante. Ma Jordan non dà una giustificazione. Il passaggio è legato a doppio filo alla chiusura rispetto alla composizione e quindi alla nozione di gruppo.

[7] Per quanto riguarda l'utilizzo quasi ambivalente dei termini *molecola* e *atomo*, si noti che nel periodo in cui Bravais pubblica le sue opere i termini non avevano ancora quella connotazione che acquisiranno alla fine del secolo con gli sviluppi successivi alla scoperta dell'elettrone da parte di Thomson.

Jordan fissa la notazione $A_{r,t}$ per un generico movimento rigido dello spazio, anche se quando si riferisce ai movimenti senza necessità di specificare il movimento usa anche la notazione M, $M' \dots$ e ricorda che se si imprimono successivamente ad uno stesso corpo rigido due movimenti $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$ il movimento risultante sarà ancora un movimento elicoidale $A''_{r'',t''}$ che denota $A_{r,t}A'_{r',t'}$ senza introdurre alcun segno per la composizione. Jordan aggiunge che "On donne généralement dans le cours de mécanique la solution de cette question dans le cas des mouvements infiniment petit. Le cas où les mouvements considérés ont une amplitude finie se traite également sans difficulté." [Jordan 1868 p. 167]. Il breve commento di Jordan conferma quanto Chasles scrive a proposito della diffusione della cinematica nella sua memoria sui movimenti rigidi del 1860-61. Se il caso generale viene solo ricordato nel primo paragrafo, invece, le composizioni di due movimenti sono trattate nel dettaglio, caso per caso nel secondo paragrafo.

Ricordate le nozioni preliminari, Jordan presenta il problema fondamentale della sua memoria: "Étant donné certains mouvements $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}$, $A''_{r'',t''}$ etc. former les mouvements divers qui peuvent résulter de la combinaison de ceux-là exécutés successivement un nombre quelconque de fois et dans un ordre quelconque." [Jordan 1868 p. 168]. Jordan considera quindi l'analogo di un sistema di generatori, ma anziché parlare di 'gruppo generato', come si fa comunemente oggi, usa l'espressione "gruppo derivato dalle trasformazioni".

Specifica il senso della parola gruppo: "Le groupe formé par les mouvements cherchés jouit de cette propriété caractéristique, que si M et M'' sont deux mouvements quelconques faisant partie de ce groupe, MM'' en fera partie." [Jordan 1868 p. 168]

Fissati un certo numero di "movimenti che servono da punto di partenza", cioè i generatori del gruppo, si ottiene un gruppo nel senso dato da Jordan. Pertanto, prosegue Jordan, facendo variare i generatori $A_{r,t}$, $A'_{r',t'}, \dots$ si otterranno una infinità di gruppi, ma l'infinità di gruppi può essere ricondotta ad un numero finito di tipi il cui studio dettagliato è lo scopo della memoria.

Sempre nel primo paragrafo Jordan esplicita il legame tra il problema della classificazione dei sottogruppi dei movimenti rigidi e i modelli cristallografici considerati da Bravais. Infatti secondo Jordan la questione dello studio dei tipi può essere presentata sotto un punto di vista più geometrico del precedente. Immaginiamo una generica molecola posizionata sul punto m dello spazio orientata arbitrariamente. Siano m, $m' \dots$ le diverse posizioni che la molecola assumerebbe se le si imprimessero i movimenti M, $M' \dots$ appartenenti ad un dato gruppo. Il sistema di molecole sarebbe sovrapposto a se stesso da qualsiasi movimento appartenesse al gruppo: infatti, argomenta Jordan, μ la posizione nella quale il movimento M'' porta la molecola m', ad esempio: il movimento $M'M''$ porti m in μ: allora μ fa parte della successione m, m', $m'' \dots$

> "Le problème qu'il s'agit de résoudre peut donc s'énoncer de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes:

> 1° Former tous les groupes possibles de mouvements.
>
> 2° Former de toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux-mêmes dans diverses positions.
>
> C'est sous ce second point de vue que M.r Bravais a étudié cette question: les cas particuliers qu'il a traités et dont il a fait une remarquable application à la cristallographie sont les plus importants. Je crois néanmoins qu'il y a encore aujourd'hui quelque intérêt à traiter le problème dans toute par sa généralité."
>
> [Jordan 1868 p. 168]

Il secondo paragrafo della memoria è dedicato alle nozioni preliminari che servono alla risoluzione del problema: la composizione dei movimenti rigidi, la nozione di trasformato e un teorema relativo ai movimenti coniugati[8]. Jordan ricorda le regole di composizione dei diversi movimenti rigidi: composizioni di traslazioni, composizione di rotazioni con assi concorrenti, composizione di rotazioni con assi paralleli, composizione di una rotazione e di una traslazione perpendicolare all'asse, composizione di una traslazione e di una rotazione etc.

Come vedremo più avanti nel dettaglio, la nozione di *trasformazione* data nella memoria del 1868 è leggermente diversa da quella adottata nel *Traité des substitutions*. Nella memoria i movimenti geometrici agiscono sulle figure del piano, pertanto il termine 'trasformato' è riservato all'azione dei movimenti rigidi sugli enti geometrici mentre nel *Traité des substitutions* la nozione di elemento trasformato coincide con quella di coniugato.

> "Soient M un mouvement quelconque, A un point ou une droite arbitraire, A' la nouvelle position que prend A supposé entraîné dans le mouvement M : nous dirons que A' est transformé de A par M.
>
> [Jordan 1868 p. 170]

Jordan introduce anche una relazione tra i trasformati mediante i movimenti appartenenti ad uno stesso gruppo:

> "Nous appellerons points ou droites pareils ou de même espèce, relativement à un groupe de mouvements donné, ceux que les divers mouvements de ce groupe transforment les uns dans les autres."
>
> [Jordan 1868 p. 170-171].

La nozione di trasformato è usata per dare un teorema che enuncia una delle proprietà del coniugio:

[8]Gli elementi coniugati e l'azione di coniugio sono uno dei primi oggetti studiati, non a caso il teorema è attribuito a Cauchy e a Betti che furono tra i primi a occuparsi della teoria delle sostituzioni. Attualmente l'azione di un gruppo è definita in termini insiemistici così non è nelle opere Jordan e dei suoi contemporanei. Però, sia nella memoria che nel *Traité*, Jordan esplicita la relazione esistente tra due elementi appartenenti alla stessa classe di coniugio.

> "Théorème. Soient $M = A_{r,t}$ et $N = B_{\rho,\tau}$ deux mouvements quelconques; $M^{-1} = A_{-r,-t}$ le mouvement égal et contraire a $A_{r,t}$: on aura $M^{-1}NM = B'_{\rho,\tau}$, B' étant l'axe transformé de B par M(*)."
>
> [Jordan 1868 p. 171]

In nota Jordan aggiunge: "Cette proposition présente une analogie remarquable avec un théorème fort utile dans la théorie des substitutions, qui a été donné par Cauchy et par M. Betti, et que j'ai retrouvé depuis au début de mes recherches sur le même sujet." [Jordan 1868 p. 171].

Possiamo fare una comparazione tra le definizioni date nella memoria e quelle date nel Traité des substitution [Jordan 1870] "27. On dira qu'un système de substitutions forme un groupe (ou un *faisceaux*) si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système." [Jordan 1870 p. 22].

Sempre nello stesso paragrafo dà la definizione di quello che oggi riguarderemo come un gruppo generato da un sistema di generatori: "Les diverses substitutions obtenue en opérant successivement tant qu'on voudra et dans un ordre quelconque certaines substitutions données $A, B, C, \ldots$, forment evidément un groupe: nous l'appelerons *groupe derivé* de $A, B, C, \ldots$, et nous le désignerons par le symbole $(A, B, C, \ldots)$." [Jordan 1870 p. 22]

Al paragrafo 32 del Traité Jordan dà una definizione di *trasformata* leggermente differente di quella data per le trasformazioni "Soient A et B deux substitutions. Formons la substitution $B^{-1}AB$; nous l'appelerons la transformée de A par B." [Jordan 1870 p. 23].

Dopo la definizione Jordan enuncia il teorema analogo a quello visto per i movimenti rigidi:

> "Théorème. – Les cycles de la transformée $B^{-1}AB$ sont respectivement composés du même nombre de lettres que ceux de A, et chacun d'eux s'obtiendra en remplaçant chacune des lettres du cycle correspondente de A par la lettre que B lui fait succéder."
>
> [Jordan 1870 p. 23]

Nel sesto paragrafo Jordan spiega il metodo usato per la divisione in *categorie* dei gruppi. Jordan associa ad ogni gruppo un *gruppo ausialiario* formato da sole rotazioni, questo gli permette di enumerare i gruppi ausiliari.

> 16. Soient $A_{r,t}A'_{r',t'}$ etc ... un système de mouvements hélicoïdaux quelconques, formant un groupe: soient $B, B' \ldots$ des droites parallèles à $A, A' \ldots$ menées par un point quelconque O: les rotations $B, B' \ldots$ forment un groupe: car soit $C_{\rho,0}$ la rotation résultante de deux d'entre elles $B_{r,0}, B_{r',0}$: nous avons vu que le mouvement résultant de $A_{r,t}$ et de $A'_{r',t'}$ est égal à $C'_{g,\tau}$, C' étant un axe parallèle à C' et τ une translation convenable. Ce mouvement faisant partie de la suite $A_{r,t}, A'_{r',t'} \ldots$

> la rotation correspondante $C_{\rho,0}$ fera partie de la suite $B_{r,0}, B'_{r',0} \dots$ donc cette suite de mouvements est telle que le mouvement résultant de deux quelconques d'entre eux fait partie de la suite, ce qui est la définition caractéristique d'un groupe de mouvements. Les groupes de mouvements tels que $A_{r,t}, A'_{r',t'} \dots$ peuvent être partagés en catégories, suivant le type auquel appartient le groupe auxiliaire fermé par les rotations $B_{r,t}, B_{r',t'} \dots$ d'où plusieurs cas à distinguer dans notre discussion.
>
> [Jordan 1869 p. 180-181]

Nella memoria le relazioni tra gruppi non sono concepite in termini di corrispondenza dei movimenti, infatti nella memoria Jordan non dà alcuna nozione analoga alla nostra nozione di isomorfismo. Il problema della relazione tra gruppi diversi ma equivalenti non si pone perché il procedimento di costruzione del gruppo ausiliario li riconduce allo stesso tipo o alla stessa categoria.
Tuttavia una definizione di quanto noi oggi chiamiamo omomorfismo è data nel *Traité des substitutions*. Jordan chiama *isomorfismo* ciò che noi chiamiamo comunemente omomorfismo:

> "67. Un groupe Γ est dit *isomorphe* à un autre groupe G, si l'on peut établir entre leurs substitutions une correspondance telle: 1° que chaque substitution de G correspond à une seule substitution de Γ, et chaque substitution de Γ à une ou plusieurs substitution de G; 2° que le produit de deux substitution de G correspond au produit de leurs correspondented respectives.
>
> L'isomorphisme sera dit *mériédrique*, si plusieurs substitutions de G correspondent à une même substitution de Γ, *holoédrique* dans le cas contraire."
>
> [Jordan 1870, p. 56]

La definizione data da Jordan corrisponde a quella di omomorfismo, ma non utilizza il concetto di insieme e di applicazione di insieme che saranno sviluppati successivamente da Georg Cantor (1845 - 1918). L'*isomorfismo meriedrico* di Jordan è un omomorfismo suriettivo (epimorfismo) mentre un *isomorfismo oloedrico* di Jordan è oggi un isomorfismo *tout-court*. Jordan utilizza i termini *meriedrico* e *oloedrico*, che al tempo erano usati nella cristallografia per distinguere due modi di cristallizzazione differenti.

La relazione tra un gruppo e il suo gruppo ausiliario può sembrare a prima vista un omomorfismo, le eventuali traslazioni corrispondono all'unità del gruppo ausiliario, le rotazioni con assi paralleli tra loro e stessa ampiezza sono inviate nella stessa rotazione del gruppo ausiliario. La composizione di due rotazioni con assi paralleli non coincidenti dà luogo ad una traslazione corrispondente all'unità del gruppo ausiliario, ma la composizione delle corrispondenti rotazioni nel gruppo ausiliario dà luogo ad una rotazione di ampiezza uguale alla somma delle due ampiezze, rotazione che può essere diversa dall'unità del gruppo (rotazione di angolo nullo o di un angolo giro).

Il gruppo ausiliario è un sottogruppo del gruppo di trasformazioni composto da rotazioni con assi incidenti in un punto; l'introduzione di nuovi generatori nel gruppo ausiliario permette di trovare nuovi gruppi. Si possono aggiungere dei movimenti al gruppo ausiliario in modo da ottenere tramite le aggiunte i diversi gruppi che hanno lo stesso gruppo ausiliario. Diventa dunque cruciale nel metodo adottato da Jordan lo studio approfondito dei gruppi di traslazioni e di rotazioni, che Jordan conduce nel quarto e quinto paragrafo della memoria, facendo ricorso all'idea di un numero finito di generatori, siano essi movimenti finiti o infinitesimi. L'individuazione dei generatori fornisce un criterio per la suddivisione in *tipi* dei gruppi ausiliari. Ciò permette a Jordan di ottenere diversi gruppi aventi lo stesso gruppo ausiliare aggiungendo i generatori opportuni.

Nella memoria vengono considerati sia movimenti finiti che movimenti infinitesimi. Come per Chasles, anche per Jordan, un qualunque movimento finito può essere generato dalla ripetizione per un numero opportuno di volte di un particolare movimento infinitesimo. Ad esempio una qualsiasi traslazione finita lungo una direzione determinata può essere generata dalla ripetizione di una traslazione infinitesima lungo la stessa direzione 'un opportuno numero di volte'; una rotazione infinitesima opportunamente ripetuta darà luogo ad una rotazione con lo stesso asse ma di ampiezza finita.

Per quanto riguarda i gruppi di sole traslazioni Jordan dimostra che se nel gruppo non vi sono movimenti infinitesimi allora si danno tre casi: i gruppi generati da una sola traslazione, i gruppi generati da due traslazioni finite lungo due direzioni differenti e, infine, i gruppi derivati da tre traslazioni finite formanti un angolo triedro. Nel caso in cui vi siano movimenti infinitesimi dà luogo a più sottocasi. Se vi sono tre traslazioni infinitesime lungo tre direzioni differenti allora queste generano il gruppo contenente tutti i movimenti dello spazio. Rimangono da prendere in considerazione il caso in cui ci siano due traslazioni infinitesime con direzioni differenti e il caso di una sola traslazione infinitesima. Nel primo caso, oltre al gruppo generato dalle sole traslazioni infinitesime, si ha il gruppo ottenuto aggiungendo come ulteriore generatore una traslazione finita con direzione perpendicolare ad entrambe le direzioni delle traslazioni infinitesime. Nel secondo caso, oltre al gruppo generato dalla sola traslazione infinitesima, si hanno i due gruppi ottenuti aggiungendo una o due traslazioni perpendicolari alla direzione della traslazione infinitesima (e tra loro).

I gruppi contenenti solo rotazioni sono classificati in 7 gruppi numerati dal 10 al 17. Il diciassettesimo gruppo contiene tutte le rotazioni attorno ad un punto fisso. Come per le traslazioni Jordan inizia a discutere i gruppi che non contengono rotazioni di un angolo infinitesimo. Le rotazioni attorno ad uno stesso asse si riducono alla ripetizione della rotazione il cui argomento ρ sarà il minimo degli argomenti.

Tale argomento dice Jordan sarà "una parte aliquota di 2π"[9] cioè sarà un divisore di 2π. Infatti si può applicare un ragionamento simile a quanto visto per le traslazioni, se r è l'argomento di una qualsiasi altra rotazione con lo stesso asse A delle precedenti e sia ϵ il resto della divisione $r = m\rho + \epsilon$, se ϵ non è nullo allora possiamo ottenere la rotazione $A_{\epsilon,0}$ che ha argomento ϵ minore di ρ contro l'ipotesi che ρ sia l'argomento minimo. Per la discussione dei gruppi contenenti rotazioni con diversi assi concorrenti Jordan considera tre casi: le rotazioni binarie, cioè le rotazioni con ampiezza π, i gruppi di rotazioni con due assi concorrenti e, infine, i gruppi di rotazioni con più assi concorrenti. Nel caso di due o più assi, l'angolo piano formato dai due assi α concorre a determinare sia la direzione dell'asse che l'ampiezza della rotazione risultante, ciò dà luogo a delle limitazioni per α.

Jordan ricava dalla discussione dei gruppi di sole rotazioni la seguente divisione in "tipi", che è fondamentale nel lavoro di Jordan per la divisione in "categorie" dei gruppi di movimenti qualsiasi.

> "15. En résument cette discussion, on voit que les groupes de mouvements de rotation se ramènent a 6 types distinctes.
>
> *1.^{er} type.* Rotations ayant toutes le même axe A, et ayant pour amplitudes respectives les diverses multiples d'un même angle ρ, ρ étant un diviseur de 2π ou un angle infiniment petit: dans ce dernier cas, toute rotation autour de A fait partie du groupe.
>
> *2.^{ème} type.* S'obtient en adjoignent aux mouvements du type précédent des rotations binaires autour d'axes $B, B' \ldots$ situé dans le plan normal à A, équidistants et en nombre de $\frac{2\pi}{\rho}$ (Si ρ est infiniment petit, ces axes deviannent contigus les uns aux autres et tout droite située dans le plan normal fait partie de la série $B, B' \ldots$).
>
> *3.^{ème} 4.^{ème}* et *5.^{ème} types.* Ils sont formés respectivement de l'ensemble des mouvements qui superposent à lui même un icosaèdre, un octaèdre, ou un tétraèdre régulier.
>
> 6.^{ème} *type.* Il est formé par l'ensemble de tous les mouvements de rotation possibles."
>
> [Jordan 1868 p. 180]

Nella lista non compaiono il gruppo dell'esaedro e del dodecaedro, infatti i gruppi sono isomorfi (nel senso attuale del termine) ai gruppi dei rispettivi poliedri duali, l'ottaedro e l'icosaedro.

Dato un gruppo qualunque di movimenti elicoidali $A_{r,t}, A'_{r',t'}$ il suo gruppo ausiliario è formato da sole rotazioni, pertanto i gruppi possono essere suddivisi in sei categorie a seconda del tipo del proprio gruppo ausiliario. Ciò permette a Jordan di enumerare 173 sottogruppi propri del gruppo dei movimenti rigidi dello spazio procedendo con l'aggiunta di opportuni generatori ai gruppi di ogni tipo.

I 174 gruppi sono quindi suddivisi in sei categorie a cui si aggiungono i gruppi di sole traslazioni e di sole rotazioni:

[9] "une partie aliquote de 2π" [Jordan 1868 p. 174] Dove la parola 'aliquote' ha il significato di parte contenuta un certo numero esatto di volte in un tutto. Si veda a proposito la voce 'aliquoto' del dizionario di Nicolò Tommaseo.

- gruppi formati da sole traslazioni: gruppi 1 – 9;
- gruppi formati da sole rotazioni: gruppi 10 – 17;
- la prima categoria contiene i gruppi 18 – 77, il cui gruppo ausiliario è un gruppo di rotazioni del primo tipo;
- la seconda categoria contiene i gruppi 78 – 146, il cui gruppo ausiliario è un gruppo di rotazioni del secondo tipo; si ottengono aggiungendo una rotazione binaria o una traslazione ai precedenti;
- la terza categoria contiene i gruppi 149 – 164 che hanno come gruppo ausiliare il gruppo delle rotazioni che sovrappongono un tetraedro regolare a se stesso; si ottengono aggiungendo delle traslazioni o sostituendo dei movimenti con movimenti di ampiezza;
- i sei gruppi della quarta categoria (gruppi 166 – 172) hanno per gruppo ausiliare quello delle rotazioni che sovrappongono un ottaedro regolare a se stesso;
- la quinta categoria contiene solo il gruppo 173, il gruppo ausiliare è formato dalle rotazioni che sovrappongono un icosaedro a se stesso.
- la sesta categoria contiene solo il 174° gruppo composto da tutti i movimenti dello spazio, il suo gruppo ausiliare è composto da tutte le rotazioni possibili attorno al punto O.

In conclusione Jordan distingue dunque tre tipologie di gruppi riprendendo in parte la nomenclatura in uso nella cristallografia: i *gruppi principali*, i *gruppi meriedrici* e i *gruppi emiedrici*. Jordan non dà una definizione generale di gruppo principale limitandosi ad elencarli[10]. I gruppi meriedrici si ottengono dai gruppi principali considerando una frazione determinata dei movimenti che li costituiscono. I gruppi emiedrici sono quei gruppi meriedrici contenenti esattamente la metà dei movimenti di un gruppo principale.
I gruppi non principali si possono anche distinguere in due categorie: quelli che si possono ottenere dai gruppi principali supponendo alcuni dei "parametri infinitamente piccoli" e quelli che non si possono ottenere. Jordan afferma che la seconda categoria è costituita da gruppi meriedrici e offre alcuni esempi.

[10] "Parmi le 174 groupes que nous venons d'énumérer, il en est 23 qui méritent une considération particulière et que nous nommerons *groupes principaux*. Ce sont les groupes 3, 12, 15, 16, 17, 27, 29, 78, 79, 80, 86, 91, 107, 108, 115, 116, 138, 139, 166, 173 et 174. [Jordan 1868 p. 345]

4.0.3 Conclusioni

La memoria di Jordan è un punto di svolta sia nella storia della matematica che nella storia della cristallografia.
Per quanto riguarda la matematica segna il momento in cui il concetto di gruppo, che era stato sviluppato per affrontare il problema della risolubilità per radicali delle equazioni algebriche, viene introdotto in geometria, probabilmente per la prima volta. Il nuovo ente dà prova della sua utilità su un problema di cristallografia teorica: la classificazione dei possibili modelli geometrici dei reticoli cristallini introdotti da Bravais. Infatti la memoria riformula il problema di individuare tutti i possibili modelli geometrici di un cristallo in termini di gruppi di movimenti rigidi dello spazio.

Per quanto riguarda la matematica sembra che il carattere innovatore della memoria non sia stato colto in Francia e che anche per questo motivo la memoria sia stata pubblicata in Italia. La pubblicazione, ormai prossima, del volume G. Israël, *Correspondence of Luigi Cremona (1830-1903)* che raccoglie anche la corrispondenza intercorsa tra Camille Jordan e Luigi Cremona[11], sinora inedita, porterà nuova luce su questo punto.

La novità fu raccolta, invece, da Felix Klein e Sophus Lie. Entrambi i matematici visitarono Parigi nel 1870 ed ebbero l'occasione di conoscere e studiare con Jordan. Scrive a questo proposito Arild Stubhaug nella sua biografia di Sophus Lie:

> "Lie and Klein now became Jordan's eager audience, and Jordan considered both Klein and Lie to be two of of his his brightest pupils. In any case, it is certain that Klein and Lie, by being together with Jordan during that summer of 1870 quite rapidly focused upon the group concept as a tremendously valuable tool for the study of geometry and other fields of mathematics. Lie began to use the concept in geometric portrayals and transformations, and he got the idea of invariant properties in respect to such a transformation group."
>
> [Stubhaug 2002 p. 141]

Klein cita esplicitamente in più luoghi i lavori di Jordan nel suo celebre *Programma di Erlangen* del 1872 [Klein 1890]. La memoria di Jordan sui gruppi di movimenti è citata in nota nei primi passaggi mentre al *Traité des substitutions* è riservata una citazione ben più importante.

> "Nella teoria del GALOIS, quale viene esposta per es. nel *Traité d'Algèbre supérieure* del SERRET, oppure nel *Traité des substitutions* di C. JORDAN , è oggetto proprio della ricerca la teoria stessa dei gruppi o delle sostituzioni, e quella delle equazioni ne scaturisce come applicazione.

[11] Luigi Cremona (1830 - 1903) partecipò alla fondazione degli *Annali di matematica pura e applicata* e gestì parte del lavoro redazionale anche se ufficialmente non figurava tra i redattori della prima serie.

> Analogamente noi vogliamo una teoria delle trasformazioni, una dottrina cioè dei gruppi che possono ottenersi con trasformazioni di data natura. I concetti di permutabilità, similitudine, ecc., vi troveranno applicazione come nella teoria delle sostituzioni. La trattazione delle varietà che nasce dal mettere a fondamento i gruppi dei trasformazioni appare dunque come applicazione della teoria delle trasformazioni."

Il *Traité des substitutions* è per Klein un modello epistemologico per la teoria delle trasformazioni geometriche abbozzata nel *Programma*, mentre la memoria sui movimenti rigidi è citata in nota nell'ambito dell'esempio della relazione che esiste tra un gruppo ed un sottogruppo.

I modelli geometrici dei cristalli considerati da Jordan sono dei reticoli con estensione indeterminata, le trasformazioni, come ad esempio le traslazioni, si applicano a tutto il reticolo lasciandolo invariato. L'idea di un'azione globale e non puntuale delle trasformazioni è ripresa e ampliata nel *Programma* di Klein.

La cristallografia, che sino ad allora aveva studiato i modelli geometrici dei cristalli principalmente usando la geometria elementare, si dota di uno strumento all'avanguardia nel campo matematico. Tra i due ambiti si instaura un profondo legame.

La memoria di Jordan chiarisce la legge di simmetria di Haüy fornendo gli strumenti matematici per una indagine precisa dell'invarianza di un modello geometrico di un cristallo rispetto ad un gruppo di movimenti dello spazio. La memoria di Jordan è il primo passo verso la classificazione dei 230 gruppi cristallografici[12] portata a termine da Sohnke[13], Schönflies[14] e Fedorov[15]. Il raggiungimento di una classificazione completa è descritto da Burckhardt in [Burkhardt 1967], il quale mostra come sia Sohnke che Schönflies citano esplicitamente Jordan mettendo bene in evidenza il ruolo avuto da Jordan. Sarà Sohnke a completare la classificazione dei gruppi cristallografici composti da soli movimenti diretti e a stabilire una nomenclatura. A questo proposito Burckhardt fa notare che Sohnke asserisce di aver corretto alcune imprecisioni contenute nel lavoro di Jordan[16].

---

[12]Si intendono i 119 gruppi cristallografici e le 11 coppie chirali.

[13]Leonhard Sohncke (1842 - 1897).

[14]Arthur Moritz Schönflies (1853 - 1928).

[15]Evgraf Stepanovitch Fedorov (1853 - 1919).

[16]Non avendo studiato nel dettaglio le opere di Sohnke non posso qui dare contezza dell'asserzione di Sohnke, sulla quale, tra l'altro, Burckhardt non si esprime.

Parte III

Conclusioni e piste aperte

Capitolo 5

Il Programma di Erlangen

Il *Programma di Erlangen* è il testo di una conferenza di Felix Klein pubblicato a stampa nel 1872 col titolo di *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti). Come già detto, nel seguito si farà riferimento all'edizione [Klein 1890] pubblicata con qualche aggiunta dell'autore nel 1890 sugli *Annali di matematica*; esclusivamente per certi dettagli si farà, invece, riferimento alla prima edizione [Klein 1872]. Nelle citazioni si è scelto di mantenere l'indicazione delle note a piè di pagina, come nell'originale, anche se il testo delle note non è riportato nel presente lavoro. Le aggiunte fatte da Klein con l'edizione del 1890 sono collocate nell'originale tra parentesi quadre.

La conferenza era stata tenuta da Felix Klein in occasione della sua nomina a professore nella Università di Erlangen, è una *lectio magistralis* che si può comparare al testo della conferenza *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* tenuta da Bernhard Riemann in occasione del "Colloquium" alla Facoltà filosofica di Gottinga, col quale Riemann ottenne l'abilitazione alla libera docenza. Come ci si può aspettare, il testo a stampa presenta dei dettagli e delle precisazioni, come quelle contenute nei due apparati di note, che verosimilmente non erano presenti nel discorso effettivamente pronunciato.

Proprio per la natura di testo concepito per la lettura non deve stupire la limitata presenza di formule analitiche e l'assenza di calcoli nel corpo del testo; infatti come nota Richard Dedekind in [Riemann 1868] "durante la conferenza questi dettagli non potevano essere agevolmente sviluppati".

5.1 Il Programma

Il *Programma* è articolato in un paragrafo introduttivo seguito da dieci paragrafi numerati da §1 a §10 e un paragrafo conclusivo. Il testo è corredato da note a piè di pagina numerate con i numeri arabi, contenenti sia precisazioni che riferimenti bibliografici, e da delle corpose note conclusive, numerate con i numeri romani e dedicate a meglio contestualizzare le "ricerche geometriche recenti" a cui Klein fa riferimento nell'introduzione e nei paragrafi successivi.

L'introduzione verte sull'unitarietà e molteplicità della geometria; infatti nell'Ottocento la geometria connobbe un rapido sviluppo e alla geometria euclidea si affiancarono la geometria proiettiva e le geometrie non euclidee e tanti altri ambiti di ricerca nati in seno alla 'geometria moderna'. Secondo Klein, seppure la geometria "è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline troppo separate". Tra queste discipline spicca la *geometria proiettiva* ricordata sin dall'incipit del Programma: "Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant'anni nel campo della Geometria occupa il primo posto lo sviluppo della Geometria proiettiva' '[Klein 1890 p. 307] ma Klein volge la sua attenzione anche alla "geometria dei raggi reciproci" e a "quella delle trasformazioni razionali". A queste discipline sostiene Klein "convien concedere pari diritto di esistenza autonoma" anche se non sono altrettanto sviluppate.

Ispirato al fatto che, per quanto riguarda i rapporti tra proprietà metriche e le proprietà proiettive, "recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch'esse sotto il punto di vista proiettivo", Klein si chiede se sia possibile stabilire "un principio generale secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi". Il principio è destinato dunque a coordinare la "geometria ordinaria (elementare)" e la geometria proiettiva, ma, al contempo, Klein si pone il problema di rendere conto anche dei rapporti con le altre geometrie.

Nel primo e secondo paragrafo Klein affronta proprio l'introduzione di un tale principio generale che coordini la geometria euclidea e la geometria proiettiva, mentre nei paragrafi successivi amplierà il discorso cercando di coordinare seguendo il medesimo principio più ambiti della geometria moderna. Come vedremo, Klein cerca di generalizzare il metodo dell'*assoluto*[1] introdotto da Cayley facendo uso dei gruppi di trasformazioni geometriche e quello di varietà. La ricerca di un'ampia generalità porta Klein ad enunciare principi e problematiche in termini di varietà differenziali anche se non sempre i problemi posti hanno effettivamente portato a ricerche significative.

Il *Programma* si muove su linee di argomentazione distinte ma complementari: una rassegna dei diversi indirizzi di ricerca in geometria e la riformulazione in termini di gruppi di trasformazioni con una generalizzazione al caso della varietà degli stessi. Klein stesso individua due parti nel suo programma:

[1]Il metodo dell'assoluto (absolute, in inglese) fu introdotto da Cayley nella sua memoria "A Sixth Memoir upon Quantics",*Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **149** (1859), pp. 61-90 , II, no. 158 [1859], 561–592. Le *quantics* sono le forme algebriche, che rappresentano analiticamente gli enti della geometria proiettiva una volta considerato un opportuno sistema di coordinate omogenee. Cayley pubblicò un solo trattato e la gran parte delle sue idee sono sviluppate in memorie pubblicate nei periodici inglesi. Tra il 1854 e il 1878 scrisse dieci memorie sulla geometria proiettiva analitica note come "memoirs upon quantics" perché dopo la prima intitolata "An introductory Memoir upon Quantics" le seguenti memorie sono numerate "A second Memoir upon Quantics" etc. Si veda [North 2008].

1. un approfondimento sulla geometria proiettiva (§3, §4 e §5) nei quali si discute il metodo dell'*assoluto* alla luce della nozione di gruppo fondamentale introdotta nel §1 che ispira una generalizzazione in termini di varietà; la geometria proiettiva e il suo rapporto con la geometria elementare offre un modello epistemologico per lo sviluppo della geometria;

2. la rassegna dei diversi "indirizzi d'investigazioni geometriche" portata avanti nei paragrafi §2, §6, §7, §8, §9 e §10; anche in questo caso, quando possibile, Klein riformula le questioni in termini di gruppi di trasformazione e varietà, una particolare attenzione è riservata al piano epistemologico e all'unitarietà dei diversi indirizzi che si può ottenere proprio grazie alla riformulazione.

Il primo paragrafo intitolato "Gruppo di trasformazioni dello spazio. Gruppo principale. Si pone un problema generale." introduce il concetto di gruppo di trasformazioni e quello di gruppo principale di uno spazio.

Per Klein le trasformazioni agiscono globalmente su tutto lo spazio:

> "Noi supponiamo sempre soggetto simultaneamente alle trasformazioni tutto il complesso delle figure dello spazio, e parliamo perciò semplicemente di trasformazioni dello spazio. Le trasformazioni possono introdurre in luogo dei punti altri elementi, come fanno per es. quelle reciproche; ma su ciò nel testo non si fa distinzione."
>
> [Klein 1890 p. 309 nota 2]

Il concetto di gruppo proviene dalla teoria dei gruppi di sostituzione che era stata sviluppata in connessione con la teoria di Galois.

> "Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di gruppo di trasformazioni dello spazio. Componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello
> spazio (^{2}), si ha sempre di nuovo una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni gode della proprietà che ogni trasformazione risultante da composizione zioni di queste appartenga alla serie medesima, chiameremo quest'ultima un gruppo di trasformazioni (^{1}) (^{2})."
>
> [Klein 1890 p. 309-310]

L'uso della parola *serie* richiama il caso dei gruppi di sostituzioni dove si usava enumerare le sostituzioni del gruppo. Sembra che Klein abbia adottato una definizione più simile a quella data da Jordan per i gruppi di sostituzioni [Jordan 1871] che quella data per i movimenti rigidi dello spazio nella sua memoria[2] [Jordan 1868] che pure è citata in nota da Klein.

Questa osservazione trova un riscontro nella nota che Klein, nel rivedere la traduzione italiana per la sua pubblicazione negli *Annali di matematica pura e applicata* nel 1890, fece aggiungere:

[2]La definizione data da Jordan è discussa nel paragrafo 4.0.2, p. 71.

> "Questa definizione vuole ancor essere completata. Vale a dire, nei gruppi del testo si suppone tacitamente che essi, accanto ad ogni operazione che abbiano a contenere, ne contengano altresì sempre l'inversa; ora questo, nel caso che le operazioni siano in numero infinito, non è punto una conseguenza del concetto di gruppo come tale; la nostra supposizione doveva quindi aggiungersi espressamente alla definizione di questo concetto data nel testo."
>
> [Klein 1890 p. 310 nota 1]

Infatti le precisazioni si rendono necessarie "nel caso che le operazioni siano in numero infinito" e non nel caso dei gruppi di sostituzioni. Questi dettagli mostrano quanto fosse poco sviluppato il concetto di gruppo al momento in cui Klein presentò il suo *Programma*.

Klein definisce il *gruppo principale* come il gruppo delle trasformazioni "non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi" [Klein 1890 p. 310]. Le proprietà sono quelle della geometria ordinaria, cioè le proprietà metriche. Dopo aver introdotto il gruppo principale grazie all'invarianza delle proprietà, Klein rovescia la prospettiva asserendo che il gruppo principale può caratterizzare tutte le proprietà geometriche dello spazio:

> "E inversamente possiamo anche dire: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale.*"
>
> [Klein 1890 p. 311]

Quanto esposto si riferisce ai movimenti rigidi dello spazio ordinario ma Klein porge subito una generalizzazione che costituisce il "problema generale" richiamato nel titolo del paragrafo:

> "È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.
>
> Secondo l'espressione moderna, la quale però non si suol riferire che ad un determinato gruppo, quello di tutte le trasformazioni lineari, possiamo anche dire così:
>
> È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato."
>
> [Klein 1890 p. 311]

Il concetto di *varietà* era stato introdotto da Riemann[3] nella sua *lectio magistralis Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*[4] pronunciata nel 1854

[3]Georg Friederich Bernhard Riemann (1826 – 1866).

[4]Traduzione: Sulle ipotesi che stano alla base della geometria.

e pubblicata postuma nel 1867[5]. Al tempo era un concetto nuovo, ancora vago e poco esplorato, ma che si rivelò determinante nello sviluppo della geometria non euclidea; infatti permetteva di utilizzare, localmente, l'analisi infinitesimale euclidea anche in superfici o spazi nei quali non si realizzava una geometria euclidea, sgombrando così il campo dal dubbio che ci potesse essere una 'analisi non euclidea'[6]. Il concetto di *varietà* era già stato usato da Klein nel suo celebre saggio *Über die sogenannte NichtEuklidische Geometrie* del 1871.

Oggi sappiamo che solo alcune varietà differenziali ammettono un gruppo di trasformazioni globali[7] mentre per quanto riguarda le trasformazioni infinitesime, che all'epoca di Klein venivano spesso considerate assieme alle trasformazioni finite, esse sono state ricondotte a diverse nozioni dell'attuale teoria delle varietà differenziabili, ad esempio per certi aspetti esse possono essere pensate come i campi di vettori dello spazio tangente alla varietà mentre per altri aspetti alle curve integrali[8].
Le problematiche poste da Klein, pur non avendo dato luogo ad uno sviluppo della teoria delle varietà, al tempo costituivano una grande apertura verso un nuovo ambito di ricerca, quello delle varietà differenziali, che avrà un grande sviluppo.

Nel seguito del suo *Programma* Klein si riferirà spesso alle *varietà* anche se non sempre quanto dice è generalmente valido per qualunque varietà.

Il secondo paragrafo si intitola "I gruppi di trasformazioni di cui l'uno abbraccia l'altro vengono subordinati fra loro. Diversi tipi di ricerche geometriche e loro reciproca relazione."; in questo paragrafo Klein introduce gruppi di trasformazioni più generali rispetto al gruppo principale che viene ritrovato mediante la generalizza-

[5]Si veda *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* vol 30 (1867).

[6]La possibilità di una 'analisi non euclidea' è adombrata nelle obiezioni che i matematici italiani fecero alle prime versioni del *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1868) di Eugenio Beltrami (1835 – 1900). Scrive Beltrami ad angelo Genocchi: "L'anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale di Riemann, io aveva comunicato all'ottimo Cremona un mio scritto nel quale davo un'interpretazione della planimetria non-euclidea, che mi sembrava soddisfacente. Il Cremona non ne giudicò diversamente, ma mi fece una obbiezione di massima, dicendomi che poiché io usavo l'ordinaria analisi, che è fondata sul concetto euclideo, non potevo tenermi certo che con ciò solo io non avessi pregiudicato il finale risultamento.", lettera di E. Beltrami a A. Genocchi (1817 – 1889) riportata in G. Loria, "Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche", *Bibliotheca Mathematica* 2 (1901), 392-440.

[7]Già E. Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* del 1868 aveva notato che le sole varietà in cui si può sviluppare un analogo dei movimenti finiti dello spazio e del piano euclidei sono le varietà a curvatura costante. Ma la sua considerazione si basava sul movimento cinematico delle figure in questi spazi. Per ulteriori sviluppi in termini di estensione di un gruppo di trasformazioni locali a tutto uno spazio bisogna attendere lo sviluppo della geometria delle varietà differenziabili.

[8]Ad esempio Jordan nella sua classificazione dei sottogruppi delle trasformazioni dello spazio considera sia trasformazioni infinitesime che trasformazioni finite. Nella matematica di metà Ottocento è generalmente accettato il fatto che le trasformazioni infinitesime opportunamente ripetute possano generare una qualsiasi trasformazione finita. Si veda ad esempio [Chasles 1860] e [Jordan 1868]. Un tale ragionamento, simile al concetto di integrazione come somma di infinitesimi, sottende diversi problemi.

zione della tecnica dell'*assoluto*. In questo modo Klein intoduce una gerarchia tra le trasformazioni. Anche se le proposizioni sono enunciate in generale per delle varietà, è chiaro che il modello assunto da Klein è quello delle trasformazioni proiettive, che ammettono i movimenti rigidi come casi particolari.

Per Klein, che in questo suo scritto non si pone nell'ottica dello studio dei fondamenti empirici della geometria, le trasformazioni che lasciano inalterate tutte le proprietà del corpo sono meno interessanti rispetto a quelle che ne conservano solo alcune, come le proprietà proiettive. Il problema, però, va enunciato come nei termini di sviluppo delle "proprietà invariantive" delle figure di uno spazio rispetto ad un dato gruppo. Perciò Klein, ispirato dalla geometria proiettiva, pone il problema di sviluppare le proprietà invariantive delle trasformazioni di un gruppo che lasciano invariata una forma fissata dello spazio.

> "Poichè le proprietà geometriche dei corpi rimangono inalterate in *tutte* le trasformazioni del gruppo principale, così, considerato da se solo, è assurdo il ricercare quelle loro proprietà per cui ciò si verifica soltanto rispetto ad una parte delle trasformazioni stesse. Ma il porre una tale questione diventa giustificato, quantunque solo formalmente, se noi studiamo le forme dello spazio in relazione ad elementi immaginati fissi."
>
> [Klein 1890 p. 312]

Supponendo di aver fissato un punto nello spazio considerato

> "Ma una tale questione possiamo metterla anche sotto quest'altra forma: Si studino le forme dello spazio in se per quanto concerne le proprietà che non si alterano in quelle trasformazioni del gruppo principale che conservano fisso il punto proposto."
>
> [Klein 1890 p. 312]

Per Klein è più interessante limitare il gruppo delle trasformazioni piuttosto che ingrandirlo introducendo delle trasformazioni più generali perché ciò gli consente di usare il metodo dell'introdurre una forma dello spazio come *assoluto*.

> "Sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. *Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema così esteso in relazione al gruppo proposto; – ovvero non estendere il sistema, ma limitare le trasformazioni che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).*"
>
> [Klein 1890 p. 312]

Avendo chiarito in cosa consista lo sviluppo delle proprietà invariantive rispetto al gruppo principale e come ciò si possa compiere limitandosi alle trasformazioni del gruppo principale che conservano un elemento fissato delle spazio, Klein passa a considerare gruppi più generali che contengono il gruppo principale.

> "Contrariamente alla questione sollevata al principio del paragrafo, occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni comprendente quello principale come parte. [...]
>
> *Sostituendo al gruppo principale un altro gruppo più ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà non più dei corpi a se, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata ([1]))è definita dal fatto che, supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.*
>
> Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo più esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finché i loro gruppi si comprendono l'un l'altro. Questo vale anche per i diversi metodi di trattazione di varietà più volte estese che dobbiamo considerare."
>
> [Klein 1890 p. 312-313]

Questa è la relazione dei gruppi che si "abbracciano l'un l'altro" espressa da Klein. Come si può vedere è molto distante dalla nostra attuale epistemologia delle trasformazioni geometriche che, pur ispirandosi al Programma, si basa sull'isomorfismo tra un sottogruppo di un gruppo più generale di trasformazioni e il gruppo delle trasformazioni principali. La relazione non è necessariamente quella in cui il gruppo principale è un sottogruppo del gruppo più generale; infatti il gruppo più generale può essere costituito da matrici di dimensione superiore rispetto a quelle del gruppo principale, come è il caso delle trasformazioni proiettive rispetto alle trasformazioni euclidee.

Il terzo paragrafo si intitola "Geometria proiettiva"; in questo paragrafo Klein esplicita il fatto che il modello epistemologico per il suo *Programma* sia appunto la geometria proiettiva.

> "Ogni trasformazione dello spazio che non appartenga precisamente al gruppo principale può servire a trasportare a figure nuove proprietà di figure note. Così noi usiamo la geometria del piano per quella di superficie

> rappresentabili sopra il piano; così, già assai prima che nascesse una vera e propria geometria proiettiva, si arguivano dalle proprietà di una figura data quelle di altre che se ne deducevano per proiezione. Ma la geometria proiettiva sorse solamente coll'abitudine di considerare la figura originale come essenzialmente identica a tutte quelle che ne sono deducibili proiettivamente, e di enunciare le proprietà che si trasportano per proiezione in modo da render evidente la loro indipendenza dalle modificazioni che si hanno proiettando. Con ciò si venne a porre a base della trattazione nel senso del §1 *il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, creando per tal modo il contrasto fra geometria proiettiva ed elementare.*
>
> Un processo di sviluppo simile a quello qui citato può concepirsi come possibile in ogni sorta di trasformazioni dello spazio; e noi ci ritorneremo sopra più volte ancora. Nella geometria proiettiva stessa esso si è sviluppato ancora da due lati."
>
> [Klein 1890 p. 313 - 314]

Klein precisa i legami tra la sua riformulazione, l'idea del cerchio immaginario all'infinito[9] e l'assoluto.

> "Come si abbiano a concepire le proprietà metriche dal punto di vista proiettivo, lo si determina secondo la proposizione generale del paragrafo precedente. Le proprietà metriche debbono considerarsi come relazioni proiettive rispetto ad una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito ([1]), forma che ha la proprietà di trasformarsi in se stessa in quelle sole trasformazioni proiettive che appartengono altresì al gruppo principale. La proposizione enunciata così semplicemente richiede ancora un'aggiunta essenziale, che corrisponde alla restrizione delle ordinarie vedute agli elementi (e alle trasformazioni) reali. Per esser d'accordo con questo punto di vista, bisogna ancora aggiungere espressamente al cerchio immaginario all'infinito il sistema degli elementi (punti) reali dello

[9] Nel piano, ampliato sia con i punti immaginari che con i punti all'infinito e munito di coordinate omogenee $x : y : z$, i punti ciclici sono i due punti immaginari di coordinate $1 : \pm i : 0$. Le coordinate dei due punti ciclici verificano le due equazioni $x^2 + y^2 = 0$ e $z = 0$. Ampliando il concetto di circonferenza all'insieme di punti, reali o immaginari, che soddisfano all'equazione di una circonferenza si può enunciare la seguente proprietà dei due punti ciclici: ogni circonferenza del piano passa per questi due punti e viceversa ogni curva del secondo ordine passante per i due punti ciclici è una circonferenza. Generalizzando allo spazio munito di un sistema di coordinate omogenee $x : y : z : t$ e ampliato con i punti all'infinito e con i punti immaginari, i punti ciclici dello spazio sono i punti immaginari che soddisfano le equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ e $t = 0$; i punti ciclici giacciono su una circonferenza detta *circonferenza all'infinito*. Ampliando il concetto di superficie all'insieme di punti, reali o immaginari, che soddisfano delle equazioni di secondo grado si ha che: ogni superficie sferica passa per la circonferenza all'infinito e viceversa se una superficie del secondo ordine passa per essa è una superficie sferica. Cfr. [Amaldi 1931]. La *circonferenza all'infinito* aveva già ispirato i lavori di Cayley sull'*assoluto* tanto che la stessa *circonferenza all'infinito* è talvolta chiamata *assoluto*.

> spazio; le proprietà nel senso della geometria elementare sono perciò proiettivamente o proprietà dei corpi a se, ovvero relazioni fra essi e questo sistema degli elementi reali, fra essi e il cerchio immaginario all'infinito, fra essi ed entrambi."
>
> [Klein 1890 p. 314-315]

In nota Klein specifica a proposito della circonferenza all'infinito che "Questo modo di considerazione va ritenuto come una delle più belle cose [della scuola francese]; solo per mezzo di esso vien precisata la distinzione fra proprietà di posizione e proprietà metriche, quale si suol dare in principio alla geometria proiettiva"[10] [Klein 1890 p. 314].

Il quarto paragrafo, intitolato "Trasporto mediante rappresentazione.", e quinto il paragrafo, intitolato "Dell' arbitrarietà nella scelta dell' elemento dello spazio. Principio di trasporto di Hesse. Geometria della retta.", sono dedicati ad approfondire ulteriormente il caso della geometria proiettiva nella nuova prospettiva posta da Klein nei due paragrafi precedenti.

> "*La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva dei sistemi di punti su di una conica sono la stessa cosa; ossia ad ogni proposizione sulle forme binarie ne corrisponde una sopra questi sistemi di punti, e inversamente (*[2]*).*"

La geometria elementare è inquadrata nell'ambito della geometria proiettiva:

> "*La geometria elementare del piano e la trattazione proiettiva di una quadrica con un suo punto come fondamentale sono la stessa cosa.* Tali esempi si potrebbero moltiplicare a piacere ([1]); i due qui svolti furono scelti perchè in seguito avremo ancora occasione di tornarvi sopra."

Il contenuto della Geometria non dipende dalla trattazione ma dal gruppo di trasformazioni considerato:

> "Ma fintanto che poniamo a base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato; ossia ogni teorema ottenuto adottando un certo elemento dello spazio e anche un teorema qualora se ne adotti un altro qualunque; si cambiano solamente l'ordine e il collegamento delle proposizioni."

Ancora l'identificazione dei gruppi permette a Klein di concludere che:

> "*La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale sono identiche.*

---

[10] Come si può notare dalle parentesi quadre il riferimento alla "scuola francese" è stato aggiunto nell'edizione del 1890.

> E poiché infine, appunto per l'uguaglianza del gruppo, la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale coincide colla geometria metrico-proiettiva che si può istituire nel piano sopra una conica (v. nota V), possiamo anche dire così:
>
> *La teoria delle forme binarie e la geometria metrico-proiettiva generale nel piano sono la stessa cosa.*"
>
> [...]
>
> "*La teoria delle forme quaternarie coincide colla determinazione metrica proiettiva in una varietà rappresentabile con sei variabili omogenee.*
>
> Per una più minuta esposizione di un tale concetto, rinvio ad una memoria che comparirà fra poco nei Math. Annalen (vol. VI) "Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie [Zweite Abhandlung]", come pure ad una nota al termine di quest'opuscolo (v. nota VI)."

Nel rivedere la traduzione fatta da Gino Fano del suo *Programma*, Klein fece delle aggiunte che sono indicate nel testo [Klein 1890] tra parentesi quadre. Il riferimento bibliografico fatto da Klein era originariamente alla sua prima memoria[11] dal titolo "Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie" pubblicata nel 1971 sui *Mathematische Annalen*, ma nella riedizione Klein indirizza i lettori verso la seconda memoria[12] pubblicata con lo stesso titolo sempre sui *Mathematische Annalen* nel 1873 e distinta dalla prima per il sottotitolo "Zweiter Aufsatz" (secondo saggio). Questo piccolo particolare mostra come il *Programma* di Klein porti su temi non ancora del tutto sviluppati.

Con il sesto paragrafo, intitolato "Geometria dei raggi reciproci. Interpretazione di $x + iy$.", Klein riprende la rassegna dei "dei diversi indirizzi d'investigazioni geometriche, che fu cominciata nei §§2 e 3." [Klein 1890 p. 320]

In questo paragrafo Klein riconduce lo studio della geometria dei raggi reciproci alla geometria proiettiva, combinando la caratterizzazione di una geometria mediante i gruppi di trasformazione con la rappresentazione o modello della geometria. Infatti mediante un modello, una rappresentazione, nella terminologia adottata da Klein, della geometria dei raggi reciproci si ottiene un gruppo di trasformazioni che può essere identificato con alcuni sottogruppi delle trasformazioni proiettive.

Klein delinea brevemente in cosa consista la geometria dei raggi reciproci facendone mediante il confronto con la geometria proiettiva:

> "Nella geometria proiettiva i concetti elementari sono quelli di punto, di retta, di piano. Il cerchio e la sfera sono solo casi particolari della conica e della quadrica. L'infinito della geometria elementare appare siccome

[11] Si veda Felix Klein, "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", *Mathematische Annalen* **4** (1871): pp. 573-625.

[12] Si veda Felix Klein, "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie: Zweiter Aufsatz", *Mathematische Annalen* **6** (1873): pp. 112-145.

> un piano; la forma fondamentale a cui si riferisce la geometria stessa è una conica immaginaria all'infinito.
>
> Nella geometria dei raggi reciproci i concetti elementari sono punto, cerchio, sfera. Retta e piano sono casi particolari di questi ultimi, caratterizzati dal fatto di contenere un certo punto — quello all' infinito — che del resto, secondo lo spirito di quel metodo, non è ulteriormente distinto dagli altri. La geometria elementare sorge allorquando ci immaginiamo questo punto come fisso."

Introduce la nozione di geometria proiettiva di una curva o di una superficie:

> "Si è già considerata la connessione che esiste fra la geometria elementare del piano e la geometria proiettiva su di una quadrica in cui si sia distinto un punto. Astraendo da quest'ultimo, e studiando quindi la geometria proiettiva sulla superficie a se, si ha un'immagine della geometria dei raggi reciproci nel piano."

Quindi passa all'identificazione dei due gruppi di trasformazioni, quello attribuito alla geometria dei raggi reciproci mediante la sua rappresentazione, e quello delle trasformazioni della quadrica. L'identificazione per Klein è evidente e non è argomentata, si noti che si parla genericamente di corrispondenza e che Klein non ricorre al concetto di isomorfismo, che come abbiamo visto nel paragrafo 4.0.2 era già stato introdotto da Jordan nel suo *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Jordan 1871].

> "Infatti è facile persuadersi (2) che, in virtù della rappresentazione della quadrica, al gruppo di trasformazioni per raggi reciproci nel piano corrisponde il complesso delle trasformazioni lineari di quella quadrica in se medesima."

Dall'identificazione dei due gruppi Klein deduce che:

> "*La geometria dei raggi reciproci nel piano e la geometria proiettiva su di una quadrica sono la stessa cosa;* ed in modo affatto analogo: *La geometria dei raggi reciproci nello spazio si identifica colla trattazione proiettiva di una varietà rappresentata da un'equazione omogenea di secondo grado fra cinque variabili.*" [in corsivo nell'originale]

Stabilito ciò Klein delinea l'estensione di quanto visto per le trasformazioni reali anche alle trasformazioni complesse, tramite l'interpretazione di $x + iy$ menzionata nel titolo del paragrafo. Alcune imprecisioni nella determinazione del gruppo di trasformazioni sono corrette con una nota a piè di pagina aggiunta nel 1890. L'estensione porta Klein ad enunciare che "*La teoria delle forme binarie trova la sua rappresentazione nella geometria dei raggi reciproci del piano reale, e precisamente in modo che anche i valori complessi delle variabili vi vengono rappresentati.*"

e che "*La teoria delle forme binarie a variabili complesse trova la sua rappresentazione nella geometria proiettiva della superficie sferica reale*" [Klein 1890 p. 322] L'argomento è esteso ulteriormente nella nota VII.

Con i risultati ricavati finora Klein ha coordinato tra loro la geometria proiettiva e la geometria elementare, inoltre metodi analoghi hanno permesso di coordinare la geometria delle forme binarie, la geometria dei raggi reciproci e la geometria della retta. Klein osserva che nelle considerazioni svolte nel sesto paragrafo le forme considerate si distinguono principalmente per il numero di variabili che contengono, l'estensione delle considerazioni svolte è affrontata nel settimo paragrafo che, infatti, si intitola "Estensione delle cose precedenti. Geometria delle sfere di LIE."

L'ottavo paragrafo propone una "Enumerazione di metodi ulteriori che hanno a fondamento un gruppo di trasformazioni puntuali". Lo studio di questi ulteriori metodi mediante la nozione di gruppo di trasformazioni era un problema aperto all'epoca, e Klein lo tratteggia molto sinteticamente, quanto basta per far intuire al lettore l'importanza che lo sviluppo di questi temi con i metodi descritti nel programma potrebbe avere nello sviluppo della matematica. Klein volge la sua attenzione al *Gruppo delle trasformazioni razionali*, al gruppo delle "trasformazioni puntuali infinitamente piccole supposte reali" che, secondo lui, caratterizza l'*Analysis situs* e infine al *Gruppo di tutte le trasformazioni puntuali.*

Nono paragrafo: "Sul gruppo di tutte le trasformazioni di contatto."

> "Per trasformazione di contatto deve intendersi, analiticamente parlando, qualunque sostituzione capace di esprimere i valori delle variabili x, y, z e le loro derivate parziali $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ mediante nuove x', y', z', p', q'."
>
> [Klein 1890 p. 330]

Per Klein "è evidente che superficie tangenti si trasformano in generale di nuovo in superficie tangenti, il che dà ragione del nome di trasformazioni di contatto" [Klein 1890 p. 330]. Klein riconosce che "A dir vero le trasformazioni di contatto furono già da lungo tempo considerate in casi particolari; anche JACOBI fece già uso di quelle più generali in ricerche analitiche; ma nella vera intuizione geometrica esse furono introdotte soltanto con recenti lavori del LIE ([1])."
Anche Monge introdusse alcune di queste trasformazioni come base di un metodo per l'integrazione di alcune equazioni differenziali. Si tratta del metodo delle curve e superfici reciproche descritto in [Monge 1803].

Il decimo paragrafo verte "Sulle varietà a quante si vogliano dimensioni", l'innovativo concetto introdotto da Riemann nella sua già citata conferenza di abilitazione, il cui testo fu pubblicato postumo. Come vedremo il paragrafo è molto interessante non solo per l'uso del concetto di varietà ma anche sotto il punto di vista della recezione delle idee di Hermann Grassmann (1809 – 1877), tema sul quale non ci si sofferma nel presente lavoro.

> "Già più volte abbiamo notato che, nel collegare le spiegazioni date finora alla concezione dello spazio, noi non avevamo altro scopo che di poter più facilmente svolgere i concetti astratti coll'appoggiarci ad esempi visibili. Per sé, le considerazioni sono indipendenti dalla figura sensibile, e appartengono al campo generale di ricerche matematiche, che si chiama teoria delle varietà estese, o brevemente (secondo il GRASSMANN) scienza dell'estensione (*Ausdehnungslehre*). E evidente in qual modo si debba riportare quanto precede dallo spazio al puro concetto di varietà. Ed osserviamo qui ancora una volta che nella ricerca astratta abbiamo, rispetto alla geometria, il vantaggio di poter scegliere affatto ad arbitrio il gruppo di trasformazioni che vogliamo assumere come fondamentale, mentre nella geometria era dato a priori un gruppo assai ristretto, il gruppo principale.
>
> Accenneremo qui ancora solo, ed anche assai brevemente, ai tre metodi di trattazione seguenti."

I tre metodi accennati da Klein per la trattazione delle varietà in generale sono la "Trattazione proiettiva, ovvero algebra moderna. (Teoria degli invarianti.)", lo studio delle "Varietà a curvatura costante" e, infine, quelle delle "Varietà piana". Gli esempi presi in considerazione nei precedenti paragrafi possono essere compresi in uno di questi metodi di concepire lo spazio geometrico.

> "Il suo gruppo si compone del complesso delle trasformazioni lineari e reciproche delle variabili usate per la rappresentazione dell'elemento nella varietà; essa è la generalizzazione della geometria proiettiva. Già si è rilevato come questa specie di trattazione possa applicarsi alla discussione dell'infinitesimo in una varietà con una dimensione di più. Essa comprende le due specie di trattazione che ancora dobbiamo menzionare, in quanto che il suo gruppo abbraccia i gruppi fondamentali di queste."

Le varietà piane sono le varietà a curvatura costante nulla, sono le generalizzazioni della geometria euclidea. Il concetto di varietà a curvatura costante:

> "Il concetto di una tale varietà sorse in RIEMANN, derivando da quello più generale di una varietà in cui è data un'espressione differenziale delle variabili. Il gruppo consiste per lui nell'insieme delle trasformazioni delle variabili che lasciano inalterata l'espressione proposta. Alla rappresentazione di una varietà a curvatura costante si giunge da un altro lato, qualora si istituisca una determinazione metrica nel senso proiettivo basata su di una data equazione di secondo grado fra le variabili. In questo modo si introduce un'estensione, di fronte al modo del RIEMANN, in quanto che le variabili si suppongono complesse; però si può poi restringere la variabilità al campo reale. A questo ramo appartiene la gran serie di ricerche che abbiamo accennate nei §§5, 6, 7."

Il paragrafo conclusivo “Osservazioni finali.” presenta alcune riflessioni epistemologiche molto interessanti.

Le conclusioni vertono su due aspetti

> “Per finire, potremo fare ancora due osservazioni, le quali sono in istretta relazione con quanto si è esposto finora; l’una si riferisce al formalismo con cui si debbono rappresentare gli sviluppi relativi alle cose precedenti; l’altra deve porre in evidenza alcuni problemi, la cui considerazione dopo le spiegazioni che qui furon date appare importante e vantaggiosa.”

Klein considera “inessenziali” le differenze tra l’indirizzo sintetico e analitico della geometria moderna e utilizza il termine geometria proiettiva per entrambe. Infatti “i concetti e le argomentazioni [dei due indirizzi] si sono informati a poco a poco dall’una e dall’altra parte in modo affatto simile” [Klein 1890 p. 337 nota I]. Una tale posizione di apertura non era condivisa da molti matematici e il concetto di varietà usato da Klein non avendo un analogo nella geometria sintetica era maggiormente esposto alle critiche dei sostenitori della geometria pura. Klein richiama una delle obiezioni mosse alla geometria analitica: “Spesso si è fatto alla geometria analitica il rimprovero di avvantaggiare elementi arbitrarii coll’introduzione del sistema di coordinate, e questo rimprovero colpisce parimente tutte le trattazioni di varietà estese che caratterizzano l’elemento mediante i valori di certe variabili.” [Klein 1890 p. 335]

Klein offre quindi una riflessione sul metodo per evitare l’arbitrarietà dei risultati ottenuti:

> “Le espressioni analitiche che possono sorgere nello studio di una varietà in relazione ad un certo gruppo, devono essere; per quel che riguarda il loro significato, indipendenti dal sistema di coordinate, in quanto che questo è scelto a caso, e si tratta quindi di render evidente anche nella forma tale indipendenza. Che ciò sia possibile, e come s’abbia a fare, lo mostra l’algebra moderna, in cui la nozione formale di invariante, di cui qui si tratta, sta impressa in una maniera più chiara che mai. Essa possiede una legge di formazione generale e completa delle espressioni invariantive, ed opera per principio con queste sole. La stessa questione deve porsi nella trattazione formale anche quando si hanno gruppi fondamentali diversi dal proiettivo ([1]). Poiché il formalismo deve identificarsi colla concezione, sia che si voglia considerarlo solo come espressione precisa e chiara di quest’ultima, sia che vogliamo servircene per penetrare col suo mezzo in campi inesplorati.”
>
> [Klein 1890 p. 335]

Nell’edizione del 1890 Klein aggiunge in nota a proposito del formalismo “Ad esempio pel gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni intorno ad un punto fisso i quaternioni forniscono un tale formalismo”.

Klein sviluppa alcune considerazioni epistemologiche sul modo in cui sviluppare la teoria dei gruppi di trasformazioni che lo portano ad introdurre nell'ultimo capoverso il concetto astratto di simmetria come invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

> "Per stabilire i problemi di cui vogliamo ancora far menzione occorre un confronto fra le osservazioni esposte e la così detta teoria delle equazioni di GALOIS. Nella teoria di GALOIS, come anche qui, l'importanza si concentra nei gruppi di mutamenti. Gli oggetti a cui si riferiscono i mutamenti sono bensì differenti; là si ha da fare con un numero finito di elementi discreti, qui invece col numero infinito degli elementi di una varietà continua Ma possiamo tuttavia spinger oltre il confronto, a motivo dell'identità della nozione di gruppo ([1]); e qui conviene accennarvi, tanto più che ne verrà caratterizzata la posizione da attribuirsi a talune ricerche incominciate da LIE e da me ([2]) in relazione alle considerazioni qui svolte. Nella teoria del GALOIS, quale viene esposta per es. nel *Traité d'Algèbre supérieure* del SERRET, oppure nel *Traité des substitutions* di C. JORDAN, è oggetto proprio della ricerca la teoria stessa dei gruppi o delle sostituzioni, e quella delle equazioni ne scaturisce come un'applicazione. Analogamente noi vogliamo una *teoria delle trasformazioni*; una dottrina cioè dei gruppi che possono ottenersi con trasformazioni di data natura. I concetti di permutabilità, similitudine, ecc., vi troveranno applicazione come nella teoria delle sostituzioni. La trattazione delle varietà che nasce dal mettere a fondamento i gruppi di trasformazioni appare dunque come un'applicazione della teoria delle trasformazioni."

La simmetria, come abbiamo visto nel capitolo 4, era già presente in cristallografia sin dall'inizio dell'Ottocento e fu ripresa in termini matematici da Jordan. Klein riprende la relazione tra i sottogruppi del gruppo principale di trasformazione e la simmetria delle figure introdotto da Jordan generalizzandolo e inquadrandolo in una analogia incentrata sulla permutabilità che lega la teoria della risoluzione delle equazioni algebriche, i gruppi di simmetria e i gruppi di funzioni automorfe.

> "Nella teoria delle equazioni interessano anzitutto le funzioni simmetriche dei coefficienti, ma subito dopo quelle espressioni che rimangono inalterate, se non in tutte, almeno in gran parte degli scambi delle radici. Nella trattazione di una varietà con un certo gruppo come fondamentale noi cerchiamo analogamente anzitutto i corpi (§5) e le forme che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni del gruppo. Vi sono però forme che ammettono non tutte, ma alcune delle trasformazioni del gruppo stesso, e queste offrono un'interesse speciale relativamente alla trattazione fondata su di esso, hanno cioè proprietà particolari. Questo equivale a mettere in evidenza per es. nella geometria ordinaria corpi simmetrici e regolari, superficie di rotazione ed elicoidali. Ponendosi invece dal punto

di vista della geometria proiettiva, e richiedendo in particolare che le trasformazioni per cui le forme si mutano in sé stesse siano permutabili, si giunge alle forme considerate da Lie e da me nel lavoro citato, e al problema generale posto al §6 di esso. La determinazione datavi nei §§1 e 3 di tutti i gruppi di infinite trasformazioni lineari permutabili nel piano è una parte della teoria generale delle trasformazioni testé menzionata (3)."

5.2 Analisi, sintesi e modelli.

La prima nota di chiusura del *Programma* verte *Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna.*. É interessante vedere come nella concezione di Klein il contrasto che, come abbiamo visto nei capitoli precedenti, aveva giocato ampia parte nel motivare lo studio delle isometrie, cioè delle trasformazioni appartenenti al gruppo principale dello spazio euclideo, sia inessenziale.

"I. *Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna.*

La differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica non deve più considerarsi oggigiorno come essenziale, poiché i concetti e le argomentazioni si sono informati a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile. Perciò noi scegliamo nel testo la denominazione di "geometria proiettiva" per indicarle entrambe. Se il metodo sintetico procede di più per mezzo dell'intuizione dello spazio, accordando così alle sue prime e semplici teorie un'attrattiva non comune, tuttavia il campo di tale intuizione non è chiuso al metodo analitico, e le formole della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non bisogna tenere in poco conto il vantaggio che un formalismo ben fondato offre al processo dell'investigazione, precedendo in certa misura il pensiero. Bisogna bensì attenersi sempre al principio di non considerare come esaurito un argomento matematico, finché esso non è divenuto evidente nel concetto; e l'avanzare col mezzo del formalismo non è appunto che un primo passo, ma già molto importante."

Nel contrasto gioca un ruolo importante l'intuizione e l'insegnamento; sotto entrambi i profili è interessante la terza nota conclusiva che riporto integralmente:

"III. Sull'importanza dell'intuizione dello spazio.

Se nel testo noi accenniamo all'intuizione dello spazio come a qualcosa di secondario, lo facciamo in relazione al contenuto puramente matematico delle considerazioni da formulare. L'intuizione ha per esso il solo scopo dell'evidenza, il quale però dal lato pedagogico è da stimarsi assai. Un modello geometrico per es. è sotto questo punto di vista assai istruttivo ed interessante.

Ben diversa però è la questione sull'importanza dell'intuizione geometrica in generale. Io la considero come una cosa che sta da sé. V'ha una geometria speciale che non vuol esser riguardata, come le ricerche discusse nel testo, quale forma intuitiva di considerazioni astratte. In essa si tratta di concepire assolutamente le figure dello spazio colle forme che esse hanno effettivamente, e di intendere (ed è quello il lato matematico) le relazioni che per esse sussistono come conseguenze evidenti dei postulati sull'intuizione dello spazio. Un modello, – sia pur eseguito ed osservato, oppure solo rappresentato con evidenza, – non è per questa geometria un mezzo per raggiungere lo scopo, ma lo scopo medesimo.

Istituendo per tal modo la geometria come qualcosa a sé, accanto alla matematica pura, ma indipendentemente da essa, non facciamo certo nulla di nuovo. E desiderabile però che si metta una buona volta ed espressamente in evidenza questo punto di vista, poiché l'investigazione recente lo omette quasi totalmente. E a questo si collega il fatto che inversamente l'investigazione stessa venne di rado usata a studiare le proprietà di forma degli enti dello spazio, benché appaia di gran vantaggio appunto in questo indirizzo."

5.3 La dimensione internazionale del *Programma.*

Come fa notare padre François Russo nella postfazione all'edizione Pristem Storia del *Programma di Erlangen* [Russo 2004], nel *Programma* emerge a pieno la dimensione internazionale della ricerca matematica. Ma non si può non notare che, a parte il nome del matematico norvegese Sophus Lie e un riferimento al matematico italiano Luigi Cremona contenuto nella locuzione "der CREMONA'schen Transformationen" [Klein 1872 p. 29] (le trasformazioni cremoniane), Klein cita nel corpo del testo dei dieci paragrafi solo autori tedeschi. Il matematico inglese Arthur Cayley non viene nominato nonostante l'importanza che l'*assoluto* ha nel *Programma*; così l'introduzione della circonferenza all'infinito, che nell'edizione del 1872 non aveva una attribuzione, ha un generico riferimento alla "scuola francese" nell'edizione italiana del 1890. Le ricerche sull'algebra di tre matematici francesi sono citate nel paragrafo conclusivo come modello epistemologico per le ricerche geometriche basate sul concetto di gruppo di trasformazioni; è in questo contesto che Klein nomina i matematici francesi Galois, Serret e Jordan. Abbiamo già visto nel paragrafo conclusivo del precedente capitolo 4.0.3 l'importanza che ebbe il viaggio di studio di Lie e Klein a Parigi e la relazione intessuta con Jordan che è documentata dalla corrispondenza dei due matematici. Con la citazione nel paragrafo conclusivo Klein riconosce a Jordan un ruolo principale per quanto riguarda l'algebra e la teoria dei gruppi di sostituzione ma non per quanto riguarda la geometria, e in particolare non per quanto riguarda la geometria delle trasformazioni.

La descrizione dello sviluppo della geometria contenuta nel corpo del testo del *Programma* porge una immagine della ricerca in geometria dominata dai matematici tedeschi, immagine mitigata solo dalle note a piè di pagina e ulteriormente mitigata dalle aggiunte fatte in occasione della ristampa del 1890. Il *Programma* fu scritto nel 1972 ad un anno dalla vittoria prussiana sui francesi del 1871 e, a mio avviso, presenta un certo contrasto irrisolto tra una visione nazionale della scienza e la realtà della dimensione internazionale. Infatti, se da una parte il testo del 1890 nel suo complesso offre lo spunto per una riflessione epistemologica sulla scienza come opera internazionale, dall'alta il corpo del testo restituisce un'immagine dello sviluppo della scienza volutamente nazionale.

Capitolo 6

Conclusioni

La ricostruzione storica di Thienard, considerata nella prima parte di questo lavoro, si basa fortemente su due scritti di Michel Chasles (1793-1880): l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (1837) e il *Rapport sur les progrès de la géométrie* (1871). I lavori di Chasles presentano diversi punti critici che in parte si riflettono nella ricostruzione storica di Thienard. Questi punti critici ci permetteranno di introdurre alcuni dei lavori recenti sulla storia delle trasformazioni geometriche.

Nell'*Aperçu historique* Chasles non prende in considerazione lo sviluppo di una nozione di trasformazione geometrica presente nella tarda età ellenistica e nella civiltà islamica[1], verosimilmente perché non gli era nota nessuna fonte islamica che trattasse l'argomento.

Thienard, nei lavori citati, si occupa della matematica europea dell'età moderna e contemporanea. Il suo punto di partenza sono le opere di Girard Desargues (1591-1661). La nozione di trasformazione geometrica sviluppata nella matematica islamica è stata studiata, invece, da Roshdi Rashed, Pascal Crozet e Jan P. Hogendijk. Rashed dedica a questa nozione il quarto volume della sua opera enciclopedica sulla matematica islamica *Les mathématiques infinitésimales du IX*^{e} *a XI*^{e} *siècle* (2002).

Sempre nell'*Aperçu historique* Chasles non prende in considerazione i lavori dei

[1]Michel Chasles nel suo *Aperçu historique* prima di passare in rassegna i contributi dei matematici ellenistici sostiene che "Après Archimède et Apollonius, et pendant trois ou quatre siècles, quelques géomètres renommés à juste titre, sans égaler ces deux grands hommes, continuèrent d'enrichir la Géométrie de découvertes et de théories utiles; ensuite vinrent, pendant deux ou trois siècles encore, les commentateurs qui nous ont transmis les ouvrages et les noms des géomètres de l'antiquité; puis enfin les siècles d'ignorance, où la Géométrie a sommeillé chez les Arabes et les Persans, jusqu'à la renaissance des lettres en Europe." [Chasles 1837 p. 23]

matematici tedeschi[2].

Inoltre non prende in considerazione le trasformazioni in forma analitica, se non marginalmente, perché nell'*Aperçu historique* si propone di sviluppare "una analisi rapida delle principali scoperte che hanno portato la Geometria pura al grado di estensione a cui è pervenuta ai nostri giorni[3]" [Chasles 1837 p. 1]. Come mostrato nel secondo capitolo, le trasformazioni in forma analitica sono legate a sviluppi importanti della geometria delle coordinate come la classificazione delle coniche e delle cubiche.

I limiti della ricostruzione storica fatta da Chasles vengono integrati da Thienard facendo riferimento alla traduzione francese dell'enciclopedia tedesca *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[4] e ad alcuni estratti delle opere di Jakob Steiner (1796-1863). Ma anche lui focalizza la sua attenzione sulle trasformazioni in forma sintetica tralasciando lo sviluppo delle trasformazioni geometriche in forma analitica.

Alcune opere della geometria proiettiva sintetica, che non erano state tradotte in passato, hanno trovato traduzioni ed edizioni critiche recentemente, si pensi alla traduzione francese da Philippe Nabonnand della *Geometrie der lage* di Von Staudt (1798-1867), e si aggiungono così al materiale disponibile per approfondire il ruolo delle trasformazioni geometriche nell'Ottocento. Tuttavia, alcune opere capitali per lo sviluppo e la diffusione del concetto di trasformazione geometrica come il *Der barycentrische Calcul* (1828) di A. F. Möbius (1790-1868) non sono tuttora state oggetto di edizioni critiche o traduzioni e sono pertanto meno accessibili. Il contributo di Möbius alla geometria sia analitica che sintetica e alla statica rimane largamente inesplorato.

Il lavoro di ricerca condotto sulla genesi delle isometrie ha portato a considerare Euler sia per la cinematica *ante-litteram* che per le trasformazioni in forma analitica, Chasles e la "cinematica empirista" per quanto riguarda invece una descrizione sintetica dei movimenti rigidi e Jordan per l'inquadramento delle isometrie come gruppo di trasformazione.

La ricostruzione storica dei movimenti rigidi come trasformazioni geometriche mostra come esse siano il risultato della sintesi del portato di diverse discipline: la geometria analitica, la cinematica, le ricerche sui fondamenti empirici e percettivi della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee. Questa non è la sola diffe-

[2]Scrive Chasles "Plusieurs géomètres allemands, MM. Steiner, Plücker, Möbius, etc., dignes collaborateurs des célèbres analystes Gauss, Crelle, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, etc., écrivent dans ce dernier recueil [Journal für die reine und angewandte Mathematik] sur les nouvelles doctrines de la Géométrie rationnelle. Nous éprouvons un vif regret de ne pouvoir citer ici leurs ouvrages, qui nous sont inconnus, par suite de notre ignorance de la langue dans laquelle ils sont écrits." [Chasles 1837 p. 215 nota 1]

[3]"Nous nous proposons, dans cet aperçu, de présenter une analyse rapide des principales découvertes qui ont porté la Géométrie pure au degré d'extension où elle est parvenue de nos jours, et particulièrement de celles qui ont préparé les méthodes récentes." [Chasles 1837 p. 1]

[4]J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier-Villars /Leipzig, B.G. Teubner (1913-1916).

renza tra la genesi delle isometrie e quella delle prime trasformazioni proiettive che nascono, invece, dall'inserimento nella geometria euclidea delle tecniche della prospettiva, e che si rivela un'idea feconda grazie alla generazione delle coniche mediante proiezione e sezione di una circonferenza.

I gruppi di trasformazione nascono con la rivoluzionaria memoria di Jordan sui movimenti rigidi e la cristallografia studiata nel quarto capitolo del presente lavoro. Il lavoro di Jordan è rivoluzionario sia per l'introduzione del concetto di gruppo nell'ambito dello studio dei movimenti rigidi che per l'uso che Jordan ne fa nello studio dei modelli geometrici dei cristalli. La memoria di Jordan segna la nascita per analogia del concetto di gruppo di trasformazioni da quello di gruppo di sostituzioni. Come mostrato i successivi lavori di Jordan sui gruppi di sostituzione mostrano una mutua influenza dei due ambiti.

Con la memoria di Jordan anche nella cinematica si giunge a considerare le isometrie dirette come totalità, così come Möbius aveva già fatto nel suo *Der barycentrische Calcul* del 1827. Si tratta di una evoluzione sia della concezione del movimento rigido che delle sue applicazioni: dallo studio dei movimenti rigidi della cinematica di Chasles, che trovava applicazioni nella teoria delle macchine, si passa ad uno studio delle isometrie che trova applicazione nella cristallografia.
Come in Chasles, anche nella memoria di Jordan le isometrie non sono considerate come trasformazioni ma come movimenti. Già Chasles aveva notato che i movimenti rigidi sono casi particolari di trasformazioni proiettive ma preferì svilupparne la teoria nell'ambito della meccanica, confermando quanto detto da Klein, nel suo *Programma*, a proposito dello scarso interesse che lo studio delle isometrie ha per lo sviluppo della geometria.

Il ruolo delle applicazioni alla cristallografia, pur non essendo stato approfondito nel presente lavoro, appare come un apporto importante per lo sviluppo del concetto più generale di gruppo di simmetria. Sotto questo aspetto sono particolarmente interessanti le opere citate di Sohnke e di Schönflies. Il loro studio, tra l'altro, potrà, eventualmente, permettere di chiarire quale sia l'errore addebitato da Sohnke a Jordan, questione i cui elementi sono stati solo delineati, nel presente lavoro, ma non sviluppati. Le opere di Schönflies sono interessanti anche per quanto riguarda l'introduzione delle isometrie indirette.

Jordan con il suo modo originale di considerare i reticoli di Bravais ha portato la cristallografia all'interno della matematica. Mentre Jordan affronta il problema di caratterizzare tutti i possibili modelli matematici dei cristalli, gli studi portati avanti dai mineralogisti affrontavano, invece, il problema pratico della classificazione visto da una prospettiva più legata alle scienze naturali.
Nell'Ottocento si sono sviluppati diversi sistemi di classificazione dei cristalli basati anch'essi sull'idea di sovrapposizione del modello ma sviluppati con terminologie e notazioni non matematiche. Lo studio delle caratteristiche matematiche di questi sistemi di classificazione è un problema aperto sia per la storia della matematica che per la storia della cristallografia.

La memoria di Jordan apre verso l'aspetto delle strutture algebriche, di cui la memoria di Jordan e il *Programma di Erlangen* sono solo il punto di partenza.

L'insegnamento della matematica sembra aver influenzato fortemente lo sviluppo delle isometrie. Le isometrie del piano non presentano grosse difficoltà e furono usate in forma intuitiva tanto che la loro definizione matematica si può rintracciare solo in scritti didattici della seconda metà dell'Ottocento; così non è per i movimenti rigidi dello spazio, in particolare per le rotazioni.
La ricostruzione presentata nella seconda parte del presente lavoro inizia proprio con le rotazioni nello spazio; infatti la genesi delle isometrie dirette si può ricondurre allo studio geometrico del moto anche se, come abbiamo visto, saranno considerate come trasformazioni solo più tardi. Le rotazioni piane possono essere generalizzate nello spazio sia considerando il moto attorno ad un asse che considerando il moto attorno ad un punto fisso. La riduzione di quest'ultimo caso alle rotazioni assiali, sia per quanto riguarda i movimenti finiti che infinitesimi, è uno dei risultati della *cinematica ante-litteram.* Euler, che affronta il problema nel testo analizzato, tuttavia, vedeva le sue ricerche sul moto geometrico come propedeutiche alle ricerche dinamiche; il suo articolo, infatti, verrà inserito come capitolo nella seconda edizione del suo trattato di meccanica.

Abbiamo visto come questo si rapporti alla ricerca fatta da Euler della migliore rappresentazione analitica del moto di un corpo rigido. Anche i lavori di Chasles, guidati da una epistemologia che possiamo definire empirico-intuitiva, ricercano una rappresentazione del moto che sia più vicina alla geometria pura e alla sua epistemologia. Entrambi, Euler e Chasles, cercano una rappresentazione migliore pur riferendosi a due epistemologie e finalità differenti.

La scelta di approfondire sia lo sviluppo analitico che sintetico delle trasformazioni, che caratterizza il presente lavoro, mette in evidenza i rapporti tra i due indirizzi e permette di contestualizzare sia gli elementi di continuità che quelli di opposizione tra i due indirizzi.

Gli aspetti citati possono essere ulteriormente investigati, nel caso di Euler prendendo in considerazione la seconda edizione della Meccanica e il suo ricco epistolario; nel caso di Chasles, invece, prendendo in considerazione la sua attività di insegnamento nell'*École polytecnique* dove tenne il "Cours de Géodésie et Machines" dal 1841 al 1851. Ulteriori studi condotti in tal senso potrebbero contribuire a colmare la conoscenza del contesto sociale, culturale e istituzionale che ha fatto da sfondo alla genesi delle isometrie nel periodo che va dall'*Introduction in analysis infinitorum* di Euler (1748) al Programma di Erlangen di Felix Klein (1872) solo sfiorata e quindi rimasta inesplorata in questo lavoro.

Bibliografia

Fonti

[1] Académie des Sciences, *Fascicule personel Camille Jordan*

[2] Académie des Sciences, *Pochette de séance 5 Août 1867*

[Allardice 1891] R. E. Allardice, "The Barycentric Calculus of Mobius", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 10 (1891): pp 2-21. DOI: `http://dx.doi.org/10.1017/S0013091500030923`.

[Battaglini 1872a] Giuseppe Battaglini, "Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido", *Giornale di matematiche* **72** (1872): pp. 207 – 216.

[Battaglini 1872b] Giuseppe Battaglini, "Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido",*Giornale di matematiche* **72** (1872): pp. 295 – 302.

[Betti 1850] nrico Betti, "Sulla risoluzione delle equazioni algebriche", *Annali di scienze matematiche e fisiche* **3** (1852): 49 – 115.

[Bravais 1850] "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués réguliérement sur un plan ou dans l'espace", in *Etudes cristallografiques*, Paris: Gauthier-Villars (1866). Pubblicato originariamente nel *Journal de l'école polytechnique* **19** (1850): 1 – 128.

[Bravais 1866] August Bravais, *Etudes cristallografiques*, Paris: Gauthier-Villars (1866).

[Brisse 1870] Charles Brisse, "Mémoire sur le déplacement des figures", *Journal de mathématiques pures et appliquées* **15** (1870): pp. 381-314.

[Brisse 1870] Charles Brisse, "Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable. ", *Journal de mathématiques pures et appliquées* **19** (1874): pp. 221-264.

[Carnot 1803] Lazare Carnot, *Geometrie de position*, Paris: J. B. M. Duprat (1803).

[Chasles 1830a] Michel Chasles, “Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit d'un corps solide libre”, *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* **14** (1830): pp. 321 – 326.

[Chasles 1830b] Michel Chasles, “Mémoire de géométrie pure sur les systèmes de forces, et les systèmes d'aires planes ...”, *Correspondance mathématique et physique* **6** (1830): pp. 92 - 120. Reperibile online: `https://books.google.it/books?id=_H9aAAAAcAAJ`.

[Chasles 1843] Michel Chasles, “Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace”, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **16** (1843): pp. 1420 – 1432.

[Chasles 1860] Michel Chasles, “Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable”, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **51** (1860): pp. 855 - 863, 905 – 914; **52** (1861): pp. 77 – 85, 189 – 197, 487 – 501, 551.

[Chasles 1870] Michel Chasles, *Rapport sur le progrès de la Géométrie*, Paris: Imprimerie nationale (1870).

[Chasles 1880] Michel Chasles, *Exposé historique concernant le cours de machines : dans l'enseignement de l'Ecole Polytechnique*, Paris: Gauthier-Villars (1880). Disponibile online: `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996897`.

[Chelini 1860] Domenico Chelini, *Elementi di meccanica razionale, con appendice sui principi fondamentali delle matematiche*, Bologna, G. Legnani, 1860.

[Chelini 1862] Domenico Chelini, “Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile”, *Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, II **1**, Bologna (1862): pp. 361 - 383.

[Cremona 1864] Luigi Cremona, “Oeuvres de Desargues réunie et analysée par m. Poudra ...”, *Giornale di matematiche* **2** (1864): pp. 115 – 121.

[De Beaumont 1865] Élie de Beaumont, “Fragment de l'éloge historique d'August Bravais, lu devant l'Académie des Sciences, dans sa séance publique du 6 février 1865, par M. Élie de Beaumont, Secrétaire perpétuel”, in August Bravais, *Etudes cristallografiques*, Paris: Gauthier-Villars (1866): pp. VII – IX.

[E. D. B. 1866] [Élie de Beaumont], “Avertissement”, in August Bravais, *Etudes cristallografiques*, Paris: Gauthier-Villars (1866): p. VI.

[Euler 1748] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios (1748). Note: indice Enestrom: E101.

[Euler 1775] Leonhard, Euler "Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum", *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **20** (1776): pp. 189-207. Disponibile online presso Euler Archive `http://eulerarchive.maa.org/pages/E478.html`.

[Euler 1796] Leonhard Euler, *Introduction ò l'analyse infinitésimale* **1**, Paris: Barrois (1796). Note tradotta da J. N. Labey.

[Euler 1797] Leonhard Euler, *Introduction ò l'analyse infinitésimale* **2**, Paris: Barrois (1797). Note tradotta da J. N. Labey.

[Fano e Carrus 1915] Gino Fano e Sauveur Carrus "Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le 19ième siècle", *Encyclopeédie des sciences matheématiques* **3** vol. 1, Paris, Gauthier-Villars (1915): pp. 185 – 259.

[Giorgini 1836] Gaetano Giorgini, "Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti di forma invariabile", *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze* **21** (1836): pp. 1 -53.

[Haüy 1815] René-Just Haüy, "Mémoire sur une loi de cristallisation, appelée loi de symétrie", *Mémoires du Muséum d'Histoire naturelle* **1** (1815): pp 81-101, 206-225, 273-298, 341-352. Anche in *Journal des Mines*, **37** (1815): pp. 215-235, 347-369; **38** (1815): pp. 5-34, 161-174.

[Helmholtz 1866] Hermann Helmholtz, "Über die Tatsachen, die Geometrie zu Grunde liegen", *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg* 22 (1866): pp. 197-202.

[Hilbert 1902] David Hilbert, "Ueber die Grundlagen der Geometrie", *Mathematische Annalen* 56 (1902): pp. 381 – 422. Anche in David Hilbert, *Fondamenti della geometria*, Franco Angeli (2009).

[Jordan 1867] Camille Jordan, "Sur les groupes de mouvements", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **65** (1867): pp. 113-115.

[Jordan 1868] Camille Jordan, "Memoir sur les groupes de mouvements", *Annali di matematica pura e applicata* **11** (1868): pp. 167-215, 322-345.

[Jordan 1870] Camille Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris: Gauthier-Villars (1870).

[Klein 1872] Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen von Dr. Felix Klein o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.*, Erlangen, Verlag von Andreas Deichert (1872).

[Klein 1890] Felix Klein, "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti", *Annali di matematica pura e applicata* II **17** (1890): pp. 307 - 343. Note: disponibile in rete `http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1890_1`.

[Klein 1926] Felix Klein, *Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, Julius Springer Verlag (1926). Traduzione inglese: *Development of Mathematics in the Nineteenth Century*, Lie Groups Series 9, Math Sci Press (1979).

[Lacroix 1797] Silvèstre-François Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* **1**, Paris: Duprat (1797).

[Lagrange 1811] Joseph Luis Lagrange, *Méchanique analytique*, Paris (1811).

[Méray 1874] Charles Méray, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Gauthier - Villars (1874).

[Möbius 1827] August Ferdinand Möbius, *Der barycentrische Calcul: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig, Johan Ambrosius Barth (1827).

[Monge 1784] Gaspard Monge, "Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1786): pp. 19 – 33. `https://books.google.it/books?id=WFgFAAAAQAAJ`.

[Monge 1803] Gaspard Monge, "De l'intégrale de l'équation différentiel à deux variables $y = xF.p + f.p$ F et f étant des fonctions quelconque de $p = \frac{dy}{dx}$", *Correspondance Sur L'école Impériale Polytechnique* **1** (1803): pp. 73 - 75.

[Mozzi 1763] Giulio Mozzi, *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*, Napoli, Nella stamperia di Donato Campo (1763).

[Newton 1850] Isaac Newton, *Enumeration of lines of the third order*, London, H. G. Bohn (1850).

[Pappus 1933] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Bruges - Paris: Desclée de Brouwer (1933). Note: traduzione a cura di Paul Ver Eecke.

[Poincaré 1902] Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris (1902).

[Poncelet 1822] Jean Victor Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Parigi (1822).

[Poncelet 1865] Jean Victor Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Parigi (1865).

[Riemann 1868] Bernhard Riemann, "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13** (1868): pp. 133-150.

[Rodrigues 1840] Olinde Rodrigues, "Des lois géométriques qui régissent les déplacement d'un système solide dans l'espace, et de la variation de coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire", *Journal de mathématiques pures et appliquées* **5** (1840): p. 380-440.

Studi

[Amaldi 1931] Ugo Amaldi, "Ciclici, punti", *Enciclopedia italiana di scienze, arti e lettere*, Roma, Istituto Giovanni Treccani (1931). Note: disponibile online `http://www.treccani.it/enciclopedia/punti-ciclici_(Enciclopedia-Italiana)/`.

[Bailhache 1978] Luis Poinsot e Patrice Bailhache, *La théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, Paris, Vrin (1978).

[Birkhoff e Bennett 1988] Garret Birkhoff e Mary Katherine Bennett, "Felix Klein and His 'Herlangen Programm' ", in *History and philosophy of modern mathematics*. Minnesota Studies in Philosophy of Science XI, University of Minnesota Press, Minneapolis (1988): pp. 145 – 176.

[Boyer 1956] Carl B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, New York: Scripta Mathematica (1956).

[Bradley e Sandifer 2007] Robert E. Bradley e C Edward Sandifer, Leonhard Euler: *Life, Work and Legacy*, *Studies in the History and Philosophy of Mathematics* **5** (2007).

[Burke 1966] John J. Burke, *Origins of the Science of Crystals*, University of California Press(1966).

[Burkhardt 1967] Johann Jakob Burckhardt, "Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen", *Archive for History of Exact Sciences* **4** (1967): pp. 236 - 246.

[Capecchi 2000] Danilo Capecchi, "Le Recherches sur la libration de la lune di Lagrange e il principio dei lavori virtuali", *Atti del XX congresso nazionale di storia della fisica e dell'astronomia* (2000): pp. 85 - 106. Note: `http://www.brera.unimi.it/SISFA/atti/atti2000.html`.

[Daston 1986] orraine J. Daston, "The physicalist tradition in early nineteenth century French Geometry", *Studies in History and Philosophy of Science* **17** (1986): pp. 269 - 295.

[Gray 2005] Jeremy Gray, "Olinde Rodrigues's Paper of 1840 on a Group of Transformations", in Simon Altmann e Eduardo L. Ortiz *Mathematics and social utopias in France: Olinde Rodrigues and his times*, Providence: American Mathematical Society (2005).

[Hawkins 1984] Thomas Hawkins, "The Erlangen Programm of Felix Klein: Reflection on Its Place in the History of Mathematics", *Historia mathematica* **11** (1984): pp. 442 – 470.

[Hon e Goldstein 2008] Giora Hon e Bernard R. Goldstein, *From* Summetria *to Symmetry: the making of a revolutionary scientific concept*, Springer Verlag (2008).

[Katz 2007] Victor J. Katz, "Euler's Analysis Textbooks" in *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, *Studies in the History and Philosophy of Mathematics* **5** (2007): pp. 213 - 233.

[Kline 1962] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico* **2**, Torino: Einaudi (1962).

[Koetsier 2007] Teun Koetsier, "Euler and Kinematics" in *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, *Studies in the History and Philosophy of Mathematics* **5** (2007): pp 167-194.

[Marcolongo 1934] Roberto Marcolongo, "Mozzi dei Garbo, Giulio Giuseppe", *Enciclopedia Italiana* (1934).

[Russo 2004] François Russo, *Gruppi e geometria: La genesi del programma di Erlangen* in "Felix Klein il programma di Erlangen", *Pristem/Storia Note di Matematica, Storia, Cultura* **7** (2004).

[Sten 2007] Leonhard Euler e John Sten (traduttore), General formulas for any translation of rigid bodies.

[Stubhaug 2002] Arild Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie: It was the Audacity of My Thinking*, Heidelberg (2002).

[Thienard 1994] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 1: la genèse de la notion de transformation, Les premières transformations, IREM Poitier (1994).

[Thienard 1995a] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 2: la rédecouvert, l'influence de Monge, l'oeuvre capitale de Poncelet, IREM Poitier (1995).

[Thienard 1995b] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 5: le problème de mouvement en géométrie, IREM Poitier (1995).

[Thienard 1997] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 3: le concept maîtrisé. L'époque de Chasles. IREM Poitier (1997).

[Thienard 1998a] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 4: les apports externes, IREM Poitier (1998).

[Thienard 1998b] Jean-Claude Thienard, *Notion de transformation: éléments pour une étude historique et épistémologique*, Article 7: les transformation et la classification des géométries, IREM Poitier (1998)..