UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

DOTTORATO IN MATEMATICA, XIX CICLO

Stime sul bordo per soluzioni di equazioni ellittiche singolari

Relatore

Prof. Giovanni Porru

Tesi di

Claudia Anedda

Settore Scientifico Disciplinare **Mat/05**

Anno Accademico 2005 - 2006

Indice

Introduzione

Nella prima parte di questa tesi viene studiata l'equazione $\Delta u + f(u) = 0$ in un dominio regolare (che soddisfa la proprietà della sfera interna e della sfera esterna) e limitato Ω di $\mathbb{R}^N$, dove $f(t)$ è una funzione regolare positiva, decrescente, e che tende a infinito per t che tende a zero.

D'ora in avanti useremo il termine ″funzione regolare″ per indicare una funzione che sia almeno continua; in alcuni casi, comprensibili dal contesto, essa potrà essere anche derivabile, con derivata continua.

Considerando il problema di Dirichlet omogeneo corrispondente all'equazione $\Delta u + f(u) = 0$, si osserva che la soluzione u deve tendere a zero vicino al bordo $\partial\Omega$, perciò Δu tende all'infinito. Per questo motivo una tale equazione viene detta *singolare*.

Nella seconda parte della tesi si studia invece l'equazione $\Delta u = f(u)$ in un dominio regolare e limitato Ω di $\mathbb{R}^N$, dove $f(t)$ è una funzione regolare, crescente per $t > 0$ e che soddisfa la condizione di Keller-Osserman. Se si considera la condizione sul bordo $u(x) \to \infty$ per $x \to \partial\Omega$, la soluzione di quest'altro problema di Dirichlet è chiamata soluzione *blow-up* (o *esplosiva*).

In entrambi i casi si parla di equazione singolare.

Risulta interessante studiare il comportamento, vicino alla frontiera del dominio, della soluzione di questi problemi; è possibile stimare la soluzione in funzione della distanza $\delta(x)$ di un punto x dal bordo. Sotto opportune ipotesi su $f(t)$ si osserva che, in prima approssimazione, tale stima non dipende dalla geometria del dominio Ω, mentre tale dipendenza compare solo a partire dal secondo ordine nello sviluppo asintotico della soluzione stessa.

Problemi che coinvolgono equazioni del tipo di quelle considerate in questa tesi, in modo particolare nel primo capitolo, sorgono nella teoria della conduzione del calore e in certi problemi della meccanica dei fluidi, in particolare dei fluidi pseudoplastici ([31], [57], [65]).

Ad esempio, problemi del tipo

$$\Delta u + f(u) = 0 \;\text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{a}$$

sorgono naturalmente quando si considera un mezzo conduttore che occupa un dominio Ω; supponiamo che in $x \in \Omega$ sia mantenuta una certa differenza di potenziale elettrostatica $E(x)$. Allora passerà un flusso di corrente elettrica stazionaria e ogni punto di Ω diventerà una sorgente di calore. La distribuzione di temperatura u in regime stazionario in Ω deve soddisfare la seguente equazione

$$\sigma(x, u(x))\mathrm{div}[s(x)\nabla u(x)] = -E^2(x) \quad x \in \Omega\ , \tag{b}$$

dove $s(x)$ denota la conducibilità elettrica del mezzo nel punto x e $\sigma(x, u)$ rappresenta la resistività elettrica in x del mezzo quando esso è a temperatura u. Ricordiamo che la conducibilità elettrica (o conduttanza specifica, o conduttività) è l'espressione quantitativa dell'attitudine di una unità dimensionale standard di un conduttore ad essere percorsa da corrente elettrica, ed è definita dalla relazione

$$s(x) = \frac{n\ e^2 \lambda}{m\ v}\ , \qquad (c)$$

dove λ è il cosiddetto libero cammino medio, cioè la distanza media percorsa da una particella tra un urto e l'altro. Si suppone, infatti (in base alla teoria di Drude), che i portatori di carica, gli elettroni, all'interno di un mezzo conduttore si muovano di un moto turbolento e siano continuamente soggetti ad urti fra loro; le forze agenti sono quella impulsiva dovuta agli urti, e la forza coulombiana. La quantità e che compare nella (c) è la carica elettronica, n rappresenta il numero di portatori di carica per unità di lunghezza, m è la massa della particella e v è la velocità termica, cioè la velocità media degli elettroni in volo, che è proporzionale alla radice della temperatura assoluta, perciò varia al variare di quest'ultima. Un conduttore, per esempio un metallo, ha alta conducibilità, mentre in un semiconduttore la conducibilità varia a seconda di differenti condizioni, come l'esposizione dei materiali a campi elettrici, o a determinate frequenze di radiazioni elettromagnetiche.

Nella (b) compare anche la resistività elettrica (o resistenza specifica) $\sigma = \frac{1}{s}$, definita come l'inverso della conducibilità elettrica; essa è un indice della difficoltà opposta da una porzione standard di un materiale al passaggio della corrente elettrica, e può essere definita anche come rapporto tra l'intensità del campo elettrico e la densità di corrente.

La resistività di un metallo solitamente diminuisce linearmente con la temperatura, fino a raggiungere un valore minimo chiamato resistività residua; nei semiconduttori la resistività diminuisce esponenzialmente con l'aumentare della temperatura, mentre i cosiddetti superconduttori, portati a temperature sufficientemente basse, assumono una resistività pari a zero.
Il fattore $s(x)$ che compare nella (b) è costante solo nei mezzi omogenei e isotropi, e in tal caso si ha

$$\sigma(x, u(x))s\Delta u(x) = -E^2(x) \quad x \in \Omega \ .$$

Se supponiamo che il mezzo che circonda Ω sia a temperatura zero, la legge di trasmissione di Newton implica, in questo caso, che

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \ ,$$

che è la condizione al bordo del nostro problema. E' ragionevole, dal punto di vista fisico, supporre che

$$f(x, u) = \frac{E^2(x)}{s\sigma(x, u)} \quad \text{per } x \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad u > 0$$

definisca una funzione illimitata quando $u \to 0$ uniformemente per $x \in \Omega$ e limitata per $u \to \infty$ uniformemente per $x \in \Omega$. La $f(u)$ del problema (a) soddisfa queste ipotesi, per cui (a) è un modello per questo problema fisico.

Per quanto riguarda la modellizzazione del problema di Dirichlet del tipo

$$\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega \ , \qquad u(x) \to \infty \quad \text{per } x \to \partial\Omega \ , \tag{d}$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$ e $f(t)$ è una funzione regolare, crescente per $t > 0$, tale che $f(0) = 0$, e che soddisfa la condizione di Keller-Osserman

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} < \infty \ , \quad F(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau \quad ,$$

riportiamo i seguenti esempi ([9], [49]).

Per $N = 2$, consideriamo la metrica

$$|ds| = e^{u(x)}|dx| \ , \qquad |dx|^2 = |dx_1|^2 + |dx_2|^2 \ .$$

La curvatura di Gauss corrispondente è data da

$$K(x) = -\frac{\Delta u}{e^{2u}} \ .$$

Se si vuole che $K(x)$ sia costante e negativa $-c^2$, allora occorre risolvere l'equazione

$$\Delta u = c^2 e^{2u} \ .$$

Se, inoltre, si vuole che tale metrica sia completa, occorre che $u(x) \to \infty$ se $x \to \partial\Omega$.

Per $N > 2$, sia

$$|ds| = u^{\frac{2}{N-2}}|dx| \ , \qquad |dx|^2 = |dx_1|^2 + |dx_2|^2 \ .$$

La curvatura scalare corrispondente è data da

$$K(x) = -\frac{4(N-1)}{N-2}\frac{\Delta u}{u^{\frac{N+2}{N-2}}} \ .$$

Se si vuole che $K(x)$ sia costante e negativa, allora occorre risolvere l'equazione

$$\Delta u = c^2 u^{\frac{N+2}{N-2}} \ .$$

Anche adesso, se si vuole che tale metrica sia completa, occorre che $u(x) \to \infty$ se $x \to \partial\Omega$.

L'equazione $\Delta u = u^p$, con $1 < p < 2$ è stata considerata da Dynkin [30] in problemi di diffusione di un gas.

Infine, un'altra applicazione del problema (d), con $f(t) = t^2$ riguarda il moto browniano (vedi [48] e altri riferimenti nella bibliografia).

Capitolo 1

Stime per soluzioni di equazioni singolari

1.1 Stime della soluzione nel caso $\Delta u + u^{-\gamma} = 0$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\Delta u + f(u) = 0 \ \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$ e $f(t)$ è una funzione regolare, positiva, decrescente, che tende a infinito per t che tende a zero. L'esistenza e l'unicità per questo problema sono stati studiati da Crandall, Rabinowitz e Tartar in [24]; nel loro lavoro viene dimostrato che esiste una soluzione classica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che, vicino a $\partial\Omega$, soddisfa la relazione

$$\lambda\Phi(\delta(x)) \leq u(x) \leq \Lambda\Phi(\delta(x)) \ , \tag{1.2}$$

dove $\Phi = \Phi(s)$ è una soluzione positiva del problema

$$\Phi'' + f(\Phi) = 0, \quad \Phi(0) = 0 \ ,$$

$\delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, λ e Λ sono due opportune costanti positive.

Nel caso in cui $f(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, possiamo prendere $\Phi = \phi$, dove $\phi = \phi(s)$ può essere calcolata esplicitamente; essa è data da

$$\phi(s) = \big(b_\gamma s\big)^{\frac{2}{\gamma+1}} \ , \quad b_\gamma = \frac{\gamma+1}{\sqrt{2(\gamma-1)}} \ . \tag{1.3}$$

In questo caso speciale, la stima della soluzione vicino al bordo, a seconda dei valori di γ, può essere migliorata rispetto alla (1.2). Infatti, in [18] viene dimostrato che esiste una costante B tale che

$$\Big|u(x) - \phi(\delta(x))\Big| \leq B\delta(x) \ . \tag{1.4}$$

Se, inoltre, $\gamma > 3$, la (1.4) viene precisata ancora di più, come mostrato in [54]:

$$\Big|u(x) - \phi(\delta(x))\Big| \leq B\big(\delta(x)\big)^{\frac{\gamma+3}{\gamma+1}} \ .$$

Se $1 < \gamma < 3$, in [17] viene dimostrato che

$$\Big|u(x) - \phi(\delta(x))\Big| \leq B\big(\delta(x)\big)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \ .$$

Ovviamente, la costante B che compare in queste ultime stime non è necessariamente sempre la stessa.

L'esistenza di una soluzione del problema di Dirichlet omogeneo è stato studiato anche per equazioni ellittiche singolari più generali, per esempio nei lavori [26], [37], [41], [47], [67] e [68]. Oltre l'esistenza, è stato studiato anche il comportamento della soluzione $u(x)$ vicino al bordo, ma non esistono risultati che riguardino il calcolo preciso del termine del secondo ordine nell'approssimazione di $u(x)$ sul bordo. In questa tesi viene osservato se e in che modo le caratteristiche geometriche del dominio intervengono in tale termine e, in alcuni casi, viene stimato anche il terzo termine nello sviluppo di $u(x)$ in funzione di $\delta(x)$ e di $\phi(\delta(x))$.

1.2 Stime della soluzione nel caso $\Delta u+u^{-\gamma}+g(u)=0$

Consideriamo il problema (1.1) con $f(t) = t^{-\gamma} + g(t)$, dove $\gamma > 1$ e $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare tale che $t^{-\gamma} + g(t)$ sia positiva e decrescente per $t > 0$.

Osserviamo che questa $f(t)$ è formata da una ″parte principale″ $t^{-\gamma}$ e da $g(t)$, che può essere considerata una perturbazione. Supponendo che $|g(t)|$ cresca come la funzione $t^{-\nu}$, con $\nu < \gamma$, è interessante osservare in che modo, e a che livello, questa perturbazione interviene nella stima della soluzione. Essendo $\nu < \gamma$, ci aspettiamo che una parte della stima, trovata nel caso $f(t) = t^{-\gamma}$, venga ″conservata″, mentre una parte venga modificata dall'effetto della perturbazione.

I risultati esposti in questo paragrafo si trovano in [4].

Facciamo le seguenti ipotesi:

$$g(t) = O(1)t^{-\nu} \ , \quad 1 < \nu < \gamma \ , \tag{1.5}$$

dove $O(1)$ rappresenta una quantità limitata. Supponiamo anche che

$$t^{-\gamma} + g(t) > 0 \quad \text{e} \quad -\gamma\, t^{-\gamma-1} + g'(t) < 0 \quad \forall\, t > 0 \ . \tag{1.6}$$

Definiamo

$$F(t) = \int_t^\infty f(\tau) d\tau \ ,$$

dove $f(t) = t^{-\gamma} + g(t)$. Dato che

$$F(t) = \frac{t^{1-\gamma}}{\gamma - 1} + O(1)\ t^{1-\nu} \ ,$$

si ha che $F(t) \to \infty$ per $t \to 0$ e, per qualche $M > 1$ e per t piccoli, $F(t) < MF(2t)$. Tali condizioni sono le ipotesi del Teorema 2.6 di [37], da cui segue che

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{u(x)}{\phi(\delta(x))} = 1 \ . \tag{1.7}$$

Questa stessa stima nel caso $f(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, segue dalla (1.4).

Teorema 1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato, $\gamma > 1$ un numero reale, e $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa le* (1.5) *e* (1.6), *con*

$$\max\left[\frac{\gamma - 1}{2}, 1\right] < \nu < \gamma \ .$$

Se $u(x)$ è una soluzione del problema (1.1), *con $f(t) = t^{-\gamma} + g(t)$, allora*

$$u(x) = \phi(\delta)[1 + O(1)\delta^\beta] \ , \quad \beta = \frac{2(\gamma - \nu)}{\gamma + 1} \ ,$$

dove ϕ è definita dalla (1.3), *$\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$ e $O(1)$ è una quantità limitata.*

Dimostrazione. Per dimostrare questa stima usiamo il metodo delle sopra e sotto-soluzioni.

Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \phi(\delta)(1 + \alpha\delta^\beta)$$

dove α è un numero reale positivo da determinare. Calcoliamo

$$w_{x_i} = \phi'(\delta)\delta_{x_i}(1 + \alpha\delta^\beta) + \alpha\beta\ \phi(\delta)\delta^{\beta-1}\delta_{x_i}\ ,$$

dove abbiamo denotato con $'$ la derivazione rispetto a δ. Ricordiamo che per $\delta = \delta(x)$ valgono le seguenti proprietà [38]:

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}\delta_{x_i} = 1\ , \quad \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i x_i} = -(N-1)K\ , \tag{1.8}$$

dove $K = K(x)$ è la curvatura media della superficie $\{x \in \Omega : \delta(x) = \text{costante}\}$. Posto $(N-1)K = H$ si ha

$$\Delta w = \phi''(\delta)(1 + \alpha\delta^\beta) - \phi'(\delta)H(1 + \alpha\delta^\beta)$$

$$+2\alpha\beta\delta^{\beta-1}\phi'(\delta) + \alpha\beta\phi(\delta)(\beta-1)\delta^{\beta-2} - \alpha\beta\phi(\delta)H\delta^{\beta-1}\ . \tag{1.9}$$

Usando la (1.3) si trova che la funzione $\phi = \phi(s)$ soddisfa le seguenti relazioni

$$\phi'' = -\phi^{-\gamma}\ , \quad \phi' = \phi^{-\gamma}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ s\ , \quad \phi = \phi^{-\gamma}\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\ s^2\ . \tag{1.10}$$

Dalla (1.9) e (1.10) otteniamo

$$-\Delta w = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 + \alpha\delta^\beta + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ \delta H(1 + \alpha\delta^\beta) - 2\alpha\beta\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ \delta^\beta$$

$$-\alpha\beta(\beta-1)\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\ \delta^\beta + \alpha\beta H\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\ \delta^{\beta+1}\Big]\ , \tag{1.11}$$

da cui segue che

$$-\Delta w > (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 + \alpha\delta^\beta\Big(1 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ \beta$$

$$-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\beta(\beta-1)-M_1\delta\Big)-M_2\;\delta\Big]\ , \tag{1.12}$$

dove M_i, $i=1,2,...$, denotano, qui e nelle righe successive, opportune costanti positive indipendenti da α. D'ora in avanti prenderemo α e $\delta_0>0$ tali che

$$\alpha{\delta_0}^\beta<\frac{1}{2}\,, \tag{1.13}$$

e considereremo punti x di Ω tali che $\delta(x)<\delta_0$. Usando l'ipotesi (1.5) e lo sviluppo di Taylor si trova

$$\begin{aligned} w^{-\gamma}+g(w) &= (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[(1+\alpha\delta^\beta)^{-\gamma}+O(1)(\phi(\delta))^{\gamma-\nu}\Big] \\ &< (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1-\gamma\alpha\delta^\beta+M_3(\alpha\delta^\beta)^2+M_4\delta^\beta\Big]\ . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Dalle (1.12) e (1.14) troviamo che

$$-\Delta w>w^{-\gamma}+g(w) \tag{1.15}$$

se

$$\begin{aligned} 1+\alpha\delta^\beta\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\beta-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\beta(\beta-1)-M_1\delta\Big)-M_2\;\delta \\ >1-\gamma\alpha\delta^\beta+M_3(\alpha\delta^\beta)^2+M_4\delta^\beta\ . \end{aligned}$$

Dopo aver semplificato si ha

$$\begin{aligned} M_4+M_2\;\delta^{1-\beta} \\ <\alpha\left[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(\beta+1)\Big(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}-\beta\Big)-M_1\delta-M_3\alpha\delta^\beta\right]\ . \end{aligned} \tag{1.16}$$

Poiché $\beta<2(\gamma-1)/(\gamma+1)$, possiamo prendere α e δ_0 in modo tale che, in aggiunta alla (1.13), risulti

$$M_1\delta_0+M_3\alpha\delta_0^\beta<\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma+1)}\,(\beta+1)\Big(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}-\beta\Big)\ .$$

Poiché $(\gamma - 1)/2 < \nu$, risulta $\beta < 1$. Facciamo crescere α (e decrescere δ_0) finché la (1.16) è verificata per $\delta(x) < \delta_0$.

Ora mostriamo che è possibile scegliere α e δ_0 in modo tale che $u(x) < w(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Sia $\rho = \alpha {\delta_0}^\beta$, dove α e δ_0 sono presi come in precedenza. Poiché per la (1.7) si ha

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} = 1 \ ,$$

possiamo far decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha {\delta_0}^\beta$) finché

$$\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} > \frac{1}{1+\rho}$$

per $\delta(x) \le \delta_0$. Moltiplicando per $(1 + \alpha\delta^\beta)$ troviamo

$$\frac{w(x)}{u(x)} > \frac{1}{1+\rho}\,(1 + \alpha\delta^\beta) \ .$$

Allora si ha $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Su $\partial\Omega$ si ha $w(x) = u(x) = 0$. Quindi, poiché $t^{-\gamma} + g(t)$ è decrescente, per il teorema del confronto ([38], Theorem 10.1) dalla (1.15) segue che $w(x) \ge u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione del tipo

$$v(x) = \phi(\delta)(1 - \alpha\delta^\beta) \ .$$

Facendo dei calcoli analoghi a quelli fatti per cercare la sopra-soluzione si trova un'equazione simile alla (1.11) con $-\alpha$ al posto di α, cioè

$$-\Delta v = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 - \alpha\delta^\beta + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\delta H(1 - \alpha\delta^\beta) + 2\alpha\beta\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\delta^\beta$$

$$+\alpha\beta(\beta-1)\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\delta^\beta - \alpha\beta H\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\delta^{\beta+1}\Big]\ .$$

Da quest'ultima si ha

$$-\Delta v < (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1-\alpha\delta^\beta\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\beta$$
$$-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\beta(\beta-1)-M_5\delta\Big)+M_6\delta\Big]\ . \tag{1.17}$$

Prendiamo α e δ_0 che soddisfino la (1.13). Per $\delta(x) < \delta_0$, usando l'ipotesi (1.5) e lo sviluppo di Taylor si trova

$$v^{-\gamma}+g(v) = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[(1-\alpha\delta^\beta)^{-\gamma}+O(1)(\phi(\delta))^{\gamma-\nu}\Big]$$
$$> (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1-\gamma\alpha\delta^\beta - M_7\delta^\beta\Big]\ . \tag{1.18}$$

Dalle (1.17) e (1.18) troviamo che

$$-\Delta v < v^{-\gamma}+g(v) \tag{1.19}$$

se

$$1-\alpha\delta^\beta\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\beta-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\beta(\beta-1)-M_5\delta\Big)+M_6\delta$$
$$< 1-\gamma\alpha\delta^\beta - M_7\delta^\beta\ .$$

Dopo aver semplificato si ha

$$M_7+M_6\delta^{1-\beta} < \alpha\Big[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(\beta+1)\Big(2\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1}-\beta\Big)-M_5\delta\Big]\ . \tag{1.20}$$

La disuguaglianza (1.20) (che è simile alla (1.16), ma è più semplice) è verificata per $\delta(x) < \delta_0$, con δ_0 abbastanza piccolo e α sufficientemente grande.

Mostriamo che è possibile scegliere α e δ_0 in modo tale che $v(x) < u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Sia $\rho = \alpha{\delta_0}^{\beta}$, dove α e δ_0 sono scelti come prima. Dal fatto che

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} = 1 \ ,$$

possiamo far decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha{\delta_0}^{\beta}$) finché

$$\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} < \frac{1}{1-\rho}$$

per $\delta(x) \le \delta_0$. Moltiplicando per $(1 - \alpha\delta^{\beta})$ troviamo

$$\frac{v(x)}{u(x)} > \frac{1}{1-\rho}\,(1 - \alpha\delta^{\beta}) \ .$$

Allora risulta che $v(x) < u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Dalla (1.19) segue che $v(x) \le u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Abbiamo dunque provato che, per x vicini a $\partial\Omega$ e α sufficientemente grandi si ha

$$\phi(\delta)(1 - \alpha\delta^{\beta}) \le u(x) \le \phi(\delta)(1 + \alpha\delta^{\beta}) \ ,$$

cioè che

$$u(x) = \phi(\delta)[1 + O(1)\delta^{\beta}] \ .$$

Il teorema è dimostrato. $\square$

Ora enunciamo un altro teorema, che fornisce una stima della soluzione $u(x)$ dello stesso problema, con $g(t)$ che soddisfa le (1.5) e (1.6), ma dove ν varia in un intervallo diverso da quello appena considerato.

Teorema 1.2. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, *un dominio regolare e limitato, e sia* $\gamma > 3$ *un numero reale e* $g(t)$ *una funzione regolare che soddisfa le* (1.5) *e* (1.6), *con*

$$1 < \nu \leq \frac{\gamma - 1}{2} \, .$$

Se $u(x)$ *è una soluzione del problema* (1.1) *con* $f(t) = t^{-\gamma} + g(t)$, *allora*

$$u(x) = \phi(\delta)\Big[1 + \frac{(N-1)K}{3-\gamma}\,\delta + O(1)\delta^{\beta}\Big] \ , \quad \beta = \frac{2(\gamma - \nu)}{\gamma + 1} \ ,$$

dove ϕ *è definita dalla* (1.3), $\delta = \delta(x)$ *è la distanza di* x *da* $\partial\Omega$ *e* $O(1)$ *è una quantità limitata.*

Dimostrazione. Definiamo

$$A = \frac{H}{3-\gamma} \ , \quad H = (N-1)K \ , \tag{1.21}$$

e cerchiamo una sopra-soluzione del tipo

$$w(x) = \phi(\delta)(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma}) \ ,$$

dove σ è un numero reale positivo tale che $\sigma < (\gamma - 3)/(\gamma + 1)$ e α è un numero reale positivo da determinare. Si ha

$$w_{x_i} = \phi'(\delta)\delta_{x_i}(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma}) + \phi(\delta)\ \big(A_{x_i}\delta + A\delta_{x_i} + \alpha(1+\sigma)\delta^{\sigma}\delta_{x_i}\big) \ .$$

Usando anche qui le relazioni (1.8) si trova

$$\Delta w = \phi''(\delta)(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma}) - \phi'(\delta)H(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma})$$

$$+2\phi'(\delta)\Big(\nabla A \cdot \nabla\delta\ \delta + A + \alpha(1+\sigma)\delta^{\sigma}\Big)$$

$$+\phi(\delta)\ (\Delta A\delta + 2\nabla A \cdot \nabla\delta - AH + \alpha(1+\sigma)\sigma\delta^{\sigma-1} - \alpha(1+\sigma)H\delta^{\sigma}) \ .$$

Sfruttando le equazioni (1.10) si ha

$$-\Delta w = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\delta H(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma})$$

$$-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\delta\big(\nabla A\cdot\nabla\delta\;\delta + A + \alpha(1+\sigma)\delta^{\sigma}\big)$$

$$-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\delta^2\big(\Delta A\delta + 2\nabla A\cdot\nabla\delta - AH + \alpha(1+\sigma)\sigma\delta^{\sigma-1} - \alpha(1+\sigma)H\delta^{\sigma}\big)\Big]\ .$$

Come nel teorema precedente, denotiamo con M_i, $i = 1, 2, ...$, costanti positive indipendenti da α; ovviamente le M_i usate qui e nelle righe successive sono in generale diverse da quelle usate in precedenza. Si ottiene

$$-\Delta w > (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 + \delta\Big(A + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,H - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,A\Big)$$

$$+\alpha\delta^{1+\sigma}\Big(1 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,(1+\sigma) - \frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(1+\sigma)\sigma - M_1\delta\Big) - M_2\delta^2\Big]\ . \quad (1.22)$$

Per α fissato, consideriamo $\delta_0 > 0$ tale che, per $\delta(x) < \delta_0$ si abbia

$$-\frac{1}{2} < A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma} < 1\ . \quad (1.23)$$

Usando l'ipotesi (1.5) e lo sviluppo di Taylor si trova

$$w^{-\gamma} + g(w) = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma})^{-\gamma} + O(1)(\phi(\delta))^{\gamma-\nu}\Big]$$

$$< (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 - \gamma A\delta - \gamma\alpha\delta^{1+\sigma}$$

$$+M_3\delta^2 + M_4\delta\alpha\delta^{1+\sigma} + M_5(\alpha\delta^{1+\sigma})^2 + M_6\delta^{\beta}\Big]\ . \quad (1.24)$$

Osserviamo che si può prendere $M_6 = 0$ quando $g(t) \leq 0$. Dalle (1.22) e (1.24) troviamo che

$$-\Delta w > w^{-\gamma} + g(w) \quad (1.25)$$

se

$$1+\delta\Big(A+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,H-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,A\Big)$$

$$+\alpha\delta^{1+\sigma}\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,(1+\sigma)-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(1+\sigma)\sigma-M_1\delta\Big)-M_2\delta^2$$

$$>1-\gamma A\delta-\gamma\alpha\delta^{1+\sigma}+M_3\delta^2+M_4\delta\alpha\delta^{1+\sigma}+M_5(\alpha\delta^{1+\sigma})^2+M_6\delta^{\beta}\ . \quad (1.26)$$

Usando la (1.21) si ha

$$A+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,H-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,A=-\gamma A\ . \quad (1.27)$$

Quindi la (1.26) può essere riscritta come

$$\alpha\delta^{1+\sigma}\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,(1+\sigma)-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(1+\sigma)\sigma-M_1\delta\Big)-M_2\delta^2$$

$$>-\gamma\alpha\delta^{1+\sigma}+M_3\delta^2+M_4\delta\alpha\delta^{1+\sigma}+M_5(\alpha\delta^{1+\sigma})^2+M_6\delta^{\beta}\ ,$$

da cui, semplificando, si ha

$$(M_2+M_3)\ \delta^2+M_6\delta^{\beta}<\alpha\delta^{1+\sigma}\Big[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\Big(\frac{(\gamma-3)}{\gamma+1}\,-\sigma\Big)(\sigma+2)$$

$$-M_5\alpha\delta^{1+\sigma}-(M_1+M_4)\delta\Big]\ . \quad (1.28)$$

Se prendiamo $1+\sigma=\beta$ si ha

$$(M_2+M_3)\delta^{2-\beta}+M_6<\alpha\Big[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\Big(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\,-\beta\Big)(\beta+1)$$

$$-M_5\alpha\delta^{\beta}-(M_1+M_4)\delta\Big]\ . \quad (1.29)$$

Prendiamo α e $\delta_0>0$ in modo tale che risulti

$$M_5\alpha\delta_0^{\beta}-(M_1+M_4)\delta_0<\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\Big(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\,-\beta\Big)(\beta+1)\ .$$

Facciamo nuovamente crescere α e decrescere δ_0 in modo tale che la (1.29) e la (1.23) (con $1+\sigma=\beta$) siano vere per $\delta(x)<\delta_0$. In tal modo la (1.25) è soddisfatta.

Ora, come nella dimostrazione del teorema precedente, mostriamo che è possibile scegliere α e δ_0 in modo tale che $u(x) < w(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Sia $\rho = \alpha {\delta_0}^\beta$, dove α e δ_0 sono presi come in precedenza. Dal fatto che

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} = 1 \ ,$$

segue che possiamo far decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha {\delta_0}^\beta$) finché

$$\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} > \frac{2}{2+\rho}$$

per $\delta(x) \leq \delta_0$. Moltiplicando per $(1 + A\delta + \alpha\delta^\beta)$ si ha

$$\frac{w(x)}{u(x)} > \frac{2}{2+\rho}\,(1 + A\delta + \alpha\delta^\beta) \ .$$

Facendo decrescere ancora α in modo da avere $\alpha {\delta_0}^\beta = \rho$ e $A\delta_0 > -\rho/2$, si ha $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Dato che $w(x) = u(x)$ su $\partial\Omega$, e $t^{-\gamma} + g(t)$ è decrescente, dalla (1.25) segue che $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione del tipo

$$v(x) = \phi(\delta)(1 + A\delta - \alpha\delta^{1+\sigma}) \ .$$

Facendo dei calcoli analoghi a quelli fatti precedentemente si trova un'equazione simile alla (1.22) con $-\alpha$ al posto di α, cioè

$$-\Delta v < (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 + \delta\Big(A + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,H - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,A\Big)$$

$$-\alpha\delta^{1+\sigma}\Big(1-2\frac{\gamma+1}{\gamma\ -1}\,(1+\sigma)-\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(1+\sigma)\sigma-M_7\delta\Big)+M_8\delta^2\Big]\ . \quad (1.30)$$

Prendiamo α e $\delta_0 > 0$ tali che, per $\delta(x) < \delta_0$,

$$-\frac{1}{2} < A\delta - \alpha\delta^{1+\sigma} < 1\ . \qquad (1.31)$$

Usando la (1.5) e lo sviluppo di Taylor si trova

$$v^{-\gamma} + g(v) = (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[(1 + A\delta - \alpha\delta^{1+\sigma})^{-\gamma} + O(1)(\phi(\delta))^{\gamma-\nu}\Big]$$

$$> (\phi(\delta))^{-\gamma}\Big[1 - \gamma A\delta + \gamma\alpha\delta^{1+\sigma} - M_9\delta^{\beta}\Big]\ . \qquad (1.32)$$

Nel caso in cui $g(t) \geq 0$ si può prendere $M_9 = 0$. Dalla (1.32) e (1.30) troviamo che

$$-\Delta v < v^{-\gamma} + g(v) \qquad (1.33)$$

se

$$1 + \delta\Big(A + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,H - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,A\Big)$$

$$-\alpha\delta^{1+\sigma}\Big(1 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,(1+\sigma) - \frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,(1+\sigma)\sigma - M_7\delta\Big) + M_8\delta^2$$

$$> 1 - \gamma A\delta + \gamma\alpha\delta^{1+\sigma} - M_9\delta^{\beta}\ .$$

Usando la (1.27) e semplificando si trova la seguente disuguaglianza, simile alla (1.28) ma più facile

$$M_8\delta^2 + M_9\delta^{\beta} < \alpha\delta^{1+\sigma}\Big[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\Big(\frac{(\gamma-3)}{\gamma+1}\, - \sigma\Big)(\sigma+2) - M_7\delta\Big]\ . \quad (1.34)$$

Posto $1 + \sigma = \beta$ troviamo

$$M_8\delta^{2-\beta} + M_9 < \alpha\Big[\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\,\Big(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\, - \beta\Big)(\beta+1) - M_7\delta\Big]\ . \quad (1.35)$$

Prendiamo ora α e δ_0 in modo tale che la (1.35) e la (1.31) (con $1+\sigma = \beta$) siano verificate per $\delta(x) < \delta_0$.

Sia $\rho = \alpha {\delta_0}^{\beta}$, dove α e δ_0 sono scelti come prima. Dal fatto che

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} = 1 \ ,$$

possiamo far decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha {\delta_0}^{\beta}$) finché

$$\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)} < \frac{2}{2-\rho}$$

per $\delta(x) \leq \delta_0$. Moltiplicando per $(1 + A\delta - \alpha\delta^{\beta})$ troviamo

$$\frac{v(x)}{u(x)} > \frac{2}{2-\rho} \left(1 + A\delta - \alpha\delta^{\beta}\right) \ .$$

Facendo decrescere ancora δ_0 e facendo crescere α in modo da avere $\alpha {\delta_0}^{\beta} = \rho$ e $A\delta_0 < \rho/2$, si ha $v(x) < u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Dalla (1.33) segue che $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Quindi, per x vicino al bordo $\partial\Omega$ e per α abbastanza grande si ha

$$\phi(\delta)(1 + A\delta - \alpha\delta^{\beta}) \leq u(x) \leq \phi(\delta)(1 + A\delta + \alpha\delta^{\beta}) \ ,$$

cioè

$$u(x) = \phi(\delta)[1 + A\delta + O(1)\delta^{\beta}] \ .$$

Ricordando la definizione di A data nella (1.21), il teorema è dimostrato. □

Un caso particolare di questo teorema si ha quando $g(t) \equiv 0$; vale il seguente risultato:

Teorema 1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato, $\gamma > 3$ un numero reale. Una soluzione $u(x)$ del problema (1.1) con $f(t) = t^{-\gamma}$ soddisfa la stima*

$$u(x) = \phi(\delta)\Big[1 + \frac{(N-1)K}{3-\gamma}\,\delta + O(1)\delta^{1+\sigma}\Big] ,$$

dove ϕ è definita dalla (1.3), $\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, $O(1)$ è una quantità limitata e σ è un qualunque numero reale positivo tale che $\sigma < (\gamma-3)/(\gamma+1)$.

Dimostrazione. Utilizziamo le stesse notazioni e gli stessi calcoli del teorema precedente.

Cercando una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \phi(\delta)(1 + A\delta + \alpha\delta^{1+\sigma}) ,$$

troviamo che

$$-\Delta w > w^{-\gamma}$$

se si verifica la disuguaglianza (1.28) con $M_6 = 0$, cioè se

$$\begin{aligned}(M_2 + M_3)\delta^{1-\sigma} < \alpha\Big[&\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}\Big(\frac{(\gamma-3)}{\gamma+1} - \sigma\Big)(\sigma+2) \\ &-M_5\alpha\delta^{1+\sigma} - (M_1+M_4)\delta\Big] . \qquad (1.36)\end{aligned}$$

Poiché $0 < \sigma < (\gamma-3)/(\gamma+1)$, per α fissato la (1.36) è vera con δ abbastanza piccolo. Dalle stesse argomentazioni usate nella dimostrazione del Teorema 1.2, segue che possiamo far crescere α e far decrescere δ_0 in modo che $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Segue che $w(x)$ è una sopra-soluzione su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Con un ragionamento simile, usando la (1.34) con $M_9 = 0$, troviamo che la funzione

$$v(x) = \phi(\delta)(1 + A\delta - \alpha\delta^{1+\sigma})$$

è una sotto-soluzione in $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Il teorema è dimostrato. $\square$

Capitolo 2

Stime per soluzioni blow-up

2.1 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = u^p$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega \ , \qquad u(x) \to \infty \quad \text{per } x \to \partial\Omega \ , \tag{2.1}$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$ e $f(t)$ è una funzione regolare, crescente per $t > 0$, tale che $f(0) = 0$, e che soddisfa la condizione di Keller-Osserman

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} < \infty \ , \quad F(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau \ .$$

E' ben noto ([42], [58]) che sotto queste condizioni il problema (2.1) ammette una soluzione classica chiamata soluzione blow-up (esplosiva) sul bordo. Inoltre, il problema unidimensionale

$$\Phi'' = f(\Phi) \ , \quad \Phi(s) > 0 \ , \quad \lim_{s\to 0} \Phi(s) = \infty$$

ammette una soluzione che soddisfa

$$\int_{\Phi(s)}^\infty \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} = s \ , \quad F(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau \ . \tag{2.2}$$

C. Bandle e M. Marcus [15], sotto l'ipotesi aggiuntiva che $F(t)/t^2$ sia crescente per t grandi, hanno dimostrato che, nei domini Ω convessi, ogni soluzione $u(x)$ del problema (2.1) soddisfa la stima

$$|u(x) - \Phi(\delta(x))| \leq C\delta(x)\Phi(\delta(x)) \;, \tag{2.3}$$

dove $\delta(x)$ è la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$ e C è una costante opportuna.

Nel caso di un dominio Ω generico, C. Bandle e M. Marcus hanno dimostrato anche che, se $f(t)$ soddisfa la condizione di Keller-Osserman, se $F(t)/t^2$ è crescente per t grandi e se esistono a, b, con $1 < a < b$ tali che, per t grandi

$$a\frac{F(t)}{f(t)} \leq \frac{L(t)}{L'(t)} \leq b\frac{F(t)}{f(t)} \;,$$

dove $L(t) = \int_0^t \sqrt{F(\tau)}d\tau$, allora vale la stima

$$C\frac{(\delta(x))^2\Phi'(\delta(x))}{\Phi(\delta(x))} \leq \frac{u(x)}{\Phi(\delta(x))} - 1 \leq C\delta(x) \;, \tag{2.4}$$

dove C è una costante opportuna, non necessariamente la stessa citata prima.

Nel caso particolare $f(t) = t^p$, $p > 1$, si può prendere $\Phi = \phi$, dove $\phi = \phi(s)$ è data da

$$\phi(s) = \big(a_p \; s\big)^{\frac{2}{1-p}} \;, \quad a_p = \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}} \;. \tag{2.5}$$

In questo caso, in [7] viene mostrato che la soluzione del problema (2.1) può essere espressa con lo sviluppo

$$u(x) = \phi(\delta(x))\Big[1 + \frac{(N-1)H(\overline{x})}{p+3}\;\delta(x) + o(\delta(x))\Big] \;,$$

dove $H(\overline{x})$ denota la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto $\overline{x}$ più vicino a x, e $o(\delta)$ rappresenta un infinitesimo di ordine superiore rispetto a δ. In [12] vengono trovate delle stime della soluzione del problema (2.1) per una classe speciale di funzioni $f(t)$, mentre stime di ordine più alto sono state trovate per casi speciali in [1],[19],[55]. Altre equazioni non lineari più generali della (2.1) sono state studiate in altri lavori (si rimanda alla bibliografia, in particolare a [10]). L'influenza della geometria del dominio nei problemi blow-up è stata sudiata anche in [27].

2.2 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = u^p + g(u)$

Consideriamo il problema (2.1) con $f(t) = t^p + g(t)$, $p > 1$, dove $g(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare e tale che $t^p + g(t)$ sia positiva e crescente per $t > 0$.

Osserviamo che questa $f(t)$ è formata da una ″parte principale″ t^p, mentre $g(t)$ può essere considerata una perturbazione. Supponendo che $|g(t)|$ cresca come la funzione t^q, con $-1 < q < p$, è interessante osservare in che modo, e a che livello, questa perturbazione interviene nella stima della soluzione. Essendo $q < p$, ci aspettiamo che una parte della stima, trovata nel caso $f(t) = t^p$, venga ″conservata″, mentre una parte sia modificata dall'effetto della perturbazione.

I risultati riguardanti questo caso nei domini convessi si trovano in [5].

In questa tesi riportiamo i risultati validi per un dominio generico.

Facciamo le seguenti ipotesi per $g(t)$:

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad p\, t^{p-1} + g'(t) > 0 \quad \forall\, t > 0 \tag{2.6}$$

e

$$g(t) = O(1)t^q \,, \quad -1 < q < p \tag{2.7}$$

dove $O(1)$ rappresenta una quantità limitata. Sotto tali ipotesi la condizione di Keller-Osserman per $f(t) = t^p + g(t)$ è verificata, e il primo integrale della (2.2) definisce una funzione $\Phi = \Phi(s)$ tale che $\Phi(s) \to \infty$ quando $s \to 0$.

Lemma 2.1. *Siano p e q due numeri reali con $p > 1$ e $-1 < q < p$. Sia $f(t) = t^p + g(t)$, dove $g(t)$ è una funzione regolare che soddisfa la* (2.7) *la* (2.6)*. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1)*, allora*

$$u(x) = \phi(\delta) + O(1)\delta^{\frac{p-3}{p-1}} + O(1)\delta^{\frac{2(p-q-1)}{p-1}} \,,$$

dove ϕ è la funzione definita dalla (2.5)*, $\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$ e $O(1)$ è una quantità limitata.*

Dimostrazione. Prima mostriamo che

$$\Phi(s) = \phi(s)(1 + O(1)s^\beta) \,, \quad \beta = \frac{2(p-q)}{p-1} \,, \tag{2.8}$$

dove $\Phi = \Phi(s)$ è la funzione definita dalla (2.2). Sia $\rho(s) = (\Phi(s))^{\frac{1-p}{2}}$. Poiché $\Phi(s) \to \infty$ per $s \to 0$, si ha $\rho(0) = 0$. Dalla (2.2) si trova

$$\Phi'(s) = -(2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}} \,. \tag{2.9}$$

D'altra parte,

$$\rho'(s) = \frac{1-p}{2}\,(\Phi(s))^{-\frac{p+1}{2}}\;\Phi'(s)\ . \tag{2.10}$$

Abbiamo

$$F(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1} + G(t), \quad \text{con} \quad G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau\ .$$

Quindi, dalle (2.10) e (2.9) si ottiene

$$\rho'(s) = \frac{p-1}{\sqrt{2}}\,(\Phi(s))^{-\frac{p+1}{2}}\left[\frac{(\Phi(s))^{p+1}}{p+1}\ + G(\Phi(s))\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}\ \left[1+(p+1)(\Phi(s))^{-p-1}G(\Phi(s))\right]^{\frac{1}{2}}\ . \tag{2.11}$$

Essendo $q > -1$, la (2.7) implica che

$$G(t) = O(1)t^{1+q}\ .$$

Quindi,

$$(\Phi(s))^{-p-1}G(\Phi(s)) = O(1)(\Phi(s))^{q-p} = O(1)\rho^{\beta}\ .$$

Inserendo quest'ultima stima nella (2.11) si trova

$$\rho'(s) = a_p\ [1 + O(1)(\rho(s))^{\beta}]\ , \tag{2.12}$$

da cui $\rho'(0) = a_p$. Come conseguenza si ha $\rho(s) = O(1)s$; quindi, dalla (2.12) segue che

$$\rho'(s) = a_p[1 + O(1)s^{\beta}]\ .$$

Integrando quest'ultima su $(0, s)$ si trova

$$\rho(s) = a_p\ s[1 + O(1)s^{\beta}]\ ,$$

cioè

$$(\rho(s))^{\frac{2}{1-p}} = (a_p\ s)^{\frac{2}{1-p}}[1 + O(1)s^{\beta}]\ .$$

Da questa segue la (2.8).

Osserviamo che, sotto le ipotesi fatte, la funzione $f(t)$ è crescente per $t > 0$ e $F(t)t^{-2}$ è crescente per grandi t. Inoltre, se $L(t) = \int_0^t \sqrt{F(\tau)}d\tau$, esistono a, b con $1 < a < b$ tali che, per t grandi, si abbia

$$a\frac{F(t)}{f(t)} \leq \frac{L(t)}{L'(t)} \leq b\frac{F(t)}{f(t)}\ .$$

Infatti

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)f(t)}{L'(t)F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(F(t))^{\frac{3}{2}}(f(t))^{-1}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3/2 - F(t)f'(t)(f(t))^{-2}} = \frac{2(p+1)}{p+3}\ .$$

Allora, usando il Teorema 4 (ii) di [15] segue che possiamo sfruttare la stima (2.4). Poiché nel nostro caso, applicando la regola di de L'Hôpital si trova

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta\Phi'(\delta)}{\Phi(\delta)} = \lim_{t\to\infty} -\frac{\int_t^{\infty}(2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{t(F(t))^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}{(2F(t))^{-\frac{1}{2}} - t(2F(t))^{-\frac{3}{2}}f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{tf(t)}{2F(t)}} = \frac{2}{1-p}\ ,$$

la (2.4) conduce nuovamente alla (2.3). Allora, ricordando che $\delta = \delta(x)$ e inserendo la (2.8) nella (2.3) otteniamo la stima che volevamo dimostrare.

$\square$

Usiamo le stesse notazioni utilizzate nel capitolo precedente e, ricordando le proprietà di $\delta(x)$ espresse dalla (1.8), definiamo:

$$H = (N-1)K \ , \quad A_1 = \frac{H}{p+3} \ , \tag{2.13}$$

$$A_2 = \frac{9-p-2p^2}{12} \, {A_1}^2 + \frac{p-3}{6} \, \nabla A_1 \cdot \nabla \delta \ . \tag{2.14}$$

Sia m il più grande numero intero tale che $m < 2(p+1)/(p-1)$; osserviamo che $m \geq 2$. Se $m > 2$, definiamo $A_3, ..., A_m$ come segue. Siano $C_k = C_k(A_1, ..., A_k)$ tali che la seguente identità sia vera per ogni s

$$\sum_{h=1}^{m} \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix} (A_1 s + ... + A_m s^m)^h = \sum_{k=1}^{m} C_k s^k + O(1) s^{m+1} \ , \tag{2.15}$$

dove

$$\begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix} = \frac{p \ (p-1) \cdots (p-h+1)}{h!} \ .$$

Troviamo

$$C_1 = pA_1 \ , \quad C_k = p \ A_k + P_k(A_1, ..., A_{k-1}) \ , \quad k = 2, ..., m,$$

dove i $P_k(A_1, ..., A_{k-1})$ sono opportuni polinomi. Per esempio

$$P_2(A_1) = \frac{p \ (p-1)}{2} \, {A_1}^2 \ ,$$

$$P_3(A_1, A_2) = p \ (p-1) A_1 A_2 + \frac{p \ (p-1) \ (p-2)}{6} \, {A_1}^3 \ .$$

Usando questi polinomi definiamo i coefficienti A_k, per $3 \leq k \leq m$, in funzione di $A_1, ..., A_{k-1}$ in accordo con l'equazione

$$\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} \, (k+1) \, \Big(k - 2\frac{p+1}{p-1}\Big) A_k + \Big(\frac{p-1}{p+1} - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)} \, (k-1)\Big) H A_{k-1}$$

$$+\Big(2\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1}\,(k-1)\Big)\ \nabla A_{k-1}\cdot\nabla\delta$$
$$+\ \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,\Delta A_{k-2} = P_k(A_1,...,A_{k-1})\ . \tag{2.16}$$

Dato che $k \le m$, si ha $k < 2(p+1)/(p-1)$; quindi la (2.16) definisce A_k, $k = 3,...,m$ in modo ricorsivo. Naturalmente, la (2.16) non è necessaria se $m = 2$.

Nel caso in cui $1 < p \le 3$ usiamo la seguente ipotesi aggiuntiva (vedi [13]):

$$\text{esistono}\ \ \theta_0 < 1,\ t_0 > 1\ \ \text{tali che,}$$
$$\forall\theta\in(\theta_0,1),\ \forall t > t_0,\ \ \text{si abbia}\ \ \theta f(t) > f(\theta t)\ . \tag{2.17}$$

Questa condizione è verificata, per esempio, se $f(t) = t^p + At^q$, con A costante e $q < p$.

Teorema 2.1. *Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\ge 2$, un dominio regolare e limitato, $p > 1$ un numero reale, ed m il massimo numero intero tale che $m < 2(p+1)/(p-1)$. Sia $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa la* (2.6) *e la* (2.7) *con $-1 < q < 1+(m-2)(1-p)/2$. Se $1 < p \le 3$, supponiamo anche che $f(t) = t^p + g(t)$ soddisfi la* (2.17)*. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1)*, con $f(u) = u^p + g(u)$, allora*

$$u(x) = \phi(\delta)\Big[1+\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + O(1)\delta^\beta\Big]\ ,\quad \beta = \frac{2(p-q)}{p-1}\ ,$$

dove ϕ è definita dalla (2.5)*, $\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, $O(1)$ è una quantità limitata e i coefficienti A_k sono definiti dalle* (2.13)*,* (2.14) *e* (2.15)*.*

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \phi(\delta)\Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big) \ ,$$

dove σ è tale che $m < \sigma < 2(p+1)/(p-1)$ e α è una costante positiva da determinare. Calcoliamo

$$w_{x_i} = \phi'(\delta)\delta_{x_i}\Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big)$$

$$+\phi(\delta)\ \Big(\sum_{k=1}^{m}(A_k)_{x_i}\delta^k + \sum_{k=1}^{m} A_k k\delta^{k-1}\delta_{x_i} + \alpha\sigma\delta^{\sigma-1}\delta_{x_i}\Big)\ .$$

Posto $(N-1)K = H$ e usando la (1.8) si ha

$$\Delta w = \phi''(\delta)\Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big) - \phi'(\delta)\Big(H + \sum_{k=1}^{m} HA_k\delta^k + \alpha H\delta^\sigma\Big)$$

$$+2\phi'(\delta)\Big(\sum_{k=1}^{m}\nabla A_k\cdot\nabla\delta\ \delta^k + \sum_{k=1}^{m} kA_k\delta^{k-1} + \alpha\sigma\delta^{\sigma-1}\Big)$$

$$+\phi(\delta)\Big(\sum_{k=1}^{m}\Delta A_k\delta^k + \sum_{k=1}^{m} 2k\nabla A_k\cdot\nabla\delta\ \delta^{k-1}$$

$$+\sum_{k=1}^{m} k(k-1)A_k\delta^{k-2} - \sum_{k=1}^{m} kA_kH\delta^{k-1}\Big)$$

$$+\phi(\delta)\ \Big(\alpha\sigma(\sigma-1)\delta^{\sigma-2} - \alpha\sigma H\delta^{\sigma-1}\Big)\ . \tag{2.18}$$

Usando la (2.5) si trova che la funzione $\phi = \phi(s)$ soddisfa le seguenti relazioni

$$\phi'' = \phi^p\ , \quad \phi' = \phi''\frac{1-p}{p+1}\ s\ , \quad \phi = \phi''\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\ s^2\ . \tag{2.19}$$

Usando la (2.19), dalla (2.18) otteniamo

$$\Delta w = (\phi(\delta))^p\Big[1+\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k+\alpha\delta^\sigma+\frac{p-1}{p+1}\Big(H\delta+\sum_{k=1}^{m} HA_k\delta^{k+1}+\alpha H\delta^{\sigma+1}\Big)$$

$$
+2\frac{1-p}{p+1}\Big(\sum_{k=1}^{m}\nabla A_k\cdot\nabla\delta\ \delta^{k+1}+\sum_{k=1}^{m}kA_k\delta^k+\alpha\sigma\delta^\sigma\Big)
$$
$$
+\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\Big(\sum_{k=1}^{m}\Delta A_k\delta^{k+2}+\sum_{k=1}^{m}2k\nabla A_k\cdot\nabla\delta\ \delta^{k+1}
$$
$$
+\sum_{k=1}^{m}k(k-1)A_k\delta^k-\sum_{k=1}^{m}kA_kH\delta^{k+1}\Big)
$$
$$
+\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\Big(\alpha\sigma(\sigma-1)\delta^\sigma-\alpha\sigma H\delta^{\sigma+1}\Big)\Big]\ .
$$

D'ora in poi denotiamo con M_i, $i=1,2,...$, costanti non negative indipendenti da α. Le costanti M_i che useremo in questo capitolo, benchè chiamate allo stesso modo, sono diverse da quelle usate nel capitolo precedente. Si ha

$$
\Delta w<(\phi(\delta))^p\Big\{1+\delta\Big[A_1+\frac{p-1}{p+1}\,H+2\frac{1-p}{p+1}\,A_1\Big]
$$
$$
+\delta^2\Big[\Big(1+4\frac{1-p}{p+1}+\frac{(p-1)^2}{p+1}\Big)A_2+\Big(\frac{p-1}{p+1}-\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\Big)HA_1
$$
$$
+\Big(2\frac{1-p}{p+1}+\frac{(p-1)^2}{p+1}\Big)\nabla A_1\cdot\nabla\delta\Big]
$$
$$
+\sum_{k=3}^{m}\delta^k\Big[\Big(1+2\frac{1-p}{p+1}\,k-\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,k(k-1)\Big)A_k
$$
$$
+\Big(\frac{p-1}{p+1}-\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,(k-1)\Big)HA_{k-1}
$$
$$
+\Big(2\frac{1-p}{p+1}+\frac{(p-1)^2}{p+1}\,(k-1)\Big)\nabla A_{k-1}\cdot\nabla\delta+\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,\Delta A_{k-2}\Big]
$$
$$
+\alpha\delta^\sigma\Big[1+2\frac{1-p}{p+1}\,\sigma-\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,\sigma(\sigma-1)+M_1\delta\Big]+M_2\delta^{m+1}\Big\}\ . \tag{2.20}
$$

Prendiamo ora α e δ_0 in modo tale che, in $\{x\in\Omega:\delta(x)<\delta_0\}$, si abbia

$$
-\frac{1}{2}<\sum_{k=1}^{m}A_k\delta^k+\alpha\delta^\sigma<1\ ,\quad \alpha\delta^\sigma<1\ . \tag{2.21}
$$

Usando lo sviluppo di Taylor si trova

$$w^p = (\phi(\delta))^p\Big(1+\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big)^p$$

$$> (\phi(\delta))^p\Big\{1+\sum_{h=1}^{m}\left(\begin{array}{c} p \\ h \end{array}\right)\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k+\alpha\delta^\sigma\Big)^h - M_3\Big|\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k+\alpha\delta^\sigma\Big|^{m+1}\Big\} .$$

Usando la (2.7) e la (2.21) abbiamo $g(w)(\phi(\delta))^{-p} \geq -M_4(\phi(\delta))^{q-p} = -M_5\delta^\beta$. Notiamo che nel caso in cui $g(t) \geq 0$ possiamo prendere $M_5 = 0$. Usando questa stima e la disuguaglianza precedente troviamo

$$w^p + g(w) > (\phi(\delta))^p\Big\{1 + p\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big)$$

$$+\sum_{h=2}^{m}\left(\begin{array}{c} p \\ h \end{array}\right)\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big)^h - M_3\Big|\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big|^{m+1} - M_5\delta^\beta\Big\} .$$

Per $\alpha\delta^\sigma < 1$ e $h \geq 2$ si ha

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big)^h = \Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k\Big)^h + O(1)\delta\alpha\delta^\sigma + O(1)(\alpha\delta^\sigma)^2 ,$$

e

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big|^{m+1} = O(1)\delta^{m+1} + O(1)\delta\alpha\delta^\sigma + O(1)(\alpha\delta^\sigma)^2 .$$

Quindi

$$w^p + g(w) > (\phi(\delta))^p\Big\{1 + \sum_{h=1}^{m}\left(\begin{array}{c} p \\ h \end{array}\right)\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k\Big)^h$$

$$+p\alpha\delta^\sigma - M_6\delta\alpha\delta^\sigma - M_7(\alpha\delta^\sigma)^2 - M_8\delta^{m+1} - M_5\delta^\beta\Big\} .$$

Usando le quantità C_k definite in accordo con la (2.15) si trova

$$w^p + g(w) > (\phi(\delta))^p\Big\{1 + \sum_{k=1}^{m} C_k\delta^k$$

$$+p\alpha\delta^\sigma - M_6\delta\alpha\delta^\sigma - M_7(\alpha\delta^\sigma)^2 - M_9\delta^{m+1} - M_5\delta^\beta\Big\} \ . \tag{2.22}$$

Dalle (2.13) e (2.14), e dalle equazioni

$$C_1 = p\ A_1\ , \quad C_2 = p\ A_2 + \frac{p(p-1)}{2}\ A_1^2\ ,$$

troviamo

$$A_1 + \frac{p-1}{p+1}\ H + 2\frac{1-p}{p+1}\ A_1 = C_1\ , \tag{2.23}$$

e

$$\Big(1 + 4\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1}\Big)A_2 + \Big(\frac{p-1}{p+1} - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\Big)HA_1$$
$$+\Big(2\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1}\Big)\nabla A_1 \cdot \nabla\delta = C_2\ . \tag{2.24}$$

Usando la (2.16) e ricordando che $p\ A_k + P_k(A_1, ..., A_{k-1}) = C_k$, dopo alcuni calcoli si trova

$$\Big(1{+}2\frac{1-p}{p+1}\,k{+}\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,k(k{-}1)\Big)A_k{+}\Big(\frac{p-1}{p+1} - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,(k{-}1)\Big)\ HA_{k-1}$$
$$+\Big(2\frac{1-p}{p+1}\ +\ \frac{(p-1)^2}{p+1}\ (k-1)\Big)\nabla A_{k-1} \cdot \nabla\delta$$
$$+\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\ \Delta A_{k-2} = C_k\ , \quad k = 3, ..., m. \tag{2.25}$$

Dalle (2.20) e (2.22), usando le (2.23), (2.24) e (2.25) si ha

$$\Delta w < w^p + g(w) \tag{2.26}$$

quando

$$\alpha\delta^\sigma\Big(1 + 2\frac{1-p}{p+1}\,\sigma - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,\sigma(\sigma-1) + M_1\delta\Big) + M_2\delta^{m+1}$$
$$< p\alpha\delta^\sigma - M_6\delta\alpha\delta^\sigma - M_7(\alpha\delta^\sigma)^2 - M_9\delta^{m+1} - M_5\delta^\beta\ .$$

Semplificando si ha

$$
\begin{aligned}
&(M_2+M_9)\delta^{m+1}+M_5\delta^{\beta}\\
&<\alpha\delta^{\sigma}\Big[\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,(\sigma+1)\Big(\frac{2(p+1)}{p-1}\,-\sigma\Big)\\
&\qquad -(M_1+M_6)\delta-M_7\alpha\delta^{\beta}\Big]\,. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Poiché m è il più grande intero tale che $m<2(p+1)/(p-1)$, abbiamo $m+1\geq 2(p+1)/(p-1)$. Inoltre, dato che $q>-1$, si ha $2(p+1)/(p-1)>\beta$, da cui $m+1>\beta$. Quindi la (2.27) è vera per $\sigma=\beta$ quando

$$
\begin{aligned}
\delta^{m+1-\beta}\big(M_2+M_9\big)+M_5<\alpha\Big[&\frac{(2(p-q)+p-1)(q+1)}{p+1}\\
&-(M_1+M_6)\delta-M_7\alpha\delta^{\beta}\Big]\,. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Allora possiamo prendere α e δ_0 in modo tale che la (2.28) e la (2.21) (con $\sigma=\beta$) siano vere per $\delta(x)<\delta_0$.

Mostriamo ora che è possibile scegliere α e δ_0 in modo tale che $u(x)<w(x)$ per $\delta(x)=\delta_0$. Infatti, dal Lemma 2.1, ricordando che $\phi(\delta)=c\,\delta^{\frac{2}{1-p}}$, abbiamo

$$
\frac{u(x)}{\phi(\delta(x))}=1+O(1)\delta+O(1)\delta^{\frac{2(p-q)}{p-1}}\,.
$$

Segue che

$$
\lim_{x\to\partial\Omega}\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)}=1\,.
$$

Sia $\rho=\alpha{\delta_0}^{\beta}$, dove α e δ_0 sono come prima. Facciamo decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho=\alpha{\delta_0}^{\beta}$) finché

$$
\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)}>\frac{2}{2+\rho}
$$

per $\delta(x) \leq \delta_0$. Moltiplicando per

$$1 + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k + \alpha \delta^\beta$$

troviamo

$$\frac{w(x)}{u(x)} > \frac{2}{2+\rho} \left(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k + \alpha \delta^\beta\right) .$$

Facciamo decrescere ancora δ_0 (facendo crescere α) in modo da avere $\sum_{k=1}^{m} A_k {\delta_0}^k > -\rho/2$ e $\alpha {\delta_0}^\beta = \rho$. Allora $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Se $p > 3$, dato che $q < 1$ abbiamo $q < p - 1$. Quindi, usando il Lemma 2.1 troviamo che $w(x) - u(x)$ tende a zero quando x tende a $\partial\Omega$. Dalla (2.26) segue che $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Se $1 < p \leq 3$, usiamo la condizione (2.17) e un trucco usato in [13]. Siano t_0 e θ_0 le costanti della condizione (2.17). Facciamo decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha {\delta_0}^\beta$) in modo tale che $u(x) > t_0$ per $\delta(x) < \delta_0$. Per $\theta \in (\theta_0, 1)$, si ha (banalmente) $w(x) > \theta\ u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. D'altra parte, dato che $\phi(\delta(x))/u(x) \to 1$ quando $x \to \partial\Omega$, troviamo $w(x) > \theta u(x)$ vicino a $\partial\Omega$. Inoltre, usando la (2.17) si ha

$$\Delta(\theta u) = \theta\ f(u) > f(\theta u)\ . \tag{2.29}$$

Dalla (2.26) e dalla (2.29) segue che $w(x) \geq \theta u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Quando $\theta \to 1$ troviamo $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione del tipo

$$v(x) = \phi(\delta)\Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha \delta^\sigma\Big)\ ,$$

dove m e A_k sono gli stessi di prima e α è una costante positiva da determinare. Facendo dei calcoli analoghi a quelli fatti precedentemente si trova la seguente disuguaglianza (simile alla (2.20) con $-\alpha$ al posto di α)

$$\Delta v > (\phi(\delta))^p \Big\{ 1 + \delta \Big[A_1 + \frac{p-1}{p+1}\, H + 2\frac{1-p}{p+1}\, A_1 \Big]$$

$$+ \delta^2 \Big[\Big(1 + 4\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1} \Big)\ A_2 + \Big(\frac{p-1}{p+1} - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)} \Big) H A_1$$

$$+ \Big(2\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1} \Big) \nabla A_1 \cdot \nabla \delta \Big]$$

$$+ \sum_{k=3}^{m} \delta^k \Big[\Big(1 + 2\frac{1-p}{p+1}\, k - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\, k(k-1) \Big) A_k$$

$$+ \Big(\frac{p-1}{p+1} - \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\, (k-1) \Big) H A_{k-1}$$

$$+ \Big(2\frac{1-p}{p+1} + \frac{(p-1)^2}{p+1}\, (k-1) \Big) \nabla A_{k-1} \cdot \nabla \delta + \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\, \Delta A_{k-2} \Big]$$

$$-\alpha \delta^\sigma \Big[1 + 2\frac{1-p}{p+1}\, \sigma + \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\, \sigma(\sigma-1) + M_1 \delta \Big] - M_2 \delta^{m+1} \Big\}\ . \quad (2.30)$$

Prendiamo α e δ_0 tali che, per $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$ si abbia

$$-\frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha \delta^\sigma < 1\ , \quad \alpha \delta^\sigma < 1\ . \quad (2.31)$$

Usando lo sviluppo di Taylor si trova

$$v^p = (\phi(\delta))^p \Big(1 + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha \delta^\sigma \Big)^p$$

$$< (\phi(\delta))^p \Big\{ 1 + \sum_{h=1}^{m} \binom{p}{h} \Big(\sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha \delta^\sigma \Big)^h + M_3 \Big| \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha \delta^\sigma \Big|^{m+1} \Big\}\ .$$

Usando la (2.7) e la (2.21) abbiamo $g(w)(\phi(\delta))^{-p} \le M_4 (\phi(\delta))^{q-p} = M_5 \delta^\beta$. Notiamo che nel caso in cui $g(t) \le 0$ possiamo prendere $M_5 = 0$.

Usando questa stima e la disuguaglianza precedente troviamo

$$
\begin{aligned}
&v^p + g(v) \\
&< (\phi(\delta))^p \Big\{ 1 + \sum_{h=1}^{m} \binom{p}{h} \Big(\sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha\delta^\sigma \Big)^h \\
&+ M_3 \Big| \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha\delta^\sigma \Big|^{m+1} + M_5 \delta^\beta \Big\} \ .
\end{aligned}
$$

Poiché si ha

$$
\Big(\sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha\delta^\sigma \Big)^h = \Big(\sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k \Big)^h + O(1)\delta\alpha\delta^\sigma + O(1)(\alpha\delta^\sigma)^2 \ ,
$$

e

$$
\Big| \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k - \alpha\delta^\sigma \Big|^{m+1} = O(1)\delta^{m+1} + O(1)\delta\alpha\delta^\sigma + O(1)(\alpha\delta^\sigma)^2 \ ,
$$

troviamo una disequazione simile alla (2.22), cioè

$$
\begin{aligned}
v^p + g(v) &< (\phi(\delta))^p \Big\{ 1 + \sum_{k=1}^{m} C_k \delta^k \\
&- p\alpha\delta^\sigma + M_6 \delta\alpha\delta^\sigma + M_7 (\alpha\delta^\sigma)^2 + M_9 \delta^{m+1} + M_5 \delta^\beta \Big\} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

dove i C_k sono definiti in accordo con la (2.15). Ricordando le (2.23), (2.24) e (2.25), dalle (2.30) e (2.32) si ha che

$$
\Delta v > v^p + g(v) \tag{2.33}
$$

quando

$$
\begin{aligned}
&-\alpha\delta^\sigma \Big(1 + 2\frac{1-p}{p+1}\,\sigma + \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,\sigma(\sigma-1) + M_1\delta \Big) - M_2 \delta^{m+1} \\
&> -p\alpha\delta^\sigma + M_6 \delta\alpha\delta^\sigma + M_7 (\alpha\delta^\sigma)^2 + M_9 \delta^{m+1} + M_5 \delta^\beta \ .
\end{aligned}
$$

Semplificando si ha

$$
\begin{aligned}
&(M_2+M_9)\delta^{m+1}+M_5\delta^\beta \\
&<\alpha\delta^\sigma\Big[\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}(\sigma+1)\Big(2\frac{(p+1)}{p-1}-\sigma\Big) \\
&\quad -(M_1+M_6)\delta-M_7\alpha\delta^\sigma\Big]\ , \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

che è analoga alla (2.27). Osserviamo che le costanti M_i della (2.34) potrebbero essere differenti dalle M_i usate nella (2.27). La (2.34) è verificata con $\sigma=\beta$ quando

$$
\begin{aligned}
\delta^{m+1-\beta}\big(M_2+M_9\big)+M_5<\alpha\Big[&\frac{(2(p-q)+p-1)(q+1)}{p+1} \\
&-(M_1+M_6)\delta-M_7\alpha\delta^\beta\Big]\ . \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Allora possiamo prendere α abbastanza grande e δ_0 abbastanza piccolo in modo tale che la (2.35) e la (2.31) (con $\sigma=\beta$) siano vere per $\delta(x)<\delta_0$.

Sia $\rho=\alpha{\delta_0}^\beta$, dove α e δ_0 sono come prima. Dato che

$$
\lim_{x\to\partial\Omega}\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)}=1\ ,
$$

possiamo far decrescere δ_0 (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho=\alpha{\delta_0}^\beta$) finché

$$
\frac{\phi(\delta(x))}{u(x)}<\frac{2}{2-\rho}
$$

per $\delta(x)\le\delta_0$. Moltiplicando per

$$
1+\sum_{k=1}^m A_k\delta^k-\alpha\delta^\beta
$$

troviamo

$$\frac{v(x)}{u(x)} < \frac{2}{2-\rho}\left(1+\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k - \alpha\delta^\beta\right) .$$

Facciamo decrescere ancora δ_0 (facendo crescere α) in modo da avere $\sum_{k=1}^m A_k {\delta_0}^k < \rho/2$ e $\alpha{\delta_0}^\beta = \rho$. Allora $v(x) < u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Se $p > 3$, usando il Lemma 2.1 troviamo che $v(x) - u(x)$ tende a zero quando x tende a $\partial\Omega$. Dalla (2.33) segue che $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Se $1 < p \leq 3$ usiamo la condizione (2.17). Possiamo supporre che $u(x) > t_0$ per $\delta(x) < \delta_0$. Per $\theta \in (\theta_0, 1)$, si ha (banalmente) $v(x) < u(x)/\theta$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. D'altra parte, dato che $\phi(\delta(x))/u(x) \to 1$ quando $x \to \partial\Omega$, troviamo $v(x) < u(x)/\theta$ vicino a $\partial\Omega$. Inoltre, usando la (2.17) si ha

$$\Delta(u/\theta) = f(u)/\theta > f(u/\theta) . \tag{2.36}$$

Dalla (2.33) e dalla (2.36) segue che $v(x) \leq u(x)/\theta$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Quando $\theta \to 1$ troviamo $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Quindi, per x vicini a $\partial\Omega$ si ha

$$u(x) = \phi(\delta)\Big(1+\sum_{k=1}^{m} A_k\delta^k + O(1)\delta^\beta\Big) ,$$

che è la stima enunciata nel teorema. $\square$

Un caso particolare di questo teorema si ha quando $g(t) \equiv 0$, che si può enunciare col

Teorema 2.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato e $p > 1$ un numero reale. Una soluzione del problema* (2.1) *con $f(u) = u^p$*

soddisfa la stima

$$u(x) = \phi(\delta)\Big[1 + \sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k + O(1)\delta^{\sigma}\Big] \ ,$$

dove m *è il più grande numero intero tale che* $m < 2(p+1)/(p-1)$, ϕ *è definita dalla* (2.5), $\delta = \delta(x)$ *è la distanza di* x *da* $\partial\Omega$, $O(1)$ *è una quantità limitata, i coefficienti* $A_k = A_k(x)$, $k = 1, ..., m$, *sono definiti dalle* (2.13), (2.14) *e* (2.15) *e* σ *è un qualunque numero reale tale che* $m < \sigma < 2(p+1)/(p-1)$.

Dimostrazione. Dato che stiamo considerando il caso $f(t) = t^p + g(t)$ con $g \equiv 0$, utilizziamo le stesse notazioni e gli stessi calcoli del teorema precedente.

In questo caso speciale troviamo che $\Delta w < w^p$ quando la (2.27) è verificata con $M_5 = 0$. Quindi, ora abbiamo

$$\begin{aligned} &(M_2 + M_9)\delta^{m+1-\sigma} \\ &< \alpha\Big[\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,(\sigma+1)\Big(2\frac{(p+1)}{p-1} - \sigma\Big) \\ &\qquad -(M_1 + M_6)\delta - M_7\alpha\delta^{\sigma}\Big] \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Per $m < \sigma < 2(p+1)/(p-1)$, essendo $m+1 > \sigma$, questa disuguaglianza è verificata con α fissato e δ abbastanza piccolo. Possiamo far crescere α e decrescere δ_0 in modo tale che la (2.37) sia verificata per $\delta(x) < \delta_0$, e $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. D'altra parte, dal Lemma 2.1 con $g = 0$ si trova

$$u(x) = \phi(\delta) + O(1)\delta^{\frac{p-3}{p-1}} \ .$$

Quindi, se $p > 3$, allora $u(x) - \phi(\delta(x)) \to 0$ per $x \to \partial\Omega$. Allora si deve avere $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Se $1 < p \leq 3$, usiamo il ragionamento usato in [13]. Anche in questo caso, dal Lemma 2.1 si deduce che $\phi(\delta(x))/u(x) \to 1$ quando $x \to \partial\Omega$. Allora per $0 < \theta < 1$ si ha $w(x) > \theta u(x)$ per x vicino a $\partial\Omega$. Inoltre $\Delta(\theta u) = \theta u^p > (\theta u)^p$. Questa disuguaglianza, insieme alla $\Delta w < w^p$, implica che $w(x) \geq \theta u(x)$ in $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Per $\theta \to 1$ troviamo $w(x) \geq u(x)$.
Per provare che $\Delta v > v^p$ arriviamo alla (2.34) con $M_5 = 0$. Ragionando in modo analogo al caso della sopra-soluzione si ha $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Da ciò segue l' enunciato del teorema.

□

Vogliamo sottolineare il fatto che i coefficienti $A_k(x)$ che compaiono nella stima di $u(x)$ dipendono dalla geometria di Ω e da p, ma sono indipendenti dalla perturbazione g. Abbiamo già notato che, essendo $q > -1$, si ha $\beta < \dfrac{2(p+1)}{p-1}$; di conseguenza, essendo $m+1 \geq \dfrac{2(p+1)}{p-1}$, risulta $m+1 > \beta$. Inoltre, si ha $q < 1 + (m-2)(1-p)/2$, per cui $\beta > m$.
In particolare, $q < 1 + (m-2)(1-p)/2$ se e solo se $\beta > m$. Se, invece, $0 < \beta \leq m$, consideriamo il numero intero n tale che

$$n < \beta \leq n + 1 \ .$$

Si ha che $0 \leq n \leq m - 1$ e, in tal caso, $1 + (m-2)(1-p)/2 \leq q < p$. Allora alcuni termini della somma $\sum_{k=1}^{m} A_k \delta^k$ cambiano, e possiamo enunciare il seguente

Teorema 2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato, $p > 1$ un numero reale ed m il massimo numero intero tale che $m < 2(p+1)/(p-1)$. Se $\beta = \dfrac{2(p-q)}{p-1} \leq m$, sia n il numero intero tale che*

$$n < \beta \leq n+1 \ .$$

Si ha $0 \leq n \leq m-1$. Sia $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa la (2.6) e la (2.7). Se $1 < p \leq 3$, supponiamo anche che $f(t) = t^p + g(t)$ soddisfi la (2.17). Se $u(x)$ è una soluzione del problema (2.1), con $f(u) = u^p + g(u)$, allora, se $n \geq 1$, si ha

$$u(x) = \phi(\delta)\Big[1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \delta^k + O(1)\delta^\beta\Big] \ , \quad \beta = \frac{2(p-q)}{p-1} \ ,$$

dove ϕ è definita dalla (2.5), $\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, $O(1)$ è una quantità limitata e i coefficienti A_k, $k = 1, ..., n$, sono definiti dalle (2.13), (2.14) e (2.15). Se $n = 0$, allora

$$u(x) = \phi(\delta)[1 + O(1)\delta^\beta] \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $n \geq 1$. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \phi(\delta)\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \delta^k + \alpha\delta^\sigma\Big) \ .$$

Usando gli stessi calcoli del Teorema 2.1 (in particolare la (2.27) con n al posto di m) troviamo

$$\Delta w < w^p + g(w) \tag{2.38}$$

se

$$(M_2 + M_9)\delta^{n+1} + M_5\delta^\beta$$

$$< \alpha\delta^\sigma\Big[\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\,(\sigma+1)\,\Big(2\frac{(p+1)}{p-1}\,-\sigma\Big) - (M_1+M_6)\delta - M_7\alpha\delta^\sigma\Big]\ .$$

Poiché $\beta \leq n+1$, l'ultima disuguaglianza è vera con $\sigma = \beta$ quando

$$\begin{aligned} M_2 + M_9 + M_5 < \alpha\Big[&\frac{(2(p-q)+p-1)(q+1)}{p+1} \\ &-(M_1+M_6)\delta - M_7\alpha\delta^\beta\Big]\ . \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Allora possiamo prendere δ_0 piccolo e α grande in modo tale che, per $\delta(x) < \delta_0$, la disuguaglianza (2.39) sia verificata. Come nella dimostrazione del Teorema 2.1, possiamo far decrescere δ_0 e far crescere α in modo da avere $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Ora, se $p > 3$, dato che $1 < 2(p-q)/(p-1)$, abbiamo $q < p-1$. Quindi, usando il Lemma 2.1 troviamo che $w(x) - u(x)$ tende a zero quando x tende a $\partial\Omega$. Dalla (2.38) segue che $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Se $1 < p \leq 3$ si può sfruttare la condizione (2.17) per arrivare alla conclusione.

Con lo stesso ragionamento si dimostra che

$$v(x) = \phi(\delta)\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} A_k\delta^k - \alpha\delta^\sigma\Big)\ ,$$

con α e δ_0 opportuni, è una sotto-soluzione in $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Il teorema è dimostrato per $n \geq 1$.

Se $n = 0$, cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \phi(\delta)[1 + \alpha\delta^\beta]\ .$$

La dimostrazione è molto simile al caso precedente ma più facile, perchè non fa uso delle (2.23), (2.24), (2.25). Si trova che

$$\Delta w < w^p + g(w)$$

quando la (2.39) è verificata. Possiamo prendere δ_0 e α in modo tale che, per $\delta(x) < \delta_0$, la (2.39) sia verificata e si abbia $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Se $p > 3$ e $q < p - 1$ usiamo il Lemma 2.1 per provare che $w(x) - u(x)$ tende a zero quando x tende a $\partial\Omega$. Concludiamo che $w(x) \geq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Se $1 < p \leq 3$, usiamo la condizione (2.17) per arrivare alla stessa conclusione.

Allo stesso modo si prova che

$$v(x) = \phi(\delta)[1 - \alpha\delta^\beta]$$

è una sotto-soluzione su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Il teorema è dimostrato.

$\square$

Facciamo ora un esempio che ci aiuta a capire come cambia la stima della soluzione a seconda dell'intervallo di valori in cui prendiamo q.

Consideriamo il caso in cui $p \geq 5$; risulta $m = 2$. Applichiamo i risultati enunciati al seguente problema:

$$\Delta u = u^p + u^q \ , \quad p \geq 5 \ , \quad 0 < q < p \ , \quad u(x) \to \infty \quad \text{per} \quad x \to \partial\Omega \ .$$

i) Se $0 < q < 1$ allora $u(x)$ soddisfa la stima

$$u(x) = \phi(\delta)\left[1 + A_1\delta + A_2\delta^2 + O(1)\delta^\beta\right] \ .$$

In tal caso l'effetto della perturbazione u^q è confinato all'ultimo termine $O(1)\delta^\beta$. Si ha $2 < \beta < 3$.

ii) Se $1 \leq q < (p+1)/2$ allora

$$u(x) = \phi(\delta)\big[1 + A_1\delta + O(1)\delta^\beta\big] \ .$$

Ora si ha $1 < \beta < 2$ e la perturbazione u^q produce un effetto al terzo livello.

iii) Se $(p+1)/2 \leq q < p$ allora

$$u(x) = \phi(\delta)\big[1 + O(1)\delta^\beta\big] \ .$$

In questo caso $0 < \beta < 1$ e la perturbazione u^q produce un cambiamento nel termine del secondo livello.

2.3 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = e^u$

Consideriamo ora il problema di Dirichlet (2.1) dove $f(t)$ è la funzione esponenziale:

$$\Delta u = e^u \quad \text{in } \Omega \ , \qquad u(x) \to \infty \quad \text{per } x \to \partial\Omega \ ,$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$. E' ben noto fin dal 1916 [20] che questo problema ammette una soluzione classica chiamata soluzione blow-up (esplosiva) sul bordo. Inoltre, se $\delta = \delta(x)$ denota la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$ si ha [20] che $u(x) - \log(2/\delta^2(x)) \to 0$ per $x \to \partial\Omega$. Recentemente questa stima è stata migliorata in [7] con lo sviluppo

$$u(x) = \log\frac{2}{\delta^2(x)} \ + (N-1)H(\overline{x}) \ \delta(x) + o(\delta(x)) \ ,$$

dove $H(\overline{x})$ denota la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto $\overline{x}$ più vicino a x, e $o(\delta)$ ha il significato usuale. Altre stime sul bordo per equazioni non lineari più generali sono state studiate in altri lavori ([8], [10], [12], [13], [35], [40], [42], [46], [58]).

2.4 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = e^u + g(u)$

Consideriamo il problema (2.1) con $f(t) = e^t + g(t)$, dove $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare che soddisfa le seguenti condizioni

$$e^t + g(t) > 0 \quad \text{e} \quad e^t + g'(t) > 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ ; \tag{2.40}$$

inoltre, supponiamo che

$$\exists\, \theta \in (0,1) : g(t) = O(1)e^{\theta t}\ , \tag{2.41}$$

dove $O(1)$ è una quantità limitata.

Osserviamo che, essendo $\theta > 0$, si ha $\int_{-\infty}^{t}(e^{\tau}+g(\tau))\,d\tau < \infty$. Definiamo la funzione $\Phi = \Phi(s)$ nel seguente modo

$$\int_{\Phi(s)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2F(t)}} = s\ , \quad F(t) = \int_{-\infty}^{t} (e^{\tau} + g(\tau))\ d\tau\ . \tag{2.42}$$

Si ha che $\Phi(s) \to \infty$ per $s \to 0$.

Così come nel paragrafo 2.2 abbiamo preso una $f(t)$ formata da una ″parte principale″ del tipo t^p e da una perturbazione $g(t)$, che cresceva meno velocemente rispetto a t^p, qui prendiamo $f(t) = e^t + g(t)$, dove $g(t)$ è ancora una funzione di tipo esponenziale come la parte principale e^t, ma con crescita inferiore rispetto a e^t; stiamo chiedendo, infatti, che

$|g(t)|$ cresca come la funzione $e^{\theta t}$, con $0 < \theta < 1$. Osserveremo in che modo, e a che livello, questa perturbazione interviene nella stima della soluzione, cioè quali termini della stima d $u(x)$ dipenderanno da θ. Essendo $\theta < 1$, ci aspettiamo, anche in questo caso, che una parte della stima trovata nel caso $f(t) = e^t$ venga $''$conservata$''$, mentre una parte venga modificata dall'effetto della perturbazione.

Notiamo anche che la funzione $f(t)$ di tipo esponenziale può essere pensata come un caso limite, quando p tende a infinito, delle funzioni di tipo polinomiale prese in considerazione nei primi due paragrafi.

I risultati riportati in questo paragrafo si trovano in [2].

Lemma 2.2. *Sia $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa le* (2.40) *e* (2.41)*, e sia $u(x)$ una soluzione del problema* (2.1) *con $f(u) = e^u + g(u)$. Allora*

$$u(x) = \log \frac{2}{\delta^2} \; + O(1)\delta^{2(1-\theta)} + O(1)\delta \log \frac{2}{\delta^2} \; ,$$

dove $\delta = \delta(x)$ denota la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$ e $O(1)$ rappresenta una quantità limitata.

Dimostrazione. Dalla (2.42) si trova

$$\Phi'(s) = -(2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}} \; .$$

Usando la condizione (2.41) si ottiene

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{t} g(\tau) d\tau = e^t + O(1)e^{\theta t} \; .$$

Quindi

$$\Phi'(s) = -\sqrt{2}\big(e^{\Phi(s)} + O(1)e^{\theta\Phi(s)}\big)^{\frac{1}{2}} \; . \tag{2.43}$$

Posto $\rho(s) = e^{-\frac{\Phi(s)}{2}}$, si ha

$$\rho'(s) = -e^{-\frac{\Phi(s)}{2}} \frac{\Phi'(s)}{2} \ .$$

Inserendo la (2.43) in quest'ultima equazione si trova

$$\rho'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + O(1)\ e^{(\theta-1)\Phi(s)}\right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.44}$$

Segue che

$$\rho'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \quad \rho(s) = O(1)s \ , \quad e^{(\theta-1)\Phi(s)} = O(1)s^{2(1-\theta)} \ .$$

Quindi dalla (2.44) si trova

$$\rho'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + O(1)s^{2(1-\theta)}\right) \ .$$

Integrando in $(0, s)$ si ottiene

$$\rho(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} \left(1 + O(1)s^{2(1-\theta)}\right) \ .$$

Ricordando che $\rho(s) = e^{-\frac{\Phi(s)}{2}}$, abbiamo

$$e^{\Phi(s)} = (\rho(s))^{-2} = \frac{2}{s^2} \left(1 + O(1)s^{2(1-\theta)}\right)$$

e

$$\Phi(s) = \log \frac{2}{s^2} \ + O(1)s^{2(1-\theta)} \ . \tag{2.45}$$

Dalla (2.43) e dall'espressione di e^{Φ} si ha anche

$$\Phi'(s) = s^{-1} \left(-2 + O(1)s^{2(1-\theta)}\right) \ . \tag{2.46}$$

Sotto le ipotesi fatte risulta che la funzione $f(t) = e^t + g(t)$ è crescente per ogni $t > 0$ e $F(t)t^{-2}$ è crescente per grandi t. Inoltre, usando la

(2.46) si trova

$$\limsup_{\theta\to 1,\ \delta\to 0} \frac{\Phi'(\theta\delta)}{\Phi'(\delta)} < \infty \ .$$

Quindi possiamo usare il Teorema 4 (i) di [15], dal quale segue che

$$u(x) = \Phi(\delta) + O(1)\delta\Phi(\delta) \ .$$

Inserendo la (2.45) con $s = \delta$ in quest'ultima equazione, segue l'asserto del lemma. □

Enunciamo ora il seguente

Teorema 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato e sia $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa le* (2.40) *e* (2.41)*. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1) *con $f(u) = e^u + g(u)$, allora*

$$u(x) = \log \frac{2}{\delta^2} \ + H\delta + O(1)\delta^{2(1-\theta)} \ ,$$

dove $H = (N-1)K$, $\delta = \delta(x)$ denota la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$ e $O(1)$ rappresenta una quantità limitata.

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \log \frac{2}{\delta^2} \ + H\delta + \alpha\delta^\sigma \ ,$$

dove $\sigma = 2(1-\theta)$ e α è una costante positiva da determinare. Abbiamo

$$w_{x_i} = -\frac{2}{\delta^2}\,\delta_{x_i} + H_{x_i}\delta + H\delta_{x_i} + \alpha\sigma\delta^{\sigma-1}\delta_{x_i} \ ,$$

e

$$\Delta w = \frac{2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta}\ H + 2\ \nabla H \cdot \nabla\delta + \Delta H\delta - H^2$$

$$+\alpha\sigma(\sigma-1)\delta^{\sigma-2} - \alpha\sigma H\delta^{\sigma-1} \ .$$

Denotiamo con M_i, $i = 1, 2, ...$, costanti non negative indipendenti da α. Si ha

$$\Delta w < \frac{2}{\delta^2}\left[1 + H\delta + M_1\delta^2 + \alpha\delta^\sigma\Big(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + M_2\delta\Big)\right] \ . \tag{2.47}$$

D'altra parte, usando lo sviluppo di Taylor si trova

$$e^w = \frac{2}{\delta^2}\, e^{H\delta+\alpha\delta^\sigma} > \frac{2}{\delta^2}\,(1 + H\delta + \alpha\delta^\sigma) \ . \tag{2.48}$$

Prendiamo ora α e δ_0 in modo tale che, per $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$, si abbia

$$H\delta + \alpha\delta^\sigma < 1 \ . \tag{2.49}$$

Dalla condizione (2.41) abbiamo $g(w) = O(1)e^{\theta w} \geq -M_3(\frac{2}{\delta^2})^\theta$. Notiamo che nel caso in cui $g(t) \geq 0$ possiamo prendere $M_3 = 0$. Usando questa stima e la disuguaglianza (2.48) troviamo

$$e^w + g(w) > \frac{2}{\delta^2}\left[1 + H\delta + \alpha\delta^\sigma - M_3\Big(\frac{2}{\delta^2}\Big)^{\theta-1}\right] \ . \tag{2.50}$$

Dalle (2.47) e (2.50) segue che

$$\Delta w < e^w + g(w) \tag{2.51}$$

quando

$$1 + H\delta + M_1\delta^2 + \alpha\delta^\sigma\Big(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + M_2\delta\Big) < 1 + H\delta + \alpha\delta^\sigma - M_3\Big(\frac{2}{\delta^2}\Big)^{\theta-1} \ .$$

Semplificando si ha

$$M_1\delta^2 + M_3\Big(\frac{\delta^2}{2}\Big)^{1-\theta} < \alpha\delta^\sigma\Big[\frac{(1+\sigma)(2-\sigma)}{2} - M_2\delta\Big] \ . \tag{2.52}$$

Poiché $\sigma = 2(1-\theta)$, la (2.52) conduce alla

$$M_1\delta^{2\theta} + M_3 2^{\theta-1} < \alpha[(1+2(1-\theta))\theta - M_2\delta] \ . \tag{2.53}$$

Essendo $0 < \theta < 1$, possiamo prendere α sufficientemente grande e δ_0 sufficientemente piccolo in modo tale che la (2.53) e la (2.49) siano verificate per $\delta(x) < \delta_0$. Dal Lemma 2.2 abbiamo

$$u(x) - w(x) = O(1)\delta^{2(1-\theta)} + O(1)\delta \log\frac{2}{\delta^2} - H\delta - \alpha\delta^{2(1-\theta)} \ .$$

Segue che, per α fissato, $u(x) - w(x)$ tende a zero per $x \to \partial\Omega$. Mostriamo che è possibile scegliere α e δ_0 in modo tale che $u(x) < w(x)$ per $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Sia $\alpha{\delta_0}^{2(1-\theta)} = \rho$, con α e δ_0 scelti come prima. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in accordo con la relazione $\alpha{\delta_0}^{2(1-\theta)} = \rho$ e con

$$O(1)\delta^{2(1-\theta)} + O(1)\delta\log\frac{2}{\delta^2} - H\delta - \rho < 0$$

in $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Dalla (2.51) e dal principio del confronto ([38], Theorem 10.1) segue che $u(x) \leq w(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione della forma

$$v(x) = \log\frac{2}{\delta^2} \ + H\delta - \alpha\delta^{\sigma} \ ,$$

dove, come nel caso precedente, $\sigma = 2(1-\theta)$ e α è una costante positiva da determinare. Abbiamo

$$\Delta v = \frac{2}{\delta^2} \ + \frac{2}{\delta}\, H + 2\ \nabla H \cdot \nabla\delta + \Delta H\delta - H^2$$

$$-\alpha\sigma(\sigma-1)\delta^{\sigma-2}+\alpha\sigma H\delta^{\sigma-1}$$

e

$$\Delta v > \frac{2}{\delta^2}\left[1+H\delta-M_4\delta^2-\alpha\delta^\sigma\Big(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}+M_5\delta\Big)\right] . \tag{2.54}$$

Prendiamo ora α e δ_0 in modo tale che, per $\{x\in\Omega : \delta(x)<\delta_0\}$, si abbia

$$H\delta-\alpha\delta^\sigma<1 . \tag{2.55}$$

Allora, usando lo sviluppo di Taylor si trova

$$e^v=\frac{2}{\delta^2}\,e^{H\delta-\alpha\delta^\sigma}<\frac{2}{\delta^2}\left(1+H\delta-\alpha\delta^\sigma+M_6\big(\delta^2+(\alpha\delta^\sigma)^2\big)\right) . \tag{2.56}$$

Inoltre, dalla condizione (2.41) e dalla (2.55) abbiamo che $g(v)=O(1)e^{\theta v}\le M_7(\frac{2}{\delta^2})^\theta$. Notiamo che nel caso in cui $g(t)\le 0$ possiamo prendere $M_7=0$. Usando questa stima e la disuguaglianza (2.56) troviamo

$$e^v+g(v)<\frac{2}{\delta^2}\left[1+H\delta-\alpha\delta^\sigma+M_6\big(\delta^2+(\alpha\delta^\sigma)^2\big)+M_7\Big(\frac{2}{\delta^2}\Big)^{\theta-1}\right] . \tag{2.57}$$

Dalle (2.54) e (2.57) segue che

$$\Delta v>e^v+g(v) \tag{2.58}$$

quando

$$\begin{gathered}1+H\delta-M_4\delta^2-\alpha\delta^\sigma\Big(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}+M_5\delta\Big)\\ >1+H\delta-\alpha\delta^\sigma+M_6\delta^2+M_6(\alpha\delta^\sigma)^2+M_7\Big(\frac{2}{\delta^2}\Big)^{\theta-1} .\end{gathered}$$

Semplificando si ha

$$(M_4+M_6)\delta^2+M_7\Big(\frac{\delta^2}{2}\Big)^{1-\theta}$$

$$< \alpha\delta^{\sigma}\Big[\frac{(1+\sigma)(2-\sigma)}{2} - M_5\delta - M_6\alpha\delta^{\sigma}\Big] \,. \tag{2.59}$$

Poiché $\sigma = 2(1-\theta)$, la (2.59) conduce alla

$$(M_4+M_6)\delta^{2\theta}+M_7 2^{\theta-1} < \alpha\left[(1+2(1-\theta))\theta - M_5\delta - M_6\alpha\delta^{2(1-\theta)}\right]. \tag{2.60}$$

Possiamo prendere α abbastanza grande e δ_0 abbastanza piccolo in modo tale che la (2.60) e la (2.55) siano vere per $\delta(x) < \delta_0$. Dal Lemma 2.2 abbiamo

$$u(x) - v(x) = O(1)\delta^{2(1-\theta)} + O(1)\delta\log\frac{2}{\delta^2} - H\delta + \alpha\delta^{2(1-\theta)} \,.$$

Segue che, per α fissato, $u(x) - v(x)$ tende a zero per $x \to \partial\Omega$. Sia $\alpha{\delta_0}^{2(1-\theta)} = \rho$, con α e δ_0 scelti come prima. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in accordo con la relazione $\alpha{\delta_0}^{2(1-\theta)} = \rho$ e con

$$O(1)\delta^{2(1-\theta)} + O(1)\delta\log\frac{2}{\delta^2} - H\delta + \rho > 0$$

in $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Dalla (2.58) e dal principio del confronto [38] segue che $u(x) \geq v(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Quindi, vicino a $\partial\Omega$ si ha

$$\log\frac{2}{\delta^2} + H\delta - \alpha\delta^{2(1-\theta)} \leq u(x) \leq \log\frac{2}{\delta^2} + H\delta + \alpha\delta^{2(1-\theta)} \,,$$

da cui segue il teorema.

$\square$

Corollario 2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato e sia $g(t)$ una funzione regolare che soddisfa la* (2.40) *e la stima $g(t) =$*

$O(1)t^p$, dove p è un numero reale. Se $u(x)$ è una soluzione del problema (2.1) con $f(t) = e^t + g(t)$, allora

$$u(x) = \log \frac{2}{\delta^2} + H\delta + O(1)\delta^\sigma \ ,$$

dove σ è un qualunque numero reale tale che $\sigma < 2$.

Dimostrazione. Dato $\sigma < 2$, prendiamo $\theta = 1 - \sigma/2$. Poiché $g(t) = O(1)t^p$, abbiamo $g(t) = O(1)e^{\theta t}$. Il risultato segue allora dal Teorema 2.3.

$\square$

Osserviamo che, se $\theta < 1/2$, la perturbazione $g(t)$ produce il suo effetto soltanto al terzo livello della stima. Quando $\theta \geq 1/2$, allora $2(1-\theta) \leq 1$, e il risultato del Teorema 2.3 può essere espresso come

$$u(x) = \log \frac{2}{\delta^2} \ + O(1)\delta^{2(1-\theta)} \ .$$

Quindi, in quest'altro caso la perturbazione $g(t)$ produce il suo effetto al secondo livello.

2.5 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = e^{u|u|^{\beta-1}}$

Consideriamo ora il problema (2.1) con $f(t) = e^{t|t|^{\beta-1}}$, dove $\beta > 0$.
Si tratta ancora di una funzione di tipo esponenziale, ma con crescita più generale rispetto al caso studiato nel paragrafo precedente. Osserviamo che $f(t) = e^t$ è un caso particolare di questo quando $\beta = 1$.

I risultati esposti in questo paragrafo si trovano in [3].

Enunciamo prima il seguente

Lemma 2.4. *Sia* $\beta > 0$, $f(t) = e^{t|t|^{\beta-1}}$, $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$. *Allora*

$$F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1 + O(1)t^{-\beta} \ , \tag{2.61}$$

dove $O(1)$ *è una quantità limitata.*

Dimostrazione. Per $t > 0$ abbiamo

$$F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = f'(t)(f(t))^{-2}F(0) + f'(t)(f(t))^{-2}\int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$= \beta e^{-t^\beta} t^{\beta-1}F(0) + e^{-t^\beta}\int_0^t \beta e^{\tau^\beta}\tau^{\beta-1}d\tau + \beta e^{-t^\beta}\int_0^t e^{\tau^\beta}(t^{\beta-1} - \tau^{\beta-1})d\tau$$

$$= \beta e^{-t^\beta} t^{\beta-1}F(0) + 1 - e^{-t^\beta} + \beta e^{-t^\beta}\int_0^t e^{\tau^\beta}(t^{\beta-1} - \tau^{\beta-1})d\tau \ .$$

Risulta

$$\lim_{t\to\infty} \beta t^\beta e^{-t^\beta} t^{\beta-1}F(0) = 0$$

e

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta e^{-t^\beta} = 0 \ .$$

Inoltre, usando la regola di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\beta \int_0^t e^{\tau^\beta}\left(t^{2\beta-1} - t^\beta \tau^{\beta-1}\right)d\tau}{e^{t^\beta}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta}((2\beta-1)t^{\beta-1} - \beta\tau^{\beta-1})d\tau}{e^{t^\beta}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\beta-1)e^{t^\beta}t^{\beta-1} + \int_0^t e^{\tau^\beta}(2\beta-1)(\beta-1)t^{\beta-2}d\tau}{\beta e^{t^\beta}t^{\beta-1}}$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta} + (2\beta-1)(\beta-1)\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t e^{\tau^\beta}d\tau}{\beta e^{t^\beta}t}$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta} + (2\beta-1)(\beta-1)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\beta(1+\beta t^\beta)} = \frac{\beta-1}{\beta} \ .$$

Da quanto precede segue la (2.61). □

Osserviamo che, se $\beta = 1$, $F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1$; questo caso è stato trattato nel paragrafo 2.4.

Lemma 2.5. *Sia* $\Phi = \Phi(s)$ *definita da*

$$\int_{\Phi(s)}^{\infty} (2F(t))^{-\frac{1}{2}} dt = s \ , \ F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \ , \ f(\tau) = e^{\tau|\tau|^{\beta-1}} \ . \tag{2.62}$$

Allora

$$-\Phi'(s) = \big[1 + O(1)(\Phi(s))^{-\beta}\big] s f(\Phi(s)) \ .$$

Dimostrazione. Dalla relazione (banale)

$$1 - 2(1 + O(1)t^{-\beta}) = -1 + O(1)t^{-\beta} \ ,$$

usando l'equazione (2.61) si ha

$$1 - 2F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = -1 + O(1)t^{-\beta} \ .$$

Moltiplicando per $(2F(t))^{-\frac{1}{2}}$ troviamo

$$-(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + (2F(t))^{\frac{1}{2}} f'(t)(f(t))^{-2} = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}} t^{-\beta} \ ,$$

e

$$-\big((2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}\big)' = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}} t^{-\beta} \ .$$

Integrando in (t, ∞) si ha

$$(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}$$
$$= \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1) \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\beta} d\tau \ . \tag{2.63}$$

Usando la regola di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\beta} \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{\int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\beta} d\tau}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta} + \beta t^{-\beta-1}\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta}}$$

$$= 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\beta\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{t(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{-\beta}{1 - t(2F(t))^{-1}f(t)} = 1 \; . \tag{2.64}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{F(t)} = \infty \; , \tag{2.65}$$

che si può verificare facilmente usando la regola di de l'Hôpital. Sfruttando la (2.64), la (2.63) può essere riscritta come

$$(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} = \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau + O(1)t^{-\beta}\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau \; .$$

Ponendo $t = \Phi(s)$ e usando l'equazione $-\Phi'(s) = (2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}}$, segue l'asserto del lemma. □

Teorema 2.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato e sia $\beta > 0$. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1) *con $f(u) = e^{u|u|^{\beta-1}}$, allora*

$$u(x) = \Phi(\delta) + \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} + O(1)\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta} \; ,$$

dove $H = (N-1)K$, $\delta = \delta(x)$ denota la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$, $O(1)$ rappresenta una quantità limitata e Φ è definita dalla (2.62).

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \Phi(\delta) + \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} + \alpha\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta} \; ,$$

dove α è una costante positiva da determinare. Abbiamo

$$w_{x_i} = \Phi'(\delta)\delta_{x_i} + \beta^{-1} H_{x_i} \delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}$$

$$+\beta^{-1} H \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)' \delta_{x_i} + \alpha \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\big)' \delta_{x_i} \ ,$$

e

$$\Delta w = \Phi''(\delta) - \Phi'(\delta) H + \beta^{-1} \Delta H \delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} + 2\beta^{-1} \nabla H \cdot \nabla \delta \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'$$

$$+\beta^{-1} H \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'' - \beta^{-1} H^2 \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'$$

$$+\alpha \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\big)'' - \alpha H \big(\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\big)' \ . \tag{2.66}$$

Essendo $f(t) = e^{t|t|^{\beta-1}}$, dalla (2.62) si ha $\Phi''(\delta) = f(\Phi(\delta))$. Dal Lemma 2.5 segue che

$$-\Phi'(\delta) = \big(1 + O(1)(\Phi(\delta))^{-\beta}\big)\delta f(\Phi(\delta)) \ . \tag{2.67}$$

Usando la (2.67) e l'equazione $\Phi'(\delta) = -(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(\Phi(\delta))^{1-\beta}}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta))} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(\delta)}{-\Phi'(\delta)}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(\delta)}{(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^2}{2F(t)}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{f(t)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \ .$$

Riscriviamo quest'ultimo risultato come

$$(\Phi(\delta))^{1-\beta} = o(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)) \ , \tag{2.68}$$

dove $o(1)$ denota una quantità che tende a zero quando $\delta \to 0$. Usando nuovamente la (2.67) si trova

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta))} = -1 \ . \tag{2.69}$$

Quindi

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\right)' = (\Phi(\delta))^{1-\beta} + (1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)$$

$$= o(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)) \ . \tag{2.70}$$

Differenziando ulteriormente si trova

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\right)'' = 2(1-\beta)(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)$$

$$-\beta(1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta-1}(\Phi'(\delta))^2 + (1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)) \ . \tag{2.71}$$

Inoltre, ricordando la (2.65), troviamo

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta-1}(\Phi'(\delta))^2}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta))} = \lim_{\delta\to 0} \frac{2F(\Phi(\delta))}{\Phi(\delta) f(\Phi(\delta))} = \lim_{t\to\infty} \frac{2F(t)}{t f(t)} = 0 \ .$$

Usando quest'ultimo limite e la (2.69), dalla (2.71) si ha

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\right)'' = O(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)) \ . \tag{2.72}$$

Allo stesso modo, si trova

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\right)' = o(1)\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} f(\Phi(\delta)) \tag{2.73}$$

e

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\right)'' = O(1)\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} f(\Phi(\delta)) \ . \tag{2.74}$$

Come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, denotiamo con M_i, $i = 1, 2, ...$ costanti non negative indipendenti da α; usando le (2.67), (2.68), (2.69), (2.72), (2.73) e (2.74), dalla (2.66) si ha

$$\Delta w < f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta + M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\Big] \ . \tag{2.75}$$

D'altra parte si ha

$$f(w) = e^{\left(\Phi(\delta)+\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}+\alpha\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta}\right)^{\beta}}$$
$$= e^{(\Phi(\delta))^{\beta}\left(1+\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}+\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\right)^{\beta}} .$$

Prendiamo α e δ_0 tali che, per $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$, si abbia

$$-\frac{1}{2} < \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} < 1 . \tag{2.76}$$

Allora, usando lo sviluppo di Taylor, si ha

$$f(w) > e^{(\Phi(\delta))^{\beta}\left(1+H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}+\alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}-M_3\left(\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}\right)^2-M_4\left(\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\right)^2\right)}$$
$$= f(\Phi(\delta))\ e^{H\delta+\alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}-M_3\delta^2(\Phi(\delta))^{-\beta}-M_4(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-3\beta}}$$
$$> f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta + \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}$$
$$-M_3\delta^2(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_4(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-3\beta}\Big] . \tag{2.77}$$

Dalle (2.75) e (2.77) segue che

$$\Delta w < f(w) \tag{2.78}$$

quando

$$1 + H\delta + M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}$$
$$< 1 + H\delta + \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_3\delta^2(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_4(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-3\beta} .$$

Semplificando si ha

$$M_1 + M_3\delta < \alpha\ [\beta - M_4\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} - M_2(\Phi(\delta))^{-\beta}] . \tag{2.79}$$

Possiamo prendere α sufficientemente grande e δ_0 sufficientemente piccolo in modo tale che la (2.79) e la (2.76) siano verificate per $\delta(x) < \delta_0$.

La funzione $f(t) = e^{t|t|^{\beta-1}}$ è positiva e crescente per ogni t, e $F(t)t^{-2}$ è crescente per grandi t. Inoltre, se $L(t) = \int_0^t \sqrt{F(\tau)}d\tau$, per a e b tali che $1 < a < 2 < b$ si ha

$$a\frac{F(t)}{f(t)} \le \frac{L(t)}{L'(t)} \le b\frac{F(t)}{f(t)} \quad \text{per grandi } t \ ,$$

perché, usando il Lemma 2.4, si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)f(t)}{L'(t)F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(F(t))^{\frac{3}{2}}(f(t))^{-1}} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{3/2 - F(t)f'(t)(f(t))^{-2}} = 2$$

Quindi, per il Teorema 4 (ii) di [15] possiamo usare la stima (2.4), che possiamo riscrivere come

$$C\delta^2\Phi'(\delta) + \Phi(\delta) \le u(x) \le \Phi(\delta) + C\delta\Phi(\delta) \ . \tag{2.80}$$

Usando la parte destra di quest'ultima stima si trova

$$w(x) - u(x) \ge \Phi(\delta)\big[\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} - C\delta\big] \ . \tag{2.81}$$

Prendiamo α e δ_0 in modo tale che la (2.79) sia verificata e poniamo $\alpha\delta_0(\Phi(\delta_0))^{-2\beta} = \rho$. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in modo tale che $\alpha\delta_0(\Phi(\delta_0))^{-2\beta} = \rho$ e

$$\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \rho - C\delta > 0$$

per $\delta(x) = \delta_0$. Allora, $w(x) \ge u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Quando α è fissato, dalla (2.81) si trova $\liminf_{x\to\partial\Omega}[w(x) - u(x)] \ge 0$. Quindi, dalla (2.78) segue che $w(x) \ge u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione della forma

$$v(x) = \Phi(\delta) + \beta^{-1} H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta} \ ,$$

dove α è una costante positiva da determinare. Al posto della (2.75) ora troviamo

$$\Delta v > f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta - M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\Big] \ . \qquad (2.82)$$

Naturalmente, le costanti M_i della (2.82) e le M_i che useremo in seguito non sono necessariamente le stesse del caso precedente.

Ora abbiamo

$$f(v) = e^{(\Phi(\delta))^\beta \left(1+\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}-\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\right)^\beta} \ .$$

Prendiamo δ_0 e α tali che, per $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$ si abbia

$$-\frac{1}{2} < \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta} < 1 \ . \qquad (2.83)$$

Allora

$$f(v) < e^{(\Phi(\delta))^\beta \left(1+H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}-\alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}+M_3\left(\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}\right)^2+M_4\left(\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}\right)^2\right)}$$

$$= f(\Phi(\delta))e^{H\delta-\alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}+M_3\delta^2(\Phi(\delta))^{-\beta}+M_4(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-3\beta}} \ .$$

Nel prossimo passaggio, prendiamo δ_0 e α tali che

$$\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} < 1 \ \text{ e } \ H\delta - \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}$$

$$+M_3\delta^2(\Phi(\delta))^{-\beta} + M_4(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-3\beta} < 1 \ . \qquad (2.84)$$

Allora troviamo

$$f(v) < f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta - \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}$$

$$+M_5\delta^2 + M_6(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-2\beta}\Big] \ . \tag{2.85}$$

Dalla (2.82) e (2.85) troviamo che

$$\Delta v > f(v)$$

se

$$1 + H\delta - M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{-2\beta}$$

$$> 1 + H\delta - \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + M_5\delta^2 + M_6(\alpha\delta)^2(\Phi(\delta))^{-2\beta} \ .$$

Semplificando si ha

$$M_1 + M_5\delta(\Phi(\delta))^{\beta} < \alpha\left[\beta - M_2(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_6\alpha\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}\right] \ . \tag{2.86}$$

Dato che $\delta(\Phi(\delta))^{\beta} \to 0$ per $\delta \to 0$, la disuguaglianza (2.86) (in aggiunta alle (2.83) e (2.84)) è vera per $\delta(x) < \delta_0$ con δ_0 e α opportuni.

Usando la parte sinistra della (2.80) troviamo

$$v(x) - u(x) \le \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{1-2\beta} - C\delta^2\Phi'(\delta)$$

$$= (\Phi(\delta))^{1-\beta}\left[\beta^{-1}H\delta - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - C\delta^2\Phi'(\delta)(\Phi(\delta))^{\beta-1}\right] \ . \tag{2.87}$$

Prendiamo α e δ_0 tali che la (2.86) sia vera e poniamo $\alpha\delta_0(\Phi(\delta_0))^{-2\beta} = \rho$. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in modo tale che $\alpha\delta_0(\Phi(\delta_0))^{-\beta} = \rho$ e

$$\beta^{-1}H\delta - \rho - C\delta^2\Phi'(\delta)(\Phi(\delta))^{\beta-1} < 0$$

per $\delta(x) = \delta_0$. Osserviamo che la disuguaglianza precedente è vera per δ piccoli perchè, come si può provare usando il Lemma 2.5 e la regola di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2\Phi'(\delta)}{(\Phi(\delta))^{1-\beta}} = \lim_{\delta\to 0}\frac{-\delta^3 f(\Phi(\delta))}{(\Phi(\delta))^{1-\beta}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-e^{t^\beta}\left(\int_t^\infty(2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau\right)^3}{t^{1-\beta}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big(- \frac{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{e^{-\frac{1}{3}t^\beta} t^{\frac{1-\beta}{3}}} \Big)^3 = \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{3}t^\beta} t^{\frac{2}{3}(\beta-1)} \big[\frac{\beta}{3} + \frac{\beta-1}{3} t^{-\beta} \big]} \Big)^3$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{e^{\frac{2}{3}t^\beta} t^{\frac{4}{3}(1-\beta)}}{\int_t^\infty e^{\tau^{-\beta}}} \Big)^{\frac{3}{2}} = 0 \ .$$

Segue dalla (2.87) che $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Dalla (2.87) si trova anche che $v(x) - u(x) \leq 0$ su $\partial\Omega$. Quindi $v(x) \leq u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Il teorema segue. □

2.6 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = e^{u+e^u}$

Consideriamo adesso il problema (2.1) con $f(t) = e^{t+e^t}$.

Anche questa $f(t)$ è di tipo esponenziale, ma cresce ancora più velocemente delle funzioni considerate nei paragrafi 2.3, 2.4 e 2.5. Essa può essere considerata come un caso limite di $f(t) = e^{t|t|^{\beta-1}}$ quando β tende a infinito.

I risultati esposti in questo paragrafo si trovano in [3].

Enunciamo prima il seguente

Lemma 2.6. *Sia* $f(t) = e^{t+e^t}$, $F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\ d\tau$. *Allora*

$$F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1 + O(1)e^{-t} \ , \tag{2.88}$$

dove $O(1)$ *è una quantità limitata.*

Dimostrazione. Facendo i calcoli si trova

$$F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1 + e^{-t} - e^{-e^t} - e^{-t-e^t} \ .$$

Il lemma segue da questa equazione. □

Lemma 2.7. *Sia* $f(t) = e^{t+e^t}$, $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\ d\tau$. *Se* $\Phi = \Phi(s)$ *è definita da*

$$\int_{\Phi(s)}^{\infty} (2F(t))^{-\frac{1}{2}} dt = s \tag{2.89}$$

si ha

$$-\Phi'(s) = \big[1 + O(1)e^{-\Phi(s)}\big] s\ f(\Phi(s)) \ .$$

Dimostrazione. Dalla relazione (banale)

$$-1 + 2(1 + O(1)e^{-t}) = 1 + O(1)e^{-t} \ ,$$

usando l'equazione (2.88) si ha

$$-1 + 2F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1 + O(1)e^{-t} \ .$$

Moltiplicando per $(2F(t))^{-\frac{1}{2}}$ troviamo

$$-(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + (2F(t))^{\frac{1}{2}} f'(t)(f(t))^{-2} = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \ ,$$

e

$$-\big((2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}\big)' = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \ .$$

Integrando in (t, ∞) si ha

$$\begin{aligned} &(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} \\ &= \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1) \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} e^{-\tau} d\tau \ . \end{aligned} \tag{2.90}$$

Usando la regola di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} \int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{\int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} e^{-\tau} d\tau} = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}} = 1 \ . \tag{2.91}$$

Usando la (2.91), la (2.90) può essere riscritta come

$$(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} = \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1)e^{-t} \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau \ .$$

Ponendo $t = \Phi(s)$ e usando l'equazione $-\Phi'(s) = (2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}}$, il lemma è dimostrato. $\square$

Teorema 2.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1) *con $f(u) = e^{u+e^u}$, allora*

$$u(x) = \Phi(\delta) + H\delta e^{-\Phi(\delta)} + O(1)\delta e^{-2\Phi(\delta)} \ ,$$

dove $H = (N-1)K$, $\delta = \delta(x)$ denota la distanza di x dal bordo $\partial\Omega$, $O(1)$ rappresenta una quantità limitata e Φ è definita dalla (2.89).

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \Phi(\delta) + H\delta e^{-\Phi(\delta)} + \alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)} \ ,$$

dove α è una costante positiva da determinare. Abbiamo

$$w_{x_i} = \Phi'(\delta)\delta_{x_i} + H_{x_i}\delta e^{-\Phi(\delta)} + H\big(\delta e^{-\Phi(\delta)}\big)'\delta_{x_i} + \alpha\big(\delta e^{-2\Phi(\delta)}\big)'\delta_{x_i} \ ,$$

e

$$\Delta w = \Phi''(\delta) - \Phi'(\delta)H + \Delta H\delta e^{-\Phi(\delta)} + \big(2\nabla H \cdot \nabla\delta - H^2\big)\big(\delta e^{-\Phi(\delta)}\big)'$$
$$+H\big(\delta e^{-\Phi(\delta)}\big)'' + \alpha\big(\delta e^{-2\Phi(\delta)}\big)'' - \alpha H\big(\delta e^{-2\Phi(\delta)}\big)' \ . \tag{2.92}$$

Per il Lemma 2.7 si ha $-\Phi'(\delta) = \big(1 + O(1)e^{-\Phi(\delta)}\big)\delta f(\Phi(\delta))$, e $\Phi''(\delta) = f(\Phi(\delta))$. Inoltre, dato che $\Phi'(\delta)\delta \to 0$ quando $\delta \to 0$, per δ piccoli si ha anche che

$$0 < \big(\delta e^{-\Phi(\delta)}\big)' = e^{-\Phi(\delta)} - \delta e^{-\Phi(\delta)}\Phi'(\delta) < C_1 e^{-\Phi(\delta)} \ .$$

Denotiamo con C_i costanti positive (indipendenti da α). Ricordando che $\dfrac{-\left(\Phi'(\delta)\right)}{f(\Phi(\delta))\delta} \to 1$ (Lemma 2.7), e dato che si ha

$$\lim_{\delta\to 0} f(\Phi(\delta))\delta^2 = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\delta}{f(\Phi(\delta))^{-\frac{1}{2}}}\right)^2 = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{e^{-\frac{1}{2}(t+e^t)}}\right)^2$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}(1+e^t)e^{-\frac{1}{2}(t+e^t)}}\right)^2 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(2\int_{-\infty}^t e^{\tau+e^\tau}d\tau\right)\frac{(1+e^t)^2}{4}\ e^{-(t+e^t)}} = 0$$

risulta

$$0 < \left(\delta e^{-\Phi(\delta)}\right)'' = -2e^{-\Phi(\delta)}\Phi'(\delta) - e^{-\Phi(\delta)}f(\Phi(\delta))\delta$$

$$+e^{-\Phi(\delta)}(\Phi'(\delta))^2\delta < C_2 e^{-\Phi(\delta)}f(\Phi(\delta))\delta\ .$$

Allo stesso modo si trova che

$$0 < (\delta e^{-2\Phi(\delta)})' < C_3 e^{-2\Phi(\delta)}$$

e

$$0 < \left(\delta e^{-2\Phi(\delta)}\right)'' < C_4 e^{-2\Phi(\delta)}f(\Phi(\delta))\delta\ .$$

Quindi, indicando con M_i delle costanti positive indipendenti da α, dalla (2.92) si trova

$$\Delta w < f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta + M_1\delta e^{-\Phi(\delta)} + \alpha M_2\delta e^{-2\Phi(\delta)}\Big]\ . \tag{2.93}$$

D'altra parte, essendo

$$e^w = e^{\Phi(\delta)+H\delta e^{-\Phi(\delta)}+\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}} > e^{\Phi(\delta)}\left[1 + H\delta e^{-\Phi(\delta)} + \alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}\right]\ ,$$

si trova

$$f(w) = e^{w+e^w} > e^{\Phi(\delta)+H\delta e^{-\Phi(\delta)}+\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}+e^{\Phi(\delta)}\left[1+H\delta e^{-\Phi(\delta)}+\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}\right]}$$

$$= e^{\Phi(\delta)+e^{\Phi(\delta)}} e^{\left[H\delta e^{-\Phi(\delta)}+\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}+H\delta+\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)}\right]}$$

$$> f(\Phi(\delta))\left[1 - M_3\delta e^{-\Phi(\delta)} + H\delta + \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)}\right] . \tag{2.94}$$

Dalla (2.93) e (2.94) abbiamo

$$\Delta w < f(w) \tag{2.95}$$

quando

$$1 + H\delta + M_1\delta e^{-\Phi(\delta)} + \alpha M_2\delta e^{-2\Phi(\delta)} < 1 - M_3\delta e^{-\Phi(\delta)} + H\delta + \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)}$$

Semplificando si ha

$$M_1 + M_3 < \alpha \left[1 - M_2 e^{-\Phi(\delta)}\right] . \tag{2.96}$$

La disuguaglianza (2.96) è verificata se δ è sufficientemente piccolo e α sufficientemente grande.

La funzione $f(t) = e^{t+e^t}$ è positiva e crescente per ogni t. Se $F(t)$ è definita come nel Lemma 2.6, la funzione $F(t)t^{-2}$ è crescente per grandi t. Inoltre, se $L(t) = \int_0^t \sqrt{F(\tau)}d\tau$, per $1 < a < 2 < b$ si ha

$$a\frac{F(t)}{f(t)} \leq \frac{L(t)}{L'(t)} \leq b\frac{F(t)}{f(t)} \quad \text{per grandi } t \ .$$

Infatti usando il Lemma 2.6, si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)f(t)}{L'(t)F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(F(t))^{\frac{3}{2}}(f(t))^{-1}} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{3/2 - F(t)f'(t)(f(t))^{-2}} = 2$$

Quindi, dal Teorema 4 (ii) di [15] vale la stima (2.4), che riscriviamo nella forma

$$C\delta^2\Phi'(\delta) + \Phi(\delta) \le u(x) \le \Phi(\delta) + C\delta\Phi(\delta) \ . \tag{2.97}$$

Usando la parte destra della (2.97) si trova

$$w(x) - u(x) \ge \ H\delta e^{-\Phi(\delta)} + \alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)} - C\delta\Phi(\delta) \ . \tag{2.98}$$

Prendiamo α e δ_0 in modo tale che la (2.96) sia vera per $\delta(x) = \delta_0$ e poniamo $\alpha\delta_0 e^{-2\Phi(\delta_0)} = \rho$. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in modo tale che $\alpha\delta_0 e^{-2\Phi(\delta_0)} = \rho$ e

$$H\delta e^{-\Phi(\delta)} + \rho - C\delta\Phi(\delta) > 0$$

per $\delta(x) = \delta_0$. Ricordiamo che $\delta\Phi \to 0$ per $\delta \to 0$. Allora $w(x) \ge u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) = \delta_0\}$. Inoltre, per la (2.98) abbiamo $w(x) \ge u(x)$ su $\partial\Omega$. Quindi, usando la (2.95) e il teorema del confronto si trova $w(x) \ge u(x)$ su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$.

Ora proviamo che la funzione

$$v(x) = \Phi(\delta) + H\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}$$

è una sotto-soluzione se α è una opportuna costante positiva. Facendo i calcoli, al posto della (2.85) si trova

$$\Delta v > f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta - M_4\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha M_5\delta e^{-2\Phi(\delta)}\Big] \ . \tag{2.99}$$

Il prossimo passaggio risulta leggermente più delicato. Prendiamo α e δ tali che

$$e\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)} < 1 \ \text{ e } \ H\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)} < 1 \ . \tag{2.100}$$

Allora, usando la seconda disuguaglianza della (2.100) si ha

$$e^v = e^{\Phi(\delta)+H\delta e^{-\Phi(\delta)}-\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}}$$

$$< e^{\Phi(\delta)}\big[1 + H\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)} + e(H\delta e^{-\Phi(\delta)})^2 + e(\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)})^2\big] \ .$$

Quindi, usando la prima disuguaglianza della (2.100) si ha

$$f(v) = e^{v+e^v}$$

$$< e^{\Phi(\delta)+H\delta e^{-\Phi(\delta)}-\alpha\delta e^{-2\Phi(\delta)}+e^{\Phi(\delta)}+H\delta-\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)}+eH^2\delta^2 e^{-\Phi(\delta)}+e\alpha^2\delta^2 e^{-3\Phi(\delta)}}$$

$$< f(\Phi(\delta))e^{H\delta+M_6\delta e^{-\Phi(\delta)}-\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)}}$$

$$< f(\Phi(\delta))\big[1 + H\delta + M_7\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)} + M_7(\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)})^2\big] \ .$$

Confrontando l'ultima stima con la (2.99) si ha

$$\Delta v > f(v) \tag{2.101}$$

se

$$1 + H\delta - M_4\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha M_5\delta e^{-2\Phi(\delta)}$$

$$> 1 + H\delta + M_7\delta e^{-\Phi(\delta)} - \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)} + (\alpha\delta e^{-\Phi(\delta)})^2 \ .$$

Semplificando, l'ultima disuguaglianza porta alla

$$M_4 + M_7 < \alpha\big[1 - \alpha\delta e^{-\Phi(\delta)} - M_5 e^{-\Phi(\delta)}\big] \ . \tag{2.102}$$

Naturalmente, la (2.102) e la (2.100) sono vere se α è abbastanza grande e se δ è abbastanza piccolo. Usando la parte sinistra della (2.97), facendo decrescere δ_0 e crescere α se necessario, si prova che $v(x) - u(x) \leq 0$ in tutti i punti di Ω tali che $\delta(x) = \delta_0$. Inoltre, usando di nuovo la (2.97) osserviamo che $v(x) - u(x) \leq 0$ su $\partial\Omega$. Quindi, dalla (2.101) per il teorema del confronto si ha che $v(x)$ è una sotto-soluzione su $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Il teorema è dimostrato. $\square$

2.7 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = f(u)$ con $f(t)$ a crescita polinomiale.

Finora abbiamo studiato il problema (2.1) per particolari esempi di funzioni $f(t)$. In questo paragrafo cerchiamo una stima della soluzione del problema (2.1) per una classe di funzioni che abbiano crescita di tipo polinomiale. Evidentemente, le funzioni prese in considerazione nei paragrafi 2.1 e 2.2 rientrano in questa classe.

I risultati esposti in questo paragrafo si trovano in [6].

Supponiamo che $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sia regolare, crescente in $[0, +\infty)$, con $f(0) = 0$, e siano $p > 1$, $\beta > 0$ tali che, per t grandi, si abbia

$$\frac{f'(t)F(t)}{(f(t))^2} = \frac{p}{p+1} + O(1)t^{-\beta} \quad F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \ , \tag{2.103}$$

dove $O(1)$ denota, come nei casi precedenti, una quantità limitata.

Scriviamo la (2.103) come

$$(F(t))^{\frac{1}{p+1}}\Big(\frac{(F(t))^{\frac{p}{p+1}}}{f(t)}\Big)' + O(1)t^{-\beta} = 0 \ .$$

Integrando per parti in $(1, t)$ si ha

$$\frac{F(t)}{tf(t)} = \frac{1}{p+1} + g(t), \tag{2.104}$$

dove

$$|g(t)| \leq \begin{cases} Ct^{-\beta} & \text{se } 0 < \beta < 1 \ , \\ Ct^{-1}\log t & \text{se } \beta = 1 \ , \\ Ct^{-1} & \text{se } \beta > 1 \ . \end{cases} \tag{2.105}$$

Qui abbiamo indicato con C una costante opportuna, che naturalmente non è sempre la stessa nelle varie disuguaglianze. Usando di nuovo le stime (2.103) e (2.104) abbiamo

$$\frac{tf'(t)}{f(t)} = p + g(t), \tag{2.106}$$

dove $g(t)$ non è necessariamente la stessa della (2.104), ma soddisfa ancora la stima (2.105).

Sia $0 < \epsilon < p - 1$. Dalla (2.106) si trova, per qualche costante $C = C_\epsilon > 1$ e per t grandi

$$\frac{1}{C}\ t^{p-\epsilon} < f(t) < C\ t^{p+\epsilon}, \qquad \frac{1}{C}\ t^{p+1-\epsilon} < F(t) < C\ t^{p+1+\epsilon}\ , \tag{2.107}$$

dove, come prima, la costante C che compare nelle varie espressioni non è necessariamente la stessa. Anche nel seguito diverse costanti verranno indicate sempre con C per comodità.

Sia $\Phi = \Phi(s)$ definita dalla (2.2). Allora, usando le stime (2.107), per s piccoli si trova

$$\frac{1}{C}\ s^{\frac{2}{p-1-\epsilon}} < (\Phi(s))^{-1} < Cs^{\frac{2}{p-1+\epsilon}}. \tag{2.108}$$

Lemma 2.8. *Se vale la* (2.103) *e se* $\Phi = \Phi(s)$ *è definita come nella* (2.2)*, allora si ha*

$$\lim_{s\to 0} \frac{\Phi(s)}{s^2 f(\Phi(s))} = \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}. \tag{2.109}$$

Dimostrazione. Per provare la (2.109) scriviamo

$$\frac{\Phi(s)}{s^2 f(\Phi(s))} = \left(\frac{(\Phi(s))^{\frac{1}{2}}(f(\Phi(s)))^{-\frac{1}{2}}}{\int_{\Phi(s)}^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau} \right)^2. \tag{2.110}$$

Ricordiamo che la (2.103) implica la (2.104). Posto $\Phi(s) = t$, usando la regola di de l'Hôpital, la (2.103) e la (2.104) si trova

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \frac{(\Phi(s))^{\frac{1}{2}}(f(\Phi(s)))^{-\frac{1}{2}}}{\int_{\Phi(s)}^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-\frac{1}{2}}}{\int_t^{\infty} (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}(f(t))^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-\frac{3}{2}} f'(t)}{-(2F(t))^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \Big[-\Big(\frac{tf(t)}{2F(t)}\Big)^{-\frac{1}{2}} + \Big(\frac{tf(t)}{2F(t)}\Big)^{\frac{1}{2}} 2\frac{f'(t)F(t)}{(f(t))^2} \Big] \\
&= \frac{1}{2} \Big[-\Big(\frac{p+1}{2}\Big)^{-\frac{1}{2}} + \Big(\frac{p+1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{2p}{p+1} \Big] = \Big(\frac{p+1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{p-1}{p+1}.
\end{aligned}$$

Questa stima e la (2.110) danno la (2.109). Il lemma è dimostrato. □

Lemma 2.9. *Se vale la* (2.103) *e se* $\Phi = \Phi(s)$ *è definita come nella* (2.2)*, allora si ha*

$$\frac{-\Phi'(s)}{f(\Phi(s))} = \frac{p-1}{p+1} s + O(1)(\Phi(s))^{-\beta} s. \tag{2.111}$$

Dimostrazione. Dalla relazione

$$-1 + 2\Big(\frac{p}{p+1} + O(1)t^{-\beta}\Big) = \frac{p-1}{p+1} + O(1)t^{-\beta},$$

usando la (2.103) si ha

$$-1 + 2F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = \frac{p-1}{p+1} + O(1)t^{-\beta}.$$

Moltiplicando per $(2F(t))^{-\frac{1}{2}}$ troviamo

$$\begin{aligned} &-(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + (2F(t))^{\frac{1}{2}} f'(t)(f(t))^{-2} \\ &= \frac{p-1}{p+1}(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta}, \end{aligned}$$

e

$$-\big((2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}\big)' = \frac{p-1}{p+1}(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta}.$$

Usando la (2.107) osserviamo che $(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} \to 0$ quando $t \to \infty$. Quindi, integrando su (t, ∞) si ha

$$\begin{aligned} &(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} \\ &= \frac{p-1}{p+1} \int_t^\infty \big(2F(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1) \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\beta} d\tau. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Usando la regola di de l'Hôpital e la (2.104) si trova

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\beta} \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\beta} d\tau} &= 1 + \beta \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau}{t(2F(t))^{-\frac{1}{2}}} \\ &= 1 + \beta \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{1 - t(2F(t))^{-1} f(t)} = 1 + \frac{2\beta}{p-1}. \end{aligned}$$

Usando quest'ultimo risultato, l'equazione (2.112) può essere riscritta come

$$\frac{(2F(t))^{\frac{1}{2}}}{f(t)} = \frac{p-1}{p+1} \int_t^\infty \big(2F(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1)t^{-\beta} \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Posto $t = \Phi(s)$ e ricordando che $-\Phi'(s) = (2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}}$, il lemma risulta dimostrato. $\square$

Per dimostrare il seguente teorema, abbiamo bisogno di una ulteriore ipotesi. Supponiamo che esista una costante M tale che, per ogni $\theta \in (1/2, 2)$ e per t grandi si abbia

$$\frac{|f''(\theta t)|t^2}{f(t)} \leq M. \tag{2.113}$$

Teorema 2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ un dominio regolare e limitato, siano $p > 1$, $\beta > 0$ numeri reali e sia $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione regolare, crescente in $[0, \infty)$, tale che $f(0) = 0$, che soddisfa la* (2.103) *e la* (2.113)*. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1)*, allora*

$$u(x) = \Phi(\delta)\Big[1 + \frac{N-1}{p+3}K\delta + O(1)\delta^\sigma\Big],$$

dove Φ è definita dalla (2.2)*, $\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, $K = K(x)$ è la curvatura media della superficie $\{\delta(x) = \text{costante}\}$, $O(1)$ è una quantità limitata, $1 < \sigma \leq 2$, con $\sigma < \dfrac{2\beta}{p-1} + 1$ per $0 < \beta \leq 1$ e $\sigma < \dfrac{2}{p-1} + 1$ per $\beta > 1$.*

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \Phi(\delta) + A\Phi(\delta)\delta + \alpha\Phi(\delta)\delta^\sigma,$$

dove

$$A = \frac{H}{p+3}, \quad H = (N-1)K \tag{2.114}$$

e α è una costante positiva da determinare. Si ha

$$w_{x_i} = \Phi'(\delta)\delta_{x_i} + A_{x_i}\Phi(\delta)\delta + A\big(\Phi(\delta)\delta\big)'\delta_{x_i} + \alpha\big(\Phi(\delta)\delta^\sigma\big)'\delta_{x_i}.$$

Ricordando la (1.8) si trova

$$\Delta w = \Phi''(\delta) - \Phi'(\delta)H + \Delta A\Phi(\delta)\delta + 2\nabla A \cdot \nabla\delta\big(\Phi(\delta)\delta\big)'$$

$$+A\big(\Phi(\delta)\delta\big)'' - A\big(\Phi(\delta)\delta\big)'H + \alpha\Big(\big(\Phi(\delta)\delta^\sigma\big)'' - \big(\Phi(\delta)\delta^\sigma\big)'H\Big)$$

$$= \Phi''(\delta) - \Phi'(\delta)(H - 2A) + \Delta A\Phi(\delta)\delta + 2\nabla A \cdot \nabla\delta\Big(\Phi'(\delta)\delta + \Phi(\delta)\Big)$$

$$+A\Phi''(\delta)\delta - A\Big(\Phi'(\delta)\delta + \Phi(\delta)\Big)H$$

$$+\alpha\Big(\Phi''(\delta)\delta^\sigma + 2\sigma\Phi'(\delta)\delta^{\sigma-1} + \sigma(\sigma-1)\Phi(\delta)\delta^{\sigma-2}$$

$$-\Phi'(\delta)\delta^\sigma H - \sigma\Phi(\delta)\delta^{\sigma-1}H\Big). \tag{2.115}$$

Dalla (2.2) si ha

$$\Phi''(\delta) = f(\Phi(\delta)).$$

Inoltre, dalla (2.109) con $s = \delta$ si ricava

$$\frac{\Phi(\delta)}{f(\Phi(\delta))} = \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\ \delta^2 + o(1)\delta^2,$$

dove $o(1)$ denota una quantità che tende a zero quando δ tende a zero. Usando le ultime due equazioni e la (2.111) con $s = \delta$, dalla (2.115) segue che

$$\Delta w = f(\Phi(\delta))\Big[1 + \Big(\frac{p-1}{p+1}(H - 2A) + A\Big)\delta + O(1)(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta + O(1)\delta^2$$

$$+\alpha\delta^\sigma\Big(1 - 2\sigma\frac{p-1}{p+1} + \sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} + o(1)\Big)\Big]. \tag{2.116}$$

Dato che $O(1)$ è una quantità limitata, possiamo trovare opportune costanti positive M_i, $i = 1, 2$, tali che

$$\Delta w < f(\Phi(\delta))\Big[1 + \Big(\frac{p-1}{p+1}(H - 2A) + A\Big)\delta + M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta + M_2\delta^2$$

$$+\alpha\delta^\sigma\Big(1 - 2\sigma\frac{p-1}{p+1} + \sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} + o(1)\Big)\Big]. \tag{2.117}$$

D'altra parte, usando lo sviluppo di Taylor si ha

$$f(w) = f(\Phi(\delta))\Big[1 + \frac{f'(\Phi(\delta))}{f(\Phi(\delta))}\ \Phi(\delta)(A\delta + \alpha\delta^\sigma)$$

$$+\frac{f''(\overline{\Phi}(\delta))}{f(\Phi(\delta))}\frac{(\Phi(\delta))^2}{2}(A\delta + \alpha\delta^\sigma)^2\Big], \tag{2.118}$$

dove $\overline{\Phi}(\delta)$ è compreso fra $\Phi(\delta)$ e $\Phi(\delta)(1 + A\delta + \alpha\delta^\sigma)$. Dopo che α è fissato, consideriamo solo punti $x \in \Omega$ tali che

$$-\frac{1}{2} < A\delta + \alpha\delta^\sigma < 1. \tag{2.119}$$

Ciò significa che $1/2 < 1 + A\delta + \alpha\delta^\sigma < 2$. Quindi, il termine $\overline{\Phi}(\delta)$ che compare nella (2.118) soddisfa la relazione $\overline{\Phi}(\delta) = \theta\Phi(\delta)$ con $1/2 < \theta < 2$, e possiamo usare la (2.113). Usando la (2.105) e la (2.113), per la (2.118) si ha

$$f(w) = f(\Phi(\delta))\Big[1 + pA\delta + \alpha p\delta^\sigma$$

$$+ O(1)g(\Phi(\delta))\ \delta + O(1)g(\Phi(\delta))\ \alpha\delta^\sigma + O(1)\delta^2 + O(1)(\alpha\delta^\sigma)^2\Big]. \tag{2.120}$$

Per la (2.120), possiamo prendere anche opportune costanti M_i, $i = 3, 4, ...$ indipendenti da α tali che

$$f(w) > f(\Phi(\delta))\Big[1 + pA\delta + \alpha p\delta^\sigma$$

$$-M_3|g(\Phi(\delta))|\ \delta - M_4\delta^2 - M_5|g(\Phi(\delta))|\ \alpha\delta^\sigma - M_6(\alpha\delta^\sigma)^2\Big]. \tag{2.121}$$

Poiché dalla (2.114) risulta

$$\frac{p-1}{p+1}(H - 2A) + A = pA,$$

dalla (2.117) e dalla (2.121) si ha

$$\Delta w < f(w) \tag{2.122}$$

se

$$M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta + M_2\delta^2 + \alpha\delta^\sigma\Big(1 - 2\sigma\frac{p-1}{p+1} + \sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} + o(1)\Big)$$

$$< \alpha p\delta^\sigma - M_3|g(\Phi(\delta))|\ \delta - M_4\delta^2 - M_5|g(\Phi(\delta))|\ \alpha\delta^\sigma - M_6(\alpha\delta^\sigma)^2.$$

Semplificando, e usando nuovamente la (2.105) si ha

$$M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta^{1-\sigma} + M_3|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} + (M_2+M_4)\delta^{2-\sigma}$$

$$< \alpha\Big(p - 1 + 2\sigma\frac{p-1}{p+1} - \sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} - o(1) - M_6\alpha\delta^\sigma\Big). \tag{2.123}$$

Discutiamo la disuguaglianza (2.123). Usando la (2.107) si ha

$$(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta^{1-\sigma} < C\delta^{\frac{2\beta}{p-1+\epsilon}\ +1-\sigma}.$$

Se $0 < \beta \leq 1$, per ipotesi abbiamo $\sigma < 1 + \frac{2\beta}{p-1}$, e possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $\frac{2\beta}{p-1+\epsilon} + 1 - \sigma > 0$; se $\beta > 1$, abbiamo $\sigma < 1 + \frac{2}{p-1}$, e possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $\frac{2\beta}{p-1+\epsilon} + 1 - \sigma > 0$. Quindi, in entrambi i casi $(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta^{1-\sigma} \to 0$ quando $\delta \to 0$.

Se $0 < \beta < 1$, dalla (2.105) si ha $|g(\Phi(\delta))| < C(\Phi(\delta))^{-\beta}$; quindi, usando il ragionamento precedente, si ha che $|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} \to 0$ quando $\delta \to 0$. Se $\beta = 1$, allora $|g(\Phi(\delta))| < C(\Phi(\delta))^{-1}\log(\Phi(\delta))$ e, usando la (2.108) si ha che $|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} < C\delta^{\frac{2}{p-1+\epsilon}+1-\sigma}\log(\delta^{-1})$. Poichè $\sigma < 1 + \frac{2}{p-1}$, possiamo prendere $\epsilon > 0$ tale che $\sigma < 1 + \frac{2}{p-1+\epsilon}$. Segue che

$|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} \to 0$ quando $\delta \to 0$ anche per $\beta = 1$. Se $\beta > 1$, allora $|g(\Phi(\delta))| < C(\Phi(\delta))^{-1}$. Usando di nuovo la (2.108) si trova

$$|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} < C\delta^{\frac{2}{p-1+\epsilon}+1-\sigma} .$$

Poiché ora $\sigma < 1 + \frac{2}{p-1}$, possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $\sigma < 1 + \frac{2}{p-1+\epsilon}$. Quindi, per $\delta \to 0$ $|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} \to 0$ anche in questo caso.

Chiaramente, dato che $\sigma \leq 2$, risulta che $\delta^{2-\sigma}$ è limitato per $\delta \to 0$. Inoltre si ha

$$p-1+2\sigma\frac{p-1}{p+1}-\sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} = \frac{(p-1)^2}{2(p+1)}(\sigma+1)\Big(2\frac{p+1}{p-1}-\sigma\Big) > 0.$$

Quindi possiamo prendere α abbastanza grande e δ_0 abbastanza piccolo in modo tale che la (2.119) e la (2.123) siano vere per $\delta(x) < \delta_0$.

Mostriamo ora che è possibile scegliere δ_0 tale che $u(x) < w(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Usando la (2.104) vediamo che $F(t)t^{-2}$ è crescente per t grandi. Inoltre, se $L(t) = \int_0^t \sqrt{f(\tau)}d\tau$, usando la regola di de l'Hôpital e la (2.103) si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)f(t)}{L'(t)F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(F(t))^{\frac{3}{2}}(f(t))^{-1}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3/2 - F(t)f'(t)(f(t))^{-2}} = \frac{2(p+1)}{p+3} > 1 .$$

Allora, usando il Teorema 4 (ii) di [15], vale la stima (2.4). Nel nostro caso, il lato sinistro della (2.4) può essere migliorato. Infatti vogliamo provare che

$$\left|\frac{u(x)}{\Phi(\delta(x))} - 1\right| \leq C\delta(x) . \tag{2.124}$$

Ricordiamo che la (2.103) implica la (2.104). Posto $\Phi(s) = t$, usando la regola di de l'Hôpital e la (2.104) si ha

$$\lim_{s\to 0} \frac{\Phi(s)}{-s\Phi'(s)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau} = \lim_{t\to\infty} \frac{(2F(t))^{-\frac{1}{2}} - t(2F(t))^{-\frac{3}{2}} f(t)}{-(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= -1 + \lim_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{2F(t)} = -1 + \frac{p+1}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

La disuguaglianza (2.124) segue dalla (2.4) e dalla stima appena trovata. Dalla (2.124) segue che

$$\lim_{x\to\partial\Omega} \frac{\Phi(\delta(x))}{u(x)} = 1.$$

Sia $\rho = \alpha\delta^\sigma$, dove α e δ sono scelti come prima. Possiamo far decrescere δ (facendo crescere α in accordo con la relazione $\alpha\delta^\sigma = \rho$) finché

$$\frac{\Phi(\delta(x))}{u(x)} > \frac{2}{2+\rho}$$

per $\delta(x) \leq \delta_0$. Di conseguenza si ha

$$\frac{w(x)}{u(x)} > \frac{2}{2+\rho}\big(1 + A\delta + \alpha\delta^\sigma\big).$$

Facciamo decrescere ancora δ_0 (facendo crescere α) in modo che si abbia $A\delta_0 > -\rho/2$ e $\alpha\delta_0^\sigma = \rho$. Allora $w(x) > u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Dalla (2.122) segue che $w(x) \geq u(x)$ per $\delta(x) < \delta_0$.

Ora cerchiamo una sotto-soluzione della forma

$$v(x) = \Phi(\delta) + A\Phi(\delta)\delta - \alpha\Phi(\delta)\delta^\sigma,$$

dove A è definita come prima e α è una costante positiva da determinare. Al posto della (2.116) ora si ha

$$\Delta v = f(\Phi(\delta))\Big[1 + \Big(\frac{p-1}{p+1}(H - 2A) + A\Big)\delta + O(1)(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta + O(1)\delta^2$$

$$-\alpha\delta^\sigma\Big(1-2\sigma\frac{p-1}{p+1}+\sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}+o(1)\Big)\Big].$$

Ciò significa che possiamo trovare opportune costanti M_i (non necessariamente le stesse di prima) tali che

$$\Delta v > f(\Phi(\delta))\Big[1+\Big(\frac{p-1}{p+1}(H-2A)+A\Big)\delta - M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta - M_2\delta^2$$

$$-\alpha\delta^\sigma\Big(1-2\sigma\frac{p-1}{p+1}+\sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}+o(1)\Big)\Big]. \tag{2.125}$$

Dopo che α è fissato, consideriamo solo punti $x\in\Omega$ tali che

$$-\frac{1}{2} < A\delta - \alpha\delta^\sigma < 1. \tag{2.126}$$

Usando lo sviluppo di Taylor, la (2.105) e la (2.113) si ha

$$f(v) < f(\Phi(\delta))\Big[1+pA\delta-\alpha p\delta^\sigma$$

$$+M_3|g(\Phi(\delta))|\delta + M_4\delta^2 + M_5|g(\Phi(\delta))|\alpha\delta^\sigma + M_6(\alpha\delta^\sigma)^2\Big]. \tag{2.127}$$

Ricordando che

$$\frac{p-1}{p+1}(H-2A)+A = pA,$$

dalla (2.125) e dalla (2.127) si ha

$$\Delta v > f(v) \tag{2.128}$$

quando

$$-M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta - M_2\delta^2$$

$$-\alpha\delta^\sigma\Big(1-2\sigma\frac{p-1}{p+1}+\sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}+o(1)\Big)$$

$$> -\alpha p\delta^\sigma + M_3|g(\Phi(\delta))|\delta + M_4\delta^2 + M_5|g(\Phi(\delta))|\alpha\delta^\sigma + M_6(\alpha\delta^\sigma)^2.$$

Semplificando si trova

$$M_1(\Phi(\delta))^{-\beta}\delta^{1-\sigma} + M_3|g(\Phi(\delta))|\delta^{1-\sigma} + (M_2 + M_4)\delta^{2-\sigma}$$
$$< \alpha\Big(p - 1 + 2\sigma\frac{p-1}{p+1} - \sigma(\sigma-1)\frac{(p-1)^2}{2(p+1)} - o(1) - M_6\alpha\delta^{\sigma}\Big),$$

che è simile alla (2.123). Quindi possiamo prendere δ_0 sufficientemente piccolo e α sufficientemente grande in modo da soddisfare questa disuguaglianza per $\delta(x) < \delta_0$. Prendiamo α e δ come prima e poniamo $\alpha\delta^{\sigma} = \rho$. Usando nuovamente la relazione

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\Phi(\delta(x))}{u(x)} = 1$$

possiamo far decrescere δ (facendo crescere α in accordo con la relazione $\rho = \alpha\delta^{\sigma}$) finché

$$\frac{\Phi(\delta(x))}{u(x)} < \frac{2}{2-\rho}$$

per $\delta \leq \delta_0$. Come conseguenza si ha

$$\frac{v(x)}{u(x)} < \frac{2}{2-\rho}\big(1 + A\delta - \alpha\delta^{\sigma}\big).$$

Facciamo decrescere ancora δ_0 (facendo crescere α) in modo che si abbia $A\delta_0 < \rho/2$ e $\alpha\delta_0^{\sigma} = \rho$. Allora $v(x) < u(x)$ per $\delta(x) = \delta_0$. Dalla (2.128) e dal teorema del confronto segue che $v(x) \leq u(x)$ per $\delta(x) < \delta_0$. Il teorema segue dalle stime trovate per $w(x)$ e $v(x)$. □

2.8 Stime della soluzione nel caso $\Delta u = f(u)$ con $f(t)$ a crescita super-polinomiale.

Analogamente a come abbiamo fatto per le funzioni $f(t)$ con crescita di tipo polinomiale, vogliamo ora studiare il problema (2.1) cercando una stima della soluzione per una classe di funzioni che abbiano crescita di tipo super-polinomiale. Le funzioni $f(t)$ studiate nei paragrafi 2.3, 2.4 e 2.5 sono casi particolari di questo.

Supponiamo che $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia regolare e tale che

$$f(t) > 0, \quad f'(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau < \infty. \tag{2.129}$$

Al posto della (2.103) facciamo, ora, questa ipotesi:

$$\frac{F(t)f'(t)}{(f(t))^2} = 1 + O(1)t^{-\beta}, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau, \tag{2.130}$$

dove $O(1)$ è una quantità limitata e $\beta > 0$. Inoltre, supponiamo che, per qualche $0 \leq q < \beta$, si abbia

$$f((1+\theta)t) = f(t)\big[1 + \beta\theta t^{\beta} + O(1)\theta t^{q}\big] \tag{2.131}$$

dove $O(1)$ è una quantità limitata per $-1/2 < \theta t^{2\beta - q} < 1$ e $t > 1$.

Una famiglia di funzioni che soddisfa le (2.129), (2.130) e (2.131) è

$$f(t) = e^{t|t|^{\beta-1} + P(t)} \ ,$$

dove $P(t)$ è una funzione regolare non negativa, non decrescente e, per qualche $q < \beta$ e qualche $C > 0$, tale che $P(t) \leq Ct^q$, $tP'(t) \leq Ct^q$, $t^2 P''(t) \leq Ct^q$, $t^3 P'''(t) \leq Ct^q$.

Proviamo che tali funzioni soddisfano la (2.130). Si ha

$$\frac{F(t)f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{F(0)f'(t)}{(f(t))^2} + \frac{f'(t)\int_0^t f(\tau)d\tau}{(f(t))^2} \ .$$

Poiché, per $t > 0$, risulta

$$f'(t) = f(t)\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big) \ ,$$

si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta f'(t)}{(f(t))^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)}{e^{t^\beta+P(t)}} = 0 \ .$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{f'(t)\int_0^t f(\tau)d\tau}{(f(t))^2} &= \frac{\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}} \\
&= \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta\tau^{\beta-1} + P'(\tau)\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}} \\
&+\frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t) - \beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau)\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}} \\
1 - \frac{e^{P(0)}}{e^{t^\beta+P(t)}} &+ \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t) - \beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau)\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}} \ .
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta}{e^{t^\beta+P(t)}} = 0 \ ,$$

è sufficiente mostrare che la quantità

$$\frac{t^\beta\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t) - \beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau)\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}}$$

è limitata quando t tende a infinito. Usando più volte la regola di de l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta t^{2\beta-1} + t^\beta P'(t) - t^\beta(\beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau))\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta(2\beta-1)t^{2\beta-2} + \beta t^{\beta-1}P'(t)\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)} \\
&+\frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(t^\beta P''(t) - \beta t^{\beta-1}(\beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau))\big)d\tau}{e^{t^\beta+P(t)}\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta t^{\beta-1}}{\beta t^{\beta-1} + P'(t)} \\
&\frac{\int_0^t e^{\tau^\beta+P(\tau)}\big(\beta(2\beta-1)t^{\beta-1} + \beta P'(t) + tP''(t) - \beta(\beta\tau^{\beta-1} - P'(\tau))\big)d\tau}{\beta e^{t^\beta+P(t)}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta(\beta-1)t^{\beta-1} + tP''(t)}{\beta\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)}$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \frac{\beta(2\beta-1)(\beta-1)t^{\beta-1} + (\beta+1)tP''(t) + t^2P'''(t)}{\beta\big(\beta t^{\beta-1} + P'(t)\big)} \; \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta + P(\tau)} d\tau}{te^{t^\beta + P(t)}}$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta} + \frac{(2\beta-1)(\beta-1)}{\beta} \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t e^{\tau^\beta + P(\tau)} d\tau}{te^{t^\beta + P(t)}} = \frac{\beta-1}{\beta} \; .$$

Abbiamo provato che la (2.130) è vera per questa classe di funzioni $f(t)$.

Ora mostriamo che anche la (2.131) vale. Per $t > 0$, usando lo sviluppo di Taylor si ha

$$f((1+\theta)t) = e^{(t+\theta t)^\beta + P(t+\theta t)} = e^{t^\beta + \beta\theta t^\beta + \beta(\beta-1)(1+\theta_1)^{\beta-2}\frac{\theta^2}{2}t^\beta + P(t) + P'(t+\theta_2 t)\theta t} \, ,$$

dove θ_1 e θ_2 sono tra 0 e θ. Dato che prendiamo

$$-1/2 < \theta t^{2\beta - q} < 1 \; , \tag{2.132}$$

per $t > 1$ abbiamo $-1/2 < \theta < 1$. Inoltre, poiché $0 < tP'(t+\theta_2 t) \leq Ct^q$, abbiamo

$$f((1+\theta)t) = e^{t^\beta + P(t)} e^{\beta\theta t^\beta + O(1)\theta t^q} = f(t) e^{\beta\theta t^\beta + O(1)\theta t^q} \; .$$

Usando nuovamente lo sviluppo di Taylor, questa volta per la funzione esponenziale, e osservando che dalla (2.132) si ha che $\beta\theta t^\beta + O(1)\theta t^q$ è una quantità limitata quando t tende a infinito, si trova

$$f((1+\theta)t) = f(t)[1 + \beta\theta t^\beta + O(1)\theta t^q + O(1)(\theta t^\beta)^2] \; .$$

Poiché, dalla (2.132) si ha che $(\theta t^\beta)^2 = O(1)\theta t^q$, segue che la (2.131) è vera.

Facciamo vedere, ora, che valgono alcune stime per una funzione $f(t)$ che soddisfi la (2.129) e la (2.130). Sia $\epsilon > 0$. Dalla (2.130) si ha che esiste t_ϵ tale che

$$\frac{F(t)f'(t)}{(f(t))^2} > 1 - \epsilon$$

per $t > t_\epsilon$. Come conseguenza, dato un qualunque numero positivo p, esiste t_p tale che $F(t) > t^p$ per $t > t_p$. Scriviamo la (2.130) come

$$\Big(\frac{F(t)}{f(t)}\Big)' = O(1)t^{-\beta}.$$

Integrando in $(1, t)$ si trova

$$\frac{F(t)}{f(t)} - \frac{F(1)}{f(1)} = O(1)\int_1^t \tau^{-\beta} d\tau.$$

Dall' ultima stima segue che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{tf(t)} = 0. \tag{2.133}$$

Ricordando che $F(t) > t^2$ per t grandi, dalla (2.133) si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(F(t))^{\frac{1}{2}}}{f(t)} = 0. \tag{2.134}$$

Lemma 2.10. *Sia f una funzione che verifica la* (2.129) *e la* (2.130)*, e sia $\Phi = \Phi(s)$ definita da*

$$\int_{\Phi(s)}^{\infty} \big(2F(t)\big)^{-\frac{1}{2}} dt = s, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{2.135}$$

Allora

$$-\frac{\Phi'(s)}{f(\Phi(s))} = s + O(1)\big(\Phi(s)\big)^{-\beta} s.$$

Dimostrazione. Dalla relazione

$$-1 + 2\big(1 + O(1)t^{-\beta}\big) = 1 + O(1)t^{-\beta},$$

usando la (2.130) si ha

$$-1 + 2F(t)f'(t)(f(t))^{-2} = 1 + O(1)t^{-\beta}.$$

Moltiplicando per $(2F(t))^{-\frac{1}{2}}$ si trova

$$-(2F(t))^{-\frac{1}{2}} + (2F(t))^{\frac{1}{2}}f'(t)(f(t))^{-2} = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta},$$

e

$$-\big((2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}\big)' = (2F(t))^{-\frac{1}{2}} + O(1)(2F(t))^{-\frac{1}{2}}t^{-\beta}.$$

Integrando in (t, ∞) e ricordando la (2.134) si ha

$$(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1}$$
$$= \int_t^\infty \big(2F(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}}d\tau + O(1)\int^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\beta}d\tau. \qquad (2.136)$$

Usando la regola di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\beta}\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\beta}d\tau} = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\beta\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{t(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}.$$

Si ha

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\beta\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{t(2F(t))^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\beta}{1 - t(2F(t))^{-1}f(t)} = 0.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (2.133). Quindi si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\beta}\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{\int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\beta}d\tau} = 1. \qquad (2.137)$$

Usando la (2.137), l'equazione (2.136) può essere riscritta come

$$(2F(t))^{\frac{1}{2}}(f(t))^{-1} = \int_t^\infty \big(2F(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} d\tau + O(1)t^{-\beta} \int_t^\infty (2F(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Posto $t = \Phi(s)$ e usando l'equazione $-\Phi'(s) = (2F(\Phi(s)))^{\frac{1}{2}}$, segue l'enunciato del lemma. $\square$

Teorema 2.8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un dominio regolare e limitato, siano $\beta > 0$ e $0 \leq q < \beta$. Se $u(x)$ è una soluzione del problema* (2.1), *con $f(t)$ che verifica le* (2.129), (1.130) *e* (1.131), *allora*

$$u(x) = \Phi(\delta)\big[1 + \beta^{-1}(N-1)K\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + O(1)\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}\big],$$

dove Φ è definita dalla (2.135), *$\delta = \delta(x)$ è la distanza di x da $\partial\Omega$, $O(1)$ è una quantità limitata e $K = K(x)$ è la curvatura media di $\{x \in \Omega : \delta(x) = costante\}$.*

Dimostrazione. Cerchiamo una sopra-soluzione della forma

$$w(x) = \Phi(\delta) + \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} + \alpha\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta},$$

dove $H = (N-1)K$ e α è una costante positiva da determinare. Si ha

$$w_{x_i} = \Phi'(\delta)\delta_{x_i} + \beta^{-1}H_{x_i}\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}$$

$$+\beta^{-1}H\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'\delta_{x_i} + \alpha\big(\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\big)'\delta_{x_i}.$$

Sfruttando la (1.8) si ha

$$\Delta w = \Phi''(\delta) - \Phi'(\delta)H + \beta^{-1}\Delta H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} + 2\beta^{-1}\nabla H \cdot \nabla\delta\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'$$

$$+\beta^{-1}H\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'' - \beta^{-1}H^2\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'$$

$$+\alpha\big(\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\big)'' - \alpha\big(\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\big)' H. \tag{2.138}$$

Dal Lemma 2.10 con $s = \delta$ si ha

$$-\Phi'(\delta) = \big[1 + O(1)(\Phi(\delta))^{-\beta}\big]\delta f(\Phi(\delta)). \tag{2.139}$$

Usando la (2.139), l'equazione $\Phi'(\delta) = -\big(2F(\Phi(\delta))\big)^{\frac{1}{2}}$, e ricordando che $F(t) > t^p$ per $p > 2$ si trova

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(\Phi(\delta))^{1-\beta}}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta))} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(\delta)}{-\Phi'(\delta)}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(\delta)}{(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{t^2}{2F(t)}\Big)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Scriviamo l'ultimo risultato come

$$(\Phi(\delta))^{1-\beta} = o(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)), \tag{2.140}$$

dove $o(1)$ denota una quantità che tende a zero quando $\delta \to 0$.

Usando di nuovo la (2.139) si ha

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta))} = -1. \tag{2.141}$$

Quindi, usando la (2.140) e la (2.141)

$$\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)' = (\Phi(\delta))^{1-\beta} + (1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)$$

$$= o(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)). \tag{2.142}$$

Derivando di nuovo si ha

$$\big(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\big)'' = 2(1-\beta)(\Phi(\delta))^{-\beta}\Phi'(\delta)$$

$$-\beta(1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta-1}(\Phi'(\delta))^2 + (1-\beta)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} f(\Phi(\delta)). \tag{2.143}$$

Inoltre, ricordando la (2.133) si ha

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta-1}(\Phi'(\delta))^2}{\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}f(\Phi(\delta))}=\lim_{\delta\to 0}\frac{2F(\Phi(\delta))}{\Phi f(\Phi(\delta))}=\lim_{t\to\infty}\frac{2F(t)}{tf(t)}=0.$$

Poiché $\Phi''(\delta)=f(\Phi(\delta))$, usando gli ultimi risultati e la (2.141), dalla (2.143) si trova

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}\right)''=O(1)\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}f(\Phi(\delta)). \tag{2.144}$$

Allo stesso modo si trova

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\right)'=o(1)\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}f(\Phi(\delta)), \tag{2.145}$$

e

$$\left(\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\right)''=O(1)\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}f(\Phi(\delta)). \tag{2.146}$$

Denotiamo con M_i, $i=1,2,...$ costanti non negative opportune, indipendenti da α; usando le (2.139), (2.140), (2.142), (2.144), (2.145) e (2.146), dalla (2.138) si ha

$$\Delta w<f(\Phi(\delta))\Big[1+H\delta+M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}+\alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}\Big]. \tag{2.147}$$

D'altra parte, dalla (2.131) con $t=\Phi(\delta)$ si ha

$$f(w)=f((1+\theta)\Phi(\delta))=f(\Phi(\delta))\big[1+\beta\theta(\Phi(\delta))^{\beta}+O(1)\theta(\Phi(\delta))^{q}\big]$$

per $-1/2<\theta(\Phi(\delta))^{2\beta-q}<1$. Poniamo

$$\theta=\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta}+\alpha\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}$$

e prendiamo $\delta_0>0$ e α tali che, per $\{x\in\Omega:\delta(x)<\delta_0\}$ si abbia

$$-\frac{1}{2}<\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q}+\alpha\delta<1. \tag{2.148}$$

Allora $-1/2 < \theta(\Phi(\delta))^{2\beta-q} < 1$ e

$$f(w) > f(\Phi(\delta))\big[1 + H\delta + \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta}$$

$$-M_3\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} - M_4\alpha\delta(\Phi(\delta))^{2q-2\beta}\big]. \tag{2.149}$$

Dalla (2.147) e dalla (2.149) si trova

$$\Delta w < f(w) \tag{2.150}$$

quando

$$1 + H\delta + M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} + \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}$$

$$< 1 + H\delta + \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} - M_3\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} - M_4\alpha\delta(\Phi(\delta))^{2q-2\beta}.$$

Semplificando si ha

$$M_1(\Phi(\delta))^{-q} + M_3 < \alpha\big[\beta - M_2(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_4(\Phi(\delta))^{q-\beta}\big]. \tag{2.151}$$

Quindi possiamo prendere δ_0 piccolo e α grande in modo tale che la (2.151) e la (2.148) siano vere per $\delta(x) < \delta_0$.

La nostra funzione $f(t)$ è positiva e crescente per ogni t, e $F(t)t^{-2}$ è crescente per t grandi. Inoltre, se $L(t) = \int_0^t \sqrt{F(\tau)}d\tau$, usando la (2.130) si trova

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)f(t)}{L'(t)F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(f(t))^{-1}(F(t))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3/2 - (f(t))^{-2}F(t)f'(t)} = 2.$$

Segue che, per $1 < a < 2 < b$ abbiamo

$$a\frac{F(t)}{f(t)} \leq \frac{L(t)}{L'(t)} \leq b\frac{F(t)}{f(t)}$$

per t grandi, quindi dal Teorema 4 (ii) di [15] segue che possiamo usare la (2.4)

$$C\,\delta^2\Phi'(\delta)+\Phi(\delta)\le u(x)\le \Phi(\delta)+C\,\delta\Phi(\delta). \tag{2.152}$$

Usando il lato destro della (2.152) si trova

$$w(x)-u(x)$$

$$\ge (\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\big[\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q}+\alpha\delta-C\,\delta(\Phi(\delta))^{2\beta-q}\big]. \tag{2.153}$$

Prendiamo α e δ_0 tali che la (2.151) e la (2.148) siano vere, e poniamo $\alpha\delta_0=\rho$. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α in modo tale che $\alpha\delta_0=\rho$ e

$$\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q}+\rho-C\,\delta(\Phi(\delta))^{2\beta-q}>0$$

per $\delta(x)=\delta_0$. Notiamo che ciò è possibile perché, per ogni numero reale r si ha

$$\lim_{\delta\to 0}\delta(\Phi(\delta))^r=\lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty(2F(\tau))^{\frac12}d\tau}{t^{-r}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{r+1}}{r(2F(t))^{\frac12}}=0\ .$$

Allora $w(x)\ge u(x)$ su $\{x\in\Omega:\delta(x)=\delta_0\}$. Quando α è fissato, dalla (2.153) si trova $\liminf_{x\to\partial\Omega}[w(x)-u(x)]\ge 0$. Quindi, usando la (2.150) e il solito teorema del confronto si ha $w(x)\ge u(x)$ su $\{x\in\Omega:\delta(x)<\delta_0\}$.

Cerchiamo ora una sotto-soluzione della forma

$$v(x)=\Phi(\delta)+\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta}-\alpha\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta},$$

dove α è una costante positiva da determinare. Al posto della (2.147), ora si trova

$$\Delta v > f(\Phi(\delta))\Big[1 + H\delta - M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}\Big]. \quad (2.154)$$

Naturalmente, le costanti M_i che compaiono nella (2.154) e le costanti M_i che useremo in seguito non sono necessariamente le stesse del caso precedente. Prendiamo $\delta_0 > 0$ e α tali che, per $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$ si abbia

$$-\frac{1}{2} < \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q} - \alpha\delta < 1. \quad (2.155)$$

Allora, se

$$\theta = \beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}$$

abbiamo $-1/2 < \theta(\Phi(\delta))^{2\beta-q} < 1$ e, usando la (2.131) si ha

$$f(v) < f(\Phi(\delta))\big[1 + H\delta - \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta}$$

$$+M_3\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} + M_4\alpha\delta(\Phi(\delta))^{2q-2\beta}\big]. \quad (2.156)$$

Dalla (2.154) e dalla (2.156) si trova che

$$\Delta v > f(v) \quad (2.157)$$

se

$$1 + H\delta - M_1\delta(\Phi(\delta))^{-\beta} - \alpha M_2\delta(\Phi(\delta))^{q-2\beta}$$

$$> 1 + H\delta - \alpha\beta\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} + M_3\delta(\Phi(\delta))^{q-\beta} + M_4\alpha\delta(\Phi(\delta))^{2q-2\beta}.$$

Semplificando si ha

$$M_1(\Phi(\delta))^{-q} + M_3 < \alpha\big[\beta - M_2(\Phi(\delta))^{-\beta} - M_4(\Phi(\delta))^{q-\beta}\big]. \quad (2.158)$$

La disuguaglianza (2.158) (insieme alla (2.154) e alla (2.155)) è vera per $\delta(x) < \delta_0$ con δ_0 e α opportuni.

Usando il lato sinistro della (2.152) troviamo

$$v(x) - u(x) \leq \beta^{-1} H\delta(\Phi(\delta))^{1-\beta} - \alpha\delta(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta} - C\,\delta^2\Phi'(\delta)$$

$$= (\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}\Big[\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q} - \alpha\delta - C\,\delta^2\frac{\Phi'(\delta)}{(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}}\Big]. \quad (2.159)$$

Dal fatto che $\Phi'(\delta) = -(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{2}}$, si ha

$$-\lim_{\delta\to 0}\delta^2\frac{\Phi'(\delta)}{(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\delta\frac{(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{4}}}{(\Phi(\delta))^{\frac{1+q-2\beta}{2}}}\Big)^2 . \quad (2.160)$$

Inoltre

$$\lim_{\delta\to 0}\delta\frac{(2F(\Phi(\delta)))^{\frac{1}{4}}}{(\Phi(\delta))^{\frac{1+q-2\beta}{2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty(2F(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau}{t^{\frac{1+q-2\beta}{2}}(2F(t))^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(2F(t))^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2\beta-q-1}{2}t^{\frac{-1+q-2\beta}{2}}(2F(t))^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}t^{\frac{1+q-2\beta}{2}}(2F(t))^{-\frac{5}{4}}f(t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t^{\frac{2\beta-q+1}{2}}}{(2F(t))^{\frac{1}{4}}}\;\frac{2F(t)}{tf(t)}\;\frac{1}{\frac{2\beta-q-1}{2}\frac{2F(t)}{tf(t)} + \frac{1}{2}} = 0 . \quad (2.161)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (2.133) e il fatto che $F(t) > t^p$ per ogni p e per t grandi. Usando la (2.160) e la (2.161) si ha

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^2\frac{\Phi'(\delta)}{(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}} = 0 .$$

Prendiamo α e δ_0 tali che (2.158) sia vera, e poniamo $\alpha\delta_0 = \rho$. Facciamo decrescere δ_0 e crescere α finché

$$\beta^{-1}H\delta(\Phi(\delta))^{\beta-q} - \rho - C\,\delta^2\frac{\Phi'(\delta)}{(\Phi(\delta))^{1+q-2\beta}} < 0$$

per $\delta(x) = \delta_0$. Dalla (2.159) si ha che $v(x) - u(x) \leq 0$ per $\delta(x) = \delta_0$. Notiamo anche che, per α fissato, $\limsup_{x\to\partial\Omega}[v(x) - u(x)] \leq 0$. Quindi, dalla (2.157) si deve avere $v(x) \leq u(x)$ on $\{x \in \Omega : \delta(x) < \delta_0\}$. Il teorema segue dalle relazioni

$$v(x) \leq u(x) \leq w(x)$$

e dalle stime trovate per $w(x)$ e $v(x)$. $\square$

Bibliografia

[1] L. Andersson, P.T. Chruściel, *Solutions of the constraint equation in general relativity satisfying "hyperbolic conditions,* Dissertationes Mathematicae, **355** (1996), 1-100.

[2] C. Anedda, A. Buttu, G. Porru, *Boundary estimates for blow-up solutions of elliptic equations with exponential growth,* in stampa su Proc. Diff. Int. Equations.

[3] C. Anedda, A. Buttu, G. Porru, *Second order estimates for boundary blow-up solutions of special elliptic equations,* Boundary Value Problems, (2006), Article ID 45859, 1-12.

[4] C. Anedda, F. Cuccu, G. Porru, *Boundary estimates for solutions to singular elliptic equations,* Le Matematiche, Vol. LX (2005) - fascicolo II, 339-352.

[5] C. Anedda, G. Porru, *Higher order boundary estimates for blow-up solutions of elliptic equations,* Differential Integral Equations, **19** (2006), 345-360.

[6] C. Anedda, G. Porru, *Second order estimates for boundary blow-up solutions of elliptic equations,* presentato a Discrete and Continuous Dynamical Systems.

[7] C. Bandle, *Asymptotic behaviour of large solutions of quasilinear elliptic problems,* ZAMP **54** (2003), 731-738.

[8] C. Bandle, Y. Cheng, G. Porru, *Boundary blow-up in semilinear elliptic problems with singular weights at the boundary,* Applicable mathematics, (edited by J.C. Misra), Narosa, New Delhi, (2001), 68-81.

[9] C. Bandle, M. Essén, *On the solutions of quasilinear elliptic problems with boundary blow-up,* Partial differential equations of elliptic type, (Cortona, 1992), 93-111.

[10] C. Bandle, E. Giarrusso, *Boundary blow-up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms,* Adv. Differential Equations, **1** (1996), 133-150.

[11] C. Bandle, M. Marcus, *Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives, for semilinear elliptic problems with blow-up on the boundary,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1195), 155-171.

[12] C. Bandle, M. Marcus, *Dependence of blow-up rate of large solutions of semilinear elliptic equations, on the curvature of the boundary,* Complex Var. Theory Appl. **49** (2004), 555-570.

[13] C. Bandle, M. Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behaviour,* J. Anal. Math. **58** (1992), 9-24.

[14] C. Bandle, M. Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations with "singular" coefficients,* Optimization and nonlinear analysis (Haifa, 1990), 25-38.

[15] C. Bandle, M. Marcus, *On second order effects in the boundary behaviour of large solutions of semilinear elliptic problems,* Differential Integral Equations, **11** (1998), 23-34.

[16] C. Bandle, G. Porru, *Asymptotic behaviour and convexity of large solutions to nonlinear equations,* Inequalities and applications, 59-71, World Sci. Ser. Appl. Anal., 3, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1994).

[17] S. Berhanu, F. Cuccu, G. Porru, *On the boundary behaviour, including second order effects, of solutions to singular elliptic problems,* Acta Mathematica Sinica, English Series, pubblicato online, 27 Giugno 2006.

[18] S. Berhanu, F. Gladiali, G. Porru, *Qualitative properties of solutions to elliptic singular problems,* J. of Inequal. & Appl. **3**, (1999), 313-330.

[19] S. Berhanu, G. Porru, *Qualitative and quantitative estimates for large solutions to semilinear equations,* Communications in Applied Analysis, **4**, (2000), 121-131.

[20] L. Bieberbach, $\Delta u = e^u$ *und die automorphen Funktionem,* Math. Ann. **77**, (1916), 173-212.

[21] M. Chuaqui, C. Cortàzar, M. Elgueta, C. Flores, R. Letelier, J. Garcìa-Meliàn, *On an elliptic problem with boundary blow-up and singular weight: the radial case,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **133**, (2003), 1283-1297.

[22] M. Chuaqui, C. Cortàzar, M. Elgueta, J. Garcìa-Meliàn, *Uniqueness and boundary behaviour of large solutions to elliptic problems with singular weights,* Commun. Pure Appl. Anal., **3**, (2004), 653-662.

[23] M.M. Coclite, G. Palmieri *On a singular nonlinear Dirichlet problem,* Comm. Partial Differential Equations, **14**, (1989), 1315-1327.

[24] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz and L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity,* Comm. Part. Diff. Eq. **2** (1977), 193-222.

[25] Cui Shangbin, *Existence and nonxistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems,* Nonlinear Analysis **41** (2000), 149-176.

[26] Cui Shangbin, *Positive solutions for Dirichlet problems associated to semilinear elliptic equations with singular nonlinearity,* Nonlinear Analysis **21** (1993), 181-190.

[27] M. del Pino, R. Letelier, *The influence of domain geometry in boundary blow-up elliptic problems,* Nonlinear Anal. TMA **48**, (2002), 897-904.

[28] G. Diaz, R. Letelier, *Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: existence and uniqueness,* Nonlinear Analysis **20** (1993), 97-125.

[29] J.I. Diaz, J. M. Morel, L. Oswald, *An elliptic equation with singular nonlinearity,* Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 1333-1344.

[30] E.B. Dynkin, *Superdiffusion and positive solutions of nonlinear partial differential equations,* Uspekhi Mat. Nauk **59** (2004), 145-156.

[31] W. Fulks, J. S. Maybee, *A singular non-linear equation,* Osaka Math. J. **12**, (1960), 1-19.

[32] J. Garcia-Melian, *A remark on the existence of large solutions via sub and supersolutions,* Electron Journal Differential Equations, (2003), 4 pp.

[33] J. Garcia-Melian, R. Letelier- Albornoz, J. Sabina de Lis, *Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semi-linear problems with boundary blow-up,* Proc. Amer. Math. Soc. **129**, (2001), 3593-3602.

[34] J. Garcia-Melian, J.D. Rossi, *Boundary blow-up solutions to elliptic systems of competitive type,* J. Differential Equations **206**, (2004), 156-181.

[35] E. Giarrusso, *Asymptotic behaviour of large solutions of an elliptic quasilinear equation in a borderline case,* C.R. Acad. Sci. Paris Séries I Math., **331**, (2000), 777-782.

[36] E. Giarrusso, *On blow-up solutions of quasilinear elliptic equation,* Math. Nachr, **213**, (2000), 89-104.

[37] E. Giarrusso, G. Porru, *Boundary behaviour of solutions to nolinear elliptic singular problems,* Appl. Mathematics in the Golden Age (J.C. Misra ed.), Narosa, New Delhi, (2003), 163-178.

[38] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, Berlin (1977).

[39] S.M. Gomes, *On a singular nonlinear elliptic problem,* SIAM J. Math. Anal., **17**, (1986), 1359-1369.

[40] A. Greco, G. Porru, *Asymptotic estimates and convexity of large solutions to semilinear elliptic equations,* Differential Integral Equations **10** (1997), 219-229.

[41] B. Kawohl, *On a class of singular elliptic equations,* Pitman Res. Notes Math. Ser., **266** (1992), 156-163.

[42] J.B. Keller, *On solutions of $\Delta u = f(u)$,* Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 503-510.

[43] V.A. Kondrat'ev, V.A. Nikishkin, *On the asymptotic behaviour near the boundary of the solution of a singular boundary value problem for a semilinear elliptic equation,* Differentsial'nye Uravneniya **26** (1990), 465-468.

[44] A.V. Lair, A.W. Shaker, *Classical and weak solutions of a singular semilinear elliptic problem* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 371-385.

[45] A.V. Lair, A.W. Shaker, *Entire solution of a singular semilinear elliptic problem* J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 498-505.

[46] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *Asymptotic behaviour of solutions of boundary blow-up problems,* Differential Integral Equations **7** (1994), 1001-1019.

[47] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem,* Proc. American. Math. Soc. **111** (1991), 721-730.

[48] J. F. Le Gall, *The Brownian snake and solutions of* $\Delta u = u^2$ *in a domain,* Probab. Theory Related Fields **102** (1995), 393-432.

[49] C. Loewner, L. Nireberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations,* contributo ad Analysis (una collezione di lavori dedicati a Lipman Bers), Academic Press, New York, (1974), 245-272.

[50] M. Marcus, *On solutions with blow-up at the boundary for a class of semilinear elliptic equations,* Developments in partial differential equations and applications to mathematical physics, (Ferrara, 1991), 65-77.

[51] M. Marcus, L. Véron, *Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorbtion,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **6** (2004), 483-527.

[52] M. Marcus, L. Véron, *Existence and uniqueness for large solutions of general nonlinear elliptic equations,* J. Evol. Equ. **3** (2003), 637-652.

[53] M. Marcus, L. Véron, *Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic*

equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **14** (1997), 237-274.

[54] P.J. McKenna, W. Reichel, *Sign-changing solutions to singular second-order boundary value problems,* Adv. Differential Equations **6** (2001), 441-460.

[55] S. Mohammed, N. Sanna, *Third order estimates for blow-up solutions of particular elliptic equations in the radial case,* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **73** (2003), 1-12.

[56] B. Mselati, *Classification and probabilistic representation of the positive solutions of a semilinear elliptic equation,* Mem. Amer. Math. Soc. **168** (2004), 637-652.

[57] A. Nachman, A. Callegari, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids,* SIAM J. Appl. Math. **38** (1980), 275-281.

[58] R. Osserman, *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$,* Pacific J. Math. **7** (1957), 1641-1647.

[59] S.I. Pohozaev, *The Dirichlet problem for the equation $\Delta u = u^2$,* traduzione inglese da Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 1143-1146.

[60] M.R. Posteraro, *On the solutions of the equation $\Delta u = e^u$ blowing up on the boundary,* C. R. Acd. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), 445-450.

[61] H. Rademacher, *Einige besondere probleme der partiellen differentialgleichungen,* in P. Frank und R, v. Mises, die Differential und Integralgleichugen der Mechanik und Physik I, seconda edizione New York (1943).

[62] J. Shi, M. Yao, *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem,* Proc Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), 1389-1401.

[63] J. Shi, M. Yao, *Positive solution for elliptic equations with singular nonlinearity,* Electron J. Diff. Eq. (2005).

[64] C.A. Stuart, *Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations,* Math. Z. **147** (1976), 53-63.

[65] C.A. Stuart, *Existence theorems for a class of non-linear integral equations,* Math. Z. **137** (1974), 49-66.

[66] C.H. Usami, *On a singular elliptic boundary value problem in a ball,* Nonlinear Anal. **13** (1989), 1163-1170.

[67] Z. Zang, J. Yu, *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term,* SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 916-927.

[68] Z. Zang, J. Cheng, *Existence and optimal estimates of solutions for singular nonlinear Dirichlet problems,* Nonlinear Analysis **57** (2004), 473-484.

Ringraziamenti

I ringraziamenti per questa tesi vanno, prima di tutto, al mio relatore Prof. Giovanni Porru, che mi ha seguito e aiutato in questi anni di ricerca, ed è stato sempre molto disponibile.
Devo tantissimo anche a Fabrizio, che mi ha sempre incoraggiato durante tutto il mio percorso del dottorato, sia dal punto di vista lavorativo che dal punto di vista umano.
Ringrazio anche i miei colleghi di studio, con cui ho condiviso tre anni davvero importanti, nonché gli altri dottorandi del Dipartimento di matematica e Informatica, per la loro solidarietà e collaborazione.